



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \begin{cases} a \cdot b = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot k_1 \\ b \cdot c = 2^{17} \cdot 4^{18} \cdot k_2 \\ a \cdot c = 2^{25} \cdot 4^{39} \cdot k_3 \end{cases} \Rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{55} \cdot 4^{68} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3; \quad a \cdot b \cdot c_{\min} = ?$$

т.к. $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N} \Rightarrow k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ и $a \cdot b \cdot c > 0 \Rightarrow$
и $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = \sqrt{2} \cdot 2^{27} \cdot 4^{34} \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}$ но $a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N}$ тогда наименьшее

натуральное значение будет достигаться при $\sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3} = \sqrt{2}$ (например

$k_1=2, k_2=1, k_3=1 \in \mathbb{N}$) и будет равно $2^{28} \cdot 4^{34}$ Ответ: $2^{28} \cdot 4^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) $\max m$?

$$\begin{cases} a+b \equiv 0 \pmod{m} \\ a^2 - 9ab + b^2 \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$a^2 - 9ab + b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$(a+b)^2 - 9ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\text{но } a+b \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow -9ab \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9ab : m; \quad 9ab : m; \quad \Rightarrow \begin{cases} 9ab \equiv 0 \pmod{m} \\ a+b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$a+b = km; \quad b = km - a; \quad 9a(km - a) = k_1 m; \quad 9akm - 9a^2 = k_1 m;$$

$$9a^2 - 9akm + k_1 m = 0; \quad D = 81k^2 m^2 - 4 \cdot 9 \cdot k_1 m =$$

$$= 9m(9k^2 m - 4k_1); \quad a = \frac{+9km \pm \sqrt{9m(9k^2 m - 4k_1)}}{18} = \frac{3km \pm \sqrt{m(9k^2 m - 4k_1)}}{6}$$

$$a, b \in \mathbb{N}; \quad k, k_1 \in \mathbb{N} \text{ так как } a \text{ — натуральное то } \frac{3km \pm \sqrt{m(9k^2 m - 4k_1)}}{6}$$

тоже натуральное. так как делитель делит числитель, то

наиболее выгодный вариант достигается при $k=1$ и $k_1=1$

(изначально $a+b=km$ и $a \cdot b = k_1 m$, очевидно, что при фиксированных

$$a \text{ и } b, m \text{ — наибольшее при } k_1=1 \text{ и } k=1) \Rightarrow Q = \frac{3m \pm \sqrt{m(9m-4)}}{6};$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$④ \sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x;$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = 1-9x; \Rightarrow a = \sqrt{3x^2-6x+2}, b = \sqrt{3x^2+3x+1};$$

$$a-b = a^2-b^2; (a-b) = (a-b)(a+b);$$

$$\begin{cases} a=b \textcircled{1} \\ a+b=1 \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1}; \uparrow^2 \text{ Проверка: } \sqrt{\frac{1}{24} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{1}{3} + 1} = 0;$$

$$3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1;$$

$$9x = 1; x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{1}{24} + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{4}{3}} \text{ - истина}$$

$$\textcircled{2} \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \uparrow^2$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 + 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 1;$$

$$-6x^2+3x-2 = 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} \uparrow^2$$

$$(6x^2-3x+2)^2 = 4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) \text{ и } -6x^2+3x-2 \geq 0$$

~~$$36x^4 + 9x^2 + 4 - 2 \cdot 6x^2 \cdot 3x - 2 \cdot 3x^2 \cdot 2 + 6x^2 \cdot 2 \cdot 2 = 36x^4 + 36x^3 + 12x^2 - 42x^3 - 42x^2 - 24x^2 + 24x^2 + 24x + 24 \cdot 8$$~~

~~$$9x^2 + 4 - 12x = 12x^2 - 42x^3 - 42x^2 + 8$$~~

~~$$42x^3 + 69x^2 - 12x - 4 = 0$$~~

$$-6x^2+3x-2: D=9-4 \cdot 2 \cdot 6=9-48=-...; \text{ корни虚数 } \Rightarrow$$

$\Rightarrow -6x^2+3x-2 < 0$ всегда \Rightarrow этот случай не даст решений.

Ответ: $\frac{1}{9}$;

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

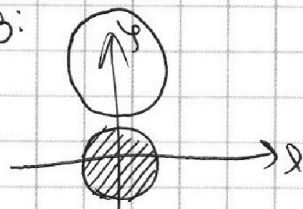
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{6} \begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

I) или
$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 & \text{- окружность с ц. } (0;0), R=1 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 16 & \text{- окружность с ц. } (0;12), R=4 \\ ax+y-8b=0 & \text{- прямая} \end{cases}$$

Эскиз:



$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ ax+y-8b=0 \end{cases} \text{ либо 0 реш, либо бесконечность реш, либо 1 реш.}$$

$$0 = ax+y-8b - \text{кас. к } x^2+y^2=1;$$

$\hookrightarrow ax+y-8b=0$ - касательная к двум окружностям.

$$\begin{cases} y = -ax+8b \\ -ax+8b = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \quad 1)$$

$$64b^2 + a^2x^2 - 2ax \cdot 8b = 1 - x^2;$$

$$(a^2+1)x^2 + 64b^2 - 16abx - 1 = 0;$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(64b^2-1)(a^2+1);$$

$$1 \text{ реш } \Rightarrow D=0;$$

$$256a^2b^2 = 256a^2b^2 + 256b^2 - a^2 - 1$$

$$256b^2 = a^2 + 1 \quad *$$

II) или Аналитичес:

$$\begin{cases} x^2+(y-12)^2 \geq 16 \\ ax+y-8b=0 \end{cases}$$

$$ax+y-8b=0 \text{ - кас. к } x^2+(y-12)^2=16;$$

$$2) -ax+8b = \sqrt{16-x^2} + 12;$$

$$64b^2 + a^2x^2 - 2ax \cdot 8b = (-ax+8b-12) = \sqrt{16-x^2}; a^2x^2 + 64b^2 + 144 -$$

$$-2ax \cdot 8b - 2 \cdot 12 \cdot 8b + 2ax \cdot 12 = 16 - x^2; a^2x^2 + 64b^2 + 144 - 16abx - 192b + 24ax = 16 - x^2; D=0; * \rightarrow$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a+b=km; a^2+b^2+2ab=k^2m^2; a^2+b^2=k^2m^2-2ab;$$

$$a^2-2ab+b^2=k^2m^2 \quad k^2m^2-2ab-2ab=k^2m^2;$$

$$(a+b)^2-4ab=k^2m^2 \quad k^2m^2-4ab=k^2m^2;$$

$$(km)^2-4ab=k^2m^2; \quad km^2-k^2m-4ab=0;$$

$$D = k_1^2 + 4 \cdot 4ab \cdot k_3$$

$$m = \frac{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + 36abk_3}}{2k_3}$$

$$m = \frac{k_1 + \sqrt{k_1^2 + 36k_2}}{2k_3}$$

$$\left(\frac{k_1 + \sqrt{k_1^2 + 36k_2}}{2k_3} \right) \cdot k_3 = k_1 + \sqrt{k_1^2 + 36k_2}$$

$$(mk_3 - k_1)^2 = k_1^2 + 36k_2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right) + 1$$

$$a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

$$m = \text{gcd}(a+b, a^2 - 4ab + b^2)$$

$$\text{gcd} \left(\frac{a+b}{m} \right)$$

$$x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 16 \\ \hline 12 \\ 192 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \begin{cases} a \cdot b = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot K_1 \\ b \cdot c = 2^{14} \cdot 4^{18} \cdot K_2 \\ a \cdot c = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot K_3 \end{cases} \begin{cases} a \cdot b = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot K_1 \\ \frac{a}{b} = 2^6 \cdot 2^{21} \cdot \frac{K_3}{K_2} \\ a \cdot c = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot K_3 \end{cases} \begin{cases} a^2 = 2^{21} \cdot 4^{32} \cdot \frac{K_1 K_3}{K_2} \\ \dots \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = 2^{10} \cdot 4^{16} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{K_1 \cdot K_3}{K_2} \\ b = \frac{2^{15} \cdot 4^{11} \cdot K_1 \cdot K_2}{2^{10} \cdot 4^{16} \cdot \sqrt{2} \cdot K_3 \cdot K_1} \\ c = \frac{2^{23} \cdot 4^{39} \cdot K_3 \cdot K_2}{2^{10} \cdot 4^{16} \cdot \sqrt{2} \cdot K_1 \cdot K_3} \end{cases} \begin{cases} a = 2^{10} \cdot 4^{16} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{K_1 \cdot K_3}{K_2} \\ b = \frac{2^5}{4^5} \end{cases}$$



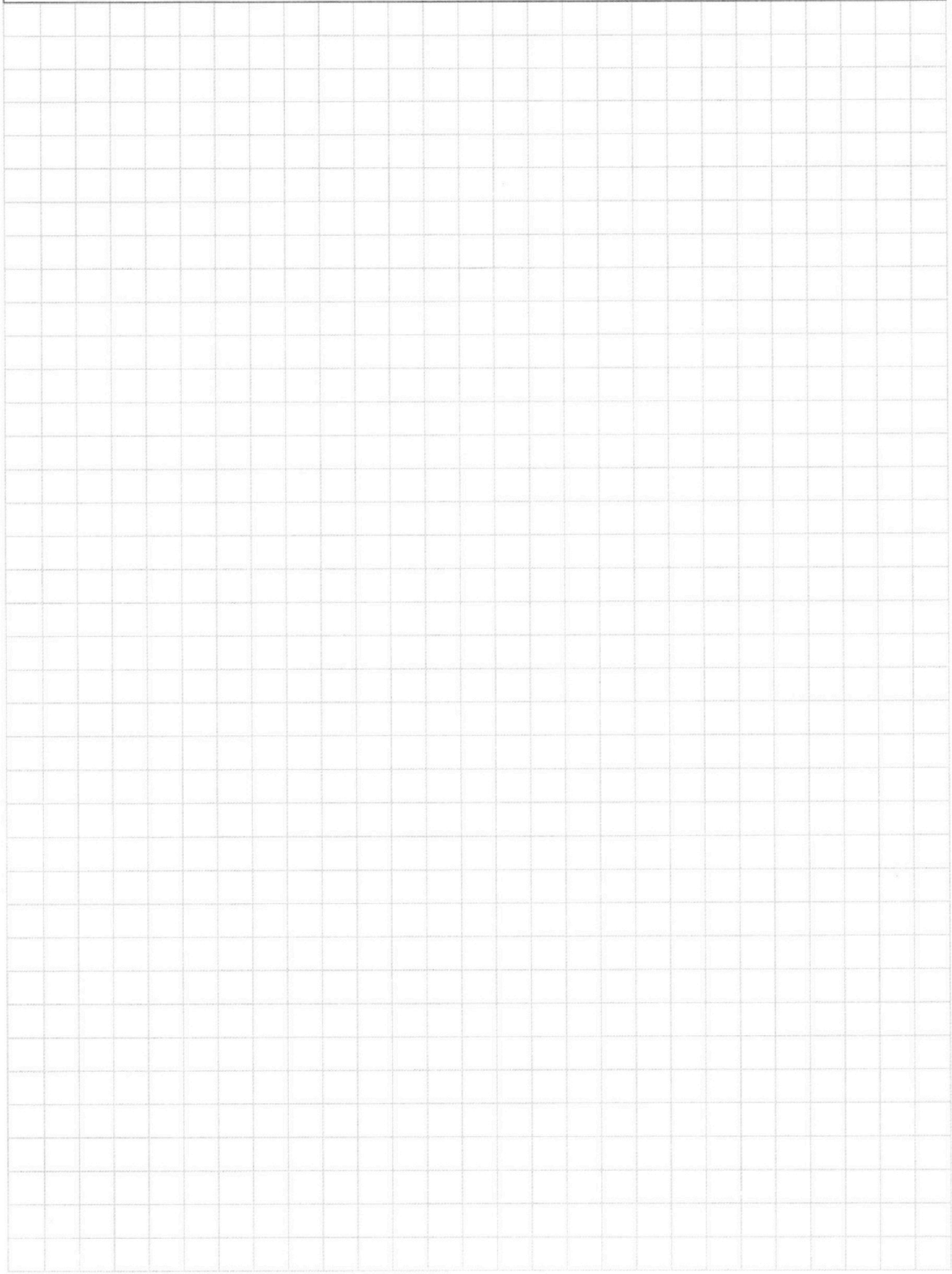
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



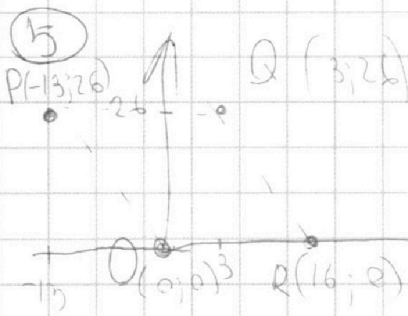
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2\Delta x + \Delta y = 14$$

$$\Delta y = 14 - 2\Delta x$$

$$\Delta y \leq 26$$

$$14 + 2x_1 - 2x_2 = y_2 - y_1$$

$$x_1 - x_2 = \frac{y_2 - y_1 - 14}{2}$$

$$14 - \Delta y \leq 58$$

$$\Delta x \leq 29$$

$$\Delta y \leq \Delta y \geq -44$$

$$2\Delta x \leq 58$$

$$14 - 2\Delta x \leq 26$$

$$-2\Delta x \leq 12$$

$$\Delta x \geq -6$$

$$x_2 - x_1 \geq -6$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$14 - y_1 - y_2 \leq 12$$

$$y_1 - y_2 \leq -2$$

$$y_2 - y_1 \geq 2$$

$$-26 \leq 14 - 2(x_2 - x_1) \leq 26$$

$$-40 \leq -2(x_2 - x_1) \leq 12$$

$$-40 \leq 2(x_2 - x_1) \leq 12$$

$$-20 \leq x_1 - x_2 \leq 6$$

$$-20 \leq x_1 - x_2 \leq 20$$

$$-26 \leq y_1 - y_2 \leq 26$$

$$-20 \leq \frac{(y_2 - y_1 - 14)}{2} \leq 6$$

$$-40 \leq y_2 - y_1 - 14 \leq 12$$

$$\begin{cases} \Delta y \leq 26 \\ \Delta x \leq 29 \\ 2\Delta x + \Delta y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 26 \leq 14 - 2\Delta x \leq 26 \\ 29 \leq \Delta x \leq 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20 \leq -\Delta x \leq 6 \\ -29 \leq \Delta x \leq 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \leq \Delta x \leq 20 \\ -29 \leq \Delta x \leq 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -26 \leq \Delta y \leq 26 \\ 6 \leq \Delta x \leq 20 \\ 2\Delta x + \Delta y = 14 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \frac{14 - \Delta y}{2}$$

$$\Rightarrow 6 \leq \frac{14 - \Delta y}{2} \leq 20$$

$$12 \leq 14 - \Delta y \leq 40$$

$$-2 \leq -\Delta y \leq 26$$

$$-26 \leq \Delta y \leq 2$$

$$-26 \leq 14 - 2\Delta x \leq 2$$

$$-40 \leq -2\Delta x \leq -12$$

$$12 \leq 2\Delta x \leq 40$$

$$6 \leq \Delta x \leq 20$$

$$\begin{cases} 6 \leq \Delta x \leq 20 \\ -2 \leq \Delta y \leq 26 \\ 2\Delta x + \Delta y = 14 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~6~~ ~~5~~

$$\textcircled{6} \begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{I cu)} \begin{cases} (x-0)^2+(y-12)^2 \leq 16 \quad (1) \text{ экив;} \\ x^2+y^2 \leq 1 \quad (2) \\ ax+y-8b=0 \end{cases}$$

(1) и (2) - не пересекаются \Rightarrow

\Rightarrow нет решений

$$\text{II cu)} \begin{cases} (x-0)^2+(y-12)^2 \geq 16 \\ x^2+y^2 \geq 1 \\ ax+y-8b=0 \end{cases}$$

$y=8b-ax; y=-ax+8b$; -наклои.
прямая

