



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac: 2^{17} \cdot 2^{15} \cdot 2^{23} \cdot 7^{11} \cdot 7^{18} \cdot 7^{39} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2: 2^{55} \cdot 7^{68}$$

Тогда $a \cdot b \cdot c$ должно делиться на 7^{34} .

Иначе $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \not\equiv 7^{68}$.

Так же $a \cdot b \cdot c$ должно делиться на 2^{28} .

Иначе, если $a \cdot b \cdot c$ делится на 2^{28} ,
разложением на простые множители ≤ 27 , то

степень 2 в разложении на простые множители

$$\text{числа } a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \leq 27 \cdot 2$$

$54 < 55$ \square

Таким образом, $a \cdot b \cdot c: 2^{28} \cdot 7^{34}$ т.к. \Rightarrow

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{34}$

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 2

$\frac{a}{b}$ - несократимые дроби $\Leftrightarrow a$ и b взаимнопросты.

$\text{НОД}(a, b) = 1$

~~(я не могу решить)~~

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Заметим, что $\text{НОД}(a+b, a \cdot b) = 1$.

Иначе, если существует $p \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a+b : p \\ a \cdot b : p \end{cases}$

~~то~~ $a \cdot b : p$ значит $\begin{cases} a : p \\ b : p \\ a : p \end{cases}$ т.к. $\text{НОД}(a, b) = 1$

Н.у.о $\begin{cases} a : p \\ b \not: p \end{cases}$ но тогда $a+b \not: p$ ~~тогда~~ !!!

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

можно сократить на $m \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2-9ab : m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ 9ab : m \end{cases}$$

\Rightarrow т.к. $\text{НОД}(ab, a+b) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b : m \\ 9 : m \end{cases}$$

Наибольший делитель 9 это 9 . $\Rightarrow m = 9$
наибольшее

Ответ: 9.

Пример $a = 4$ $b = 5$ $\frac{4}{5}$ - несокр.

$$\frac{4+5}{16+25-7 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{-59} = -\frac{1}{11}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

т.к.

$$\left(\begin{array}{l} \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \neq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ т.к. } \Delta < 0, 3 > 0 \\ \Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 < 0 \end{array} \right)$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2})$$

$$\Leftrightarrow (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = (1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 \Leftrightarrow \\ 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \text{ определен} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 3 \cdot x(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81x^2 = 12x^2 + 12 + 4 \\ x \geq 0 \\ x \in [-1; 0] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} *x=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ - не бывает такого } \Rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ - единственный корень ур-а}$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{9} \right\}$

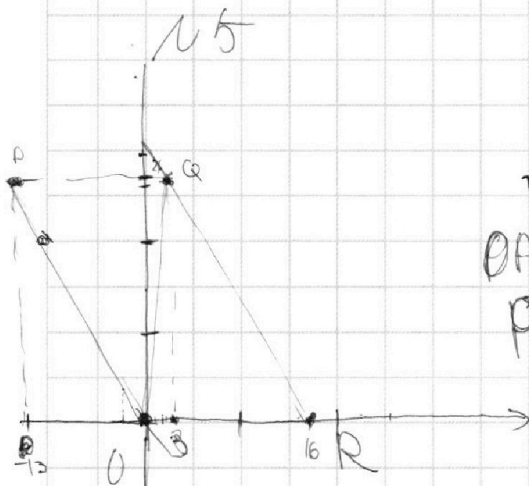
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

уравнения прямых.

OP $y = -2x$

PQ: $y = 26$

OR $y = 0$

QR: $y = -2x + 32$

$(x_0, y_0) \in OPR \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 26 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 26 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$y \geq -2x$

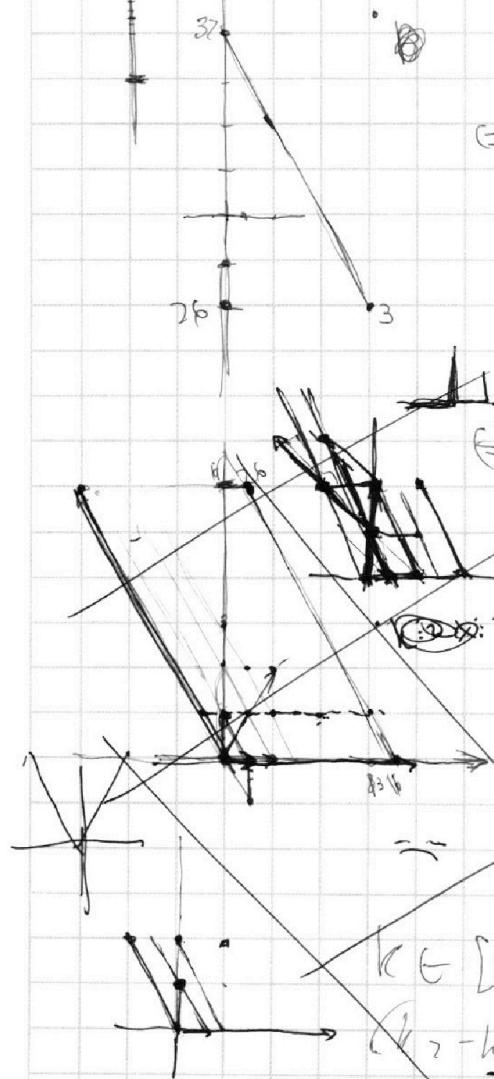
$x \geq -\frac{y}{2}$

$y \leq -2x + 32$

$x \leq \frac{32 - y}{2}$

$x, y \in \text{параметризация}$

$\Rightarrow x, y$ - решение системы уравн.



x_0, y_0 общее. конст. произв.
 $y_0 = x_0 + 2k_0, 2ge$

$3(x_2 - x_1) + 4(k_2 - k_1) = 14$

$k \in [0; 6] \pmod{3}$

$(x_2 - x_1) + (k_2 - k_1) = 28$

$(k_2 - k_1) \equiv 1 \pmod{3}$

- 1 4 7 10 13 16



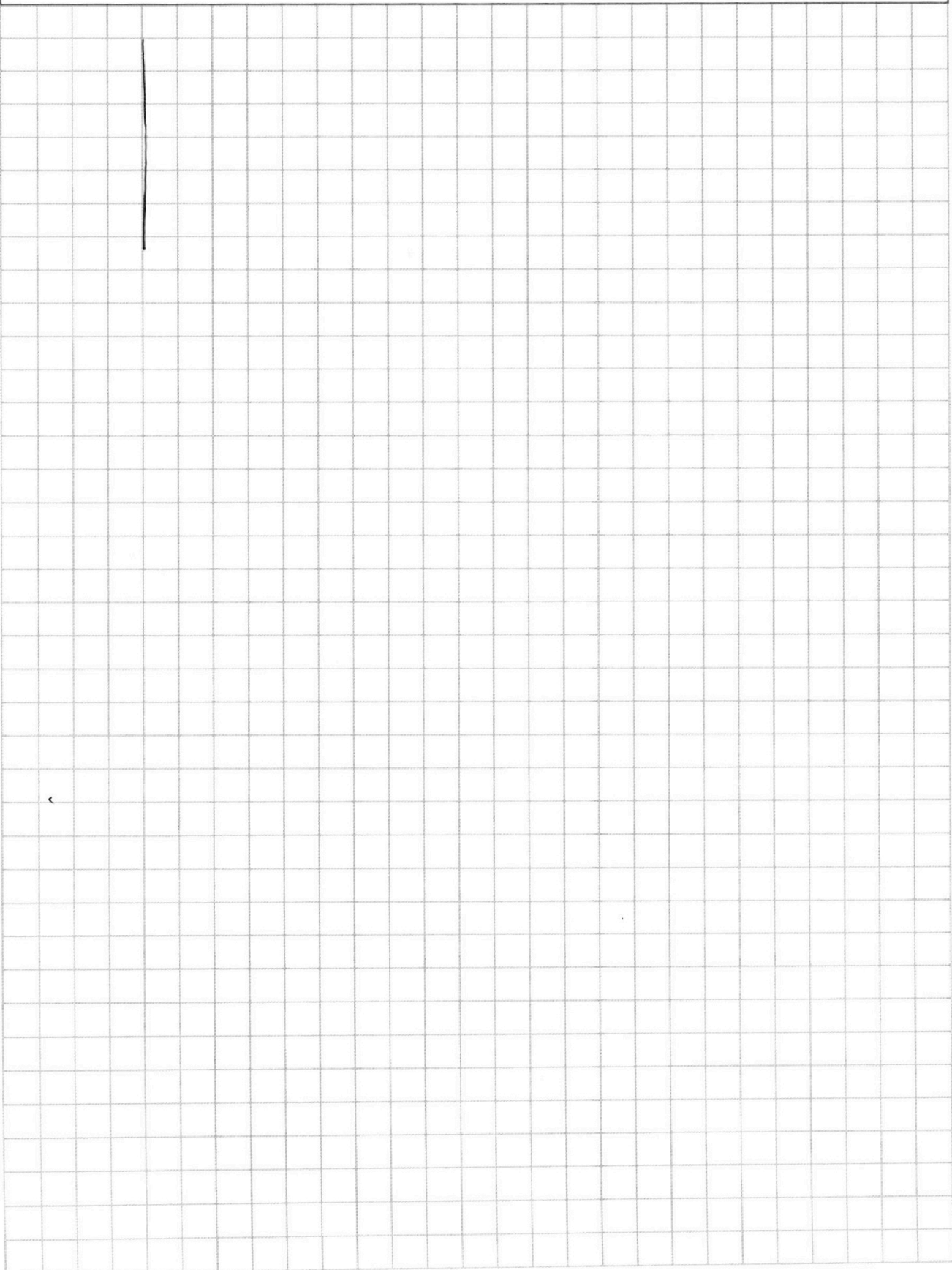
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

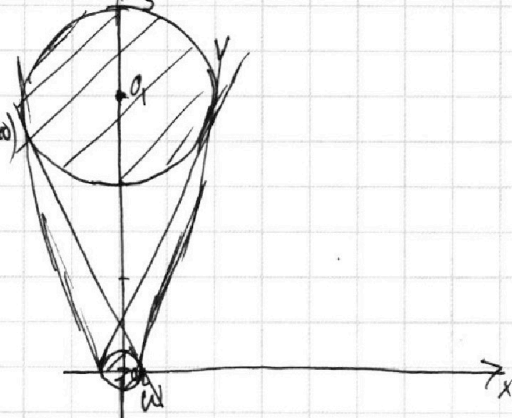
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(x^2 + y^2 - 1) (x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$
 ур-е окр-ти ω

$A(x_0, y_0) \in$ Заштрихованной окр-ти

области (границы включительно)
 $\Rightarrow x_0, y_0$ является решением неравенства.



$ax + y - 8b = 0$ - ур-е прямой
 $y = 8b - ax$

$(x_0, y_0) \in$ Прямой

$(x_0, y_0) \in$ Заштрихованной области

$\Rightarrow (x_0, y_0)$ - решение неравенства

$O_1, O_2 = 12$

$r_1 = 4 \quad r_2 = 1$

$\{O(x_0, y_0)\}$ - искомые точки, касаясь прямой и кругов.

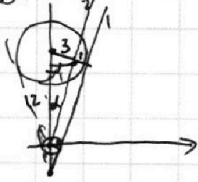
В этом множестве 2 элемента

\Rightarrow Прямая касается обеих окружностей.
 (если пересекает какую-то окр-ть то получит бесконечное множество т.к. на отрезке бесконечно много точек.)

Если касается только одной - одно решение.

Это есть наша прямая - общая касат. 2х окр-тей.

I Внешняя



Прямая 1: $y = 8b - ax$ (1||2)

2: $y = -ax$

$a = -\frac{8b}{x} = -ctg \alpha = -\frac{\sqrt{3^2 + 3^2}}{3} =$

$= -\frac{3\sqrt{15}}{3} = -\sqrt{15}$

Аналогично подходит $a = \sqrt{15}$ (касат с др. стороны)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

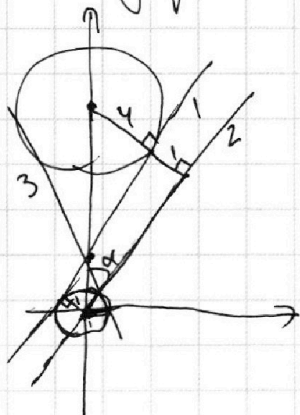
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



II Внутренний



Прямая: 1 : $y = 8b - ax$

2: $y = -ax$

(1 || 2)

$$a = -\frac{y}{x} = -\operatorname{ctg} \alpha =$$

~~0~~ $= -\frac{\sqrt{12^2 - 5^2}}{5} =$

$$= -\frac{\sqrt{(2+5)(12-5)}}{5} = -\frac{\sqrt{7 \cdot 17}}{5}$$

Симметрично подходит прямая 3.

где $a = \frac{\sqrt{7 \cdot 17}}{5}$

Ответ: $\left\{ \pm \frac{\sqrt{7 \cdot 17}}{5}, \pm \sqrt{15} \right\}$

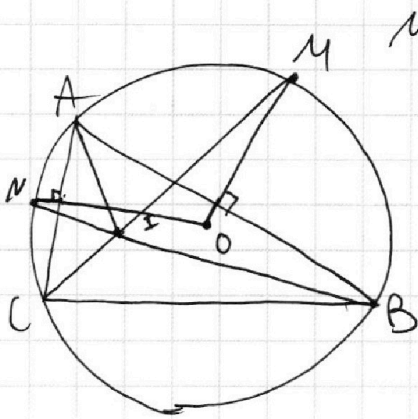
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~ИЗООС.~~

CM, BN — биссектрисы
углов
 $\angle ACB, \angle ABC.$ →

⇒ $I = CM \cap BN$ —

— центр вписанной окр-ти.

O — центр окр-ти

$ON \perp CA$ (т.к. $\angle AOM = \angle MOB$;
 $AO = OB$)

$MO \perp AB$

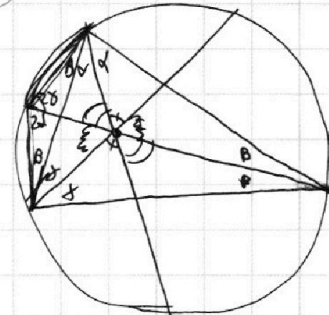
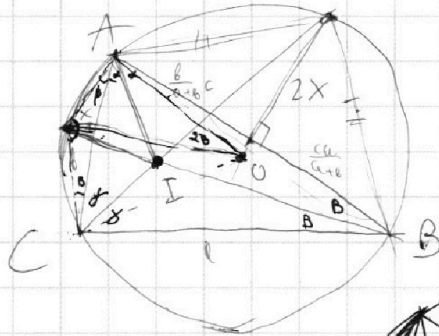
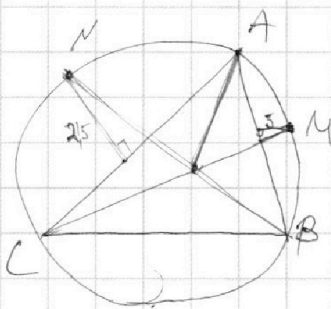
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

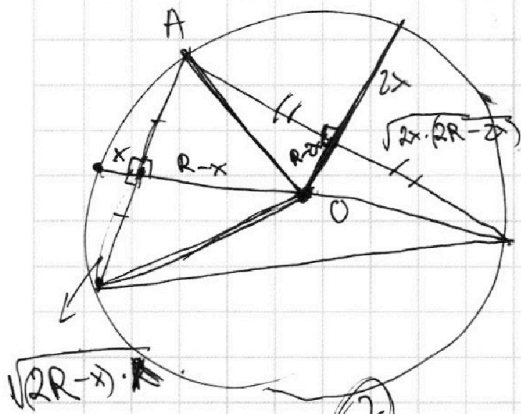
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



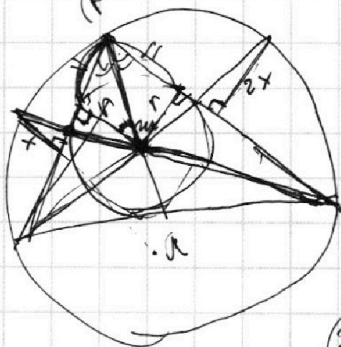
$$180 - 2\beta = 2,5 \\ = 2\alpha + 2\gamma$$

$$\beta = 180 - 90 - \alpha - \gamma$$

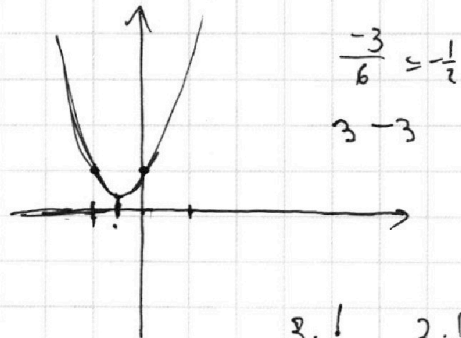


$$\left\{ \begin{aligned} AO &= 2x \cdot (2R - 2x) + (R - 2x)^2 = \\ &= 4xR - 4x^2 + R^2 - 4xR + 4x^2 \\ AO &= x(2R - x) + (R - x)^2 \end{aligned} \right.$$

$$(R - x)^2 + R^2$$



$$S_1 = \\ n = S_1$$



$$3 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$-\frac{6}{6} = -1$$

$$-\frac{3}{4} + 1 =$$

$$3 + 6 + 2 =$$

$$= +\frac{1}{4}$$

$$=$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \Leftrightarrow y = -ax + 8b \Leftrightarrow \text{---} \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

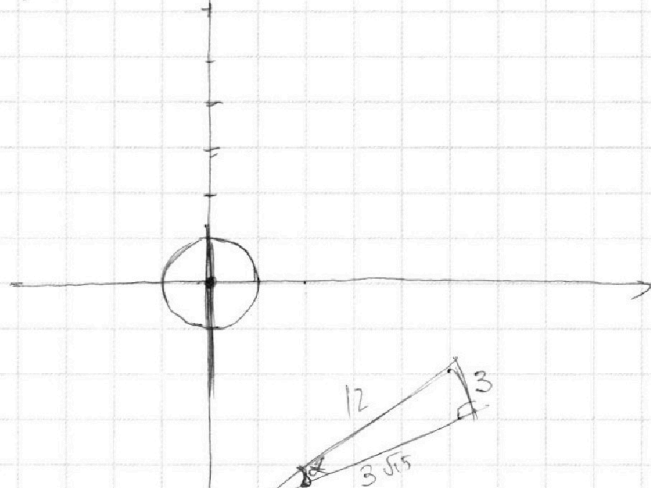
$$a = -y + 8b$$

$$\therefore y = -ax$$

$$a = -\frac{y}{x}$$

$$a = -\text{ctg } \alpha$$

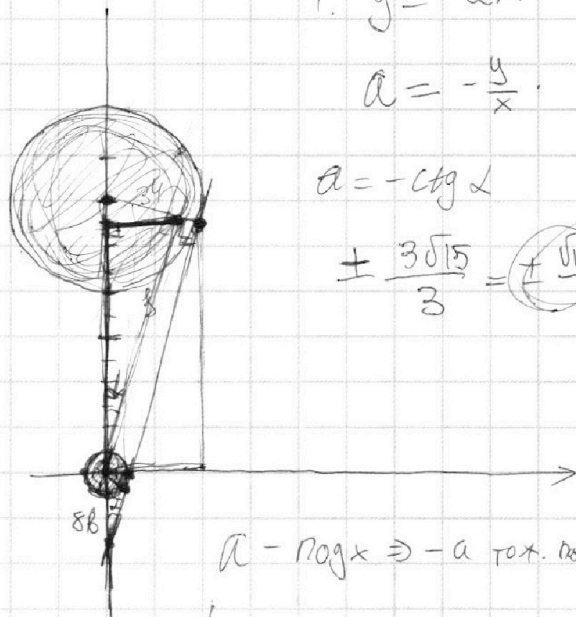
$$\pm \frac{3\sqrt{15}}{3} = \pm \sqrt{15}$$



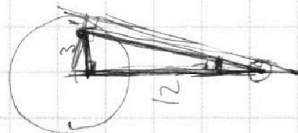
$$3^2 + 4^2 - 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + (y - 12)^2 = 16$$



$$a = -\text{ctg } \alpha \Rightarrow -a \text{ т.ч. } \text{ctg } \alpha$$



$$12^2 - 5^2 =$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{(a+b)^m}{(a+b)^2 - 7ab}$$

$a+b$ и ab бз. пр.

$a=4$ $b=5$ и т.д. $m=9$

$(4+5)$

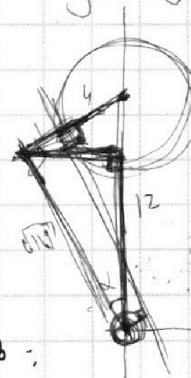
Пример $\frac{140}{99}$ - гоним:

$$\begin{array}{r} +16 \\ \hline 25 \\ \hline 41 \\ \hline 140 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\frac{140}{99}$$

$$\frac{140}{99}$$

$$\begin{array}{r} 12^2 - 5^2 = \\ = (12-5)(12+5) \\ = 7 \cdot 17 \\ \text{ctg } \alpha = ? = \\ \cdot 10 \\ \hline 144 \\ \hline 25 \\ \hline 119 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6}] \cup [\frac{6 + 2\sqrt{3}}{6}; +\infty)$$
$$\Delta = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = 2 \cdot 6 = 12$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$$

на прямой

$$\cancel{3x^2} - 6x + 2 - \cancel{3x^2} - 3x - 1 = (1 - 9x) \cdot (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x) \cdot (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - 9x) (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \Leftrightarrow (*) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ \cancel{3x^2} + 3x + 1 = 1 + \cancel{3x^2} - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \\ 1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

1 2 3 4 5 6 7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



M
a, b, c

Черновики

$$ab: 2^{15} \neq 11$$

$$bc: 2^{17} \neq 18$$

$$ac: 2^{23} \neq 39$$

$$50 + 18$$

$$15 + 17 + 23 = 15 + 40 = 55$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{55} \neq 68$$

$$abc: 2^{28} \neq 34$$

N2

$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

a, b - кер.

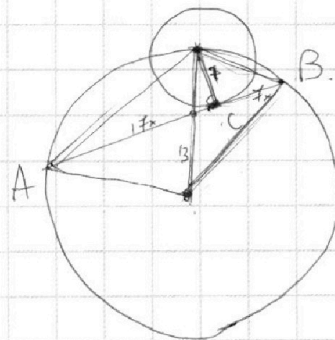
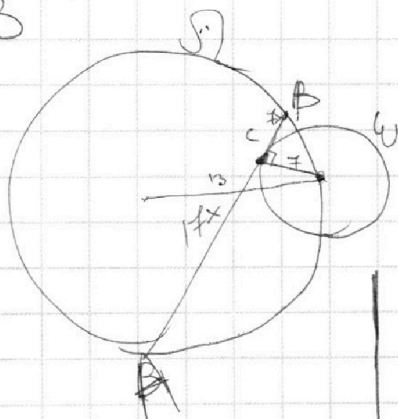
a+b - z ab - кер.

a-z b - кер

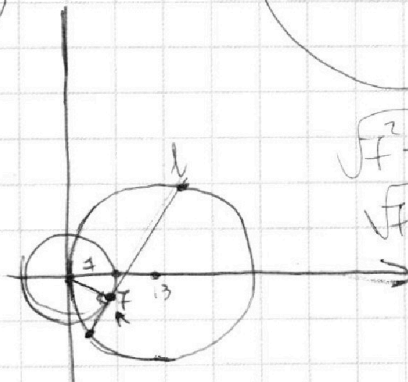
a+b кер

(a+b) - 9ab - кер.

N3



$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$



$$\sqrt{7^2 + 7^2 x^2} = 7^2 \sqrt{1+x^2}$$

$$\sqrt{7^2 + 17^2 x^2} = \sqrt{7^2 + 17^2 x^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ур-е ω $x^2 + y^2 = 7^2$

$(x-13)^2 + y^2 = 13^2$

$A(x_0, y_0)$

$y = ax + b$

$b = \frac{y_0 - ax_0}{1}$



$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - 3x^2 - 3x - 1}{\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1} \geq 0 \\ 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3x \leq 0 \\ 2x^2 + 12x + 4 = 81x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 69x^2 - 12x - 4 = 0$

$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 781^2$

$= 4 \cdot 4 (9 + 69) = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$

$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -81 \\ \hline 12 \\ +69 \\ \hline 781^2 \end{array}$$