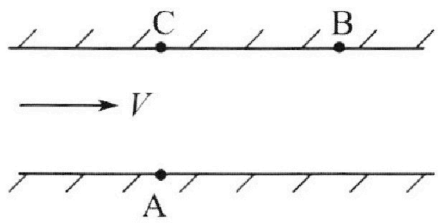
Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2023

Вариант 09-01

Во всех задачах, в ответах допустимы обыкновенные дроби и радикалы.

1. Пловец трижды переплывает реку. Движение пловца прямолинейное. Скорость пловца в подвижной системе отсчета, связанной с водой, во всех заплывах одинакова по модулю.



В двух первых заплывах А – точка старта, В – точка финиша (см. рис., V - неизвестная скорость течения реки). Ширина реки $AC = d = 70$ м, снос, т.е. расстояние, на которое пловец смещается вдоль реки к моменту достижения противоположного берега, $CB = L = 240$ м.

Продолжительность первого заплыва $T_1 = 192$ с, продолжительность второго заплыва $T_2 = 417$ с.

1) Найдите скорости V_1 и V_2 пловца в лабораторной системе отчета в первом и втором заплывах.

2) Найдите скорость U пловца в подвижной системе отсчета, связанной с водой.

В третьем заплыве пловец стартует из точки А и движется так, что снос минимальный.

3) Найдите продолжительность T третьего заплыва.

2. Футболист на тренировке наносит удары по мячу, лежащему на горизонтальной площадке и направляет мяч к вертикальной стенке. После абсолютно упругого соударения со стенкой мяч падает на площадку. Наибольшая высота, на которой находится мяч в полете, $H = 16{,}2$ м.
Расстояние от точки старта до стенки в 5 раз больше расстояния от стенки до точки падения мяча на площадку.

1) На какой высоте h происходит соударение мяча со стенкой?

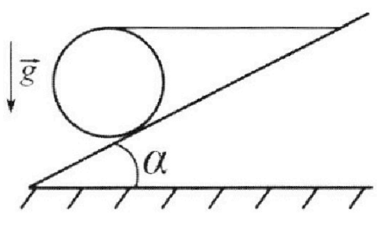
2) Найдите продолжительность t_1 полета мяча от старта до соударения со стенкой.

Допустим, что в момент соударения мяча со стенкой на той же высоте h, стенка движется навстречу мячу со скоростью $U = 2$ м/с.

3) Найдите расстояние d между точками падения мяча на площадку в случаях: стенка покоится, стенка движется.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Соударения мяча со стенкой абсолютно упругие. Траектории мяча лежат в вертикальной плоскости перпендикулярной стенке.

3. Однородный шар массой $m = 3$ кг удерживается на шероховатой наклонной плоскости горизонтальной нитью, прикрепленной к шару в его наивысшей точке. Наклонная плоскость образует с горизонтальной плоскостью угол α такой, что $\sin\alpha = 0{,}6$.



1) Найдите силу T натяжения нити.

2) Найдите силу F_{TP} трения, действующую на шар.

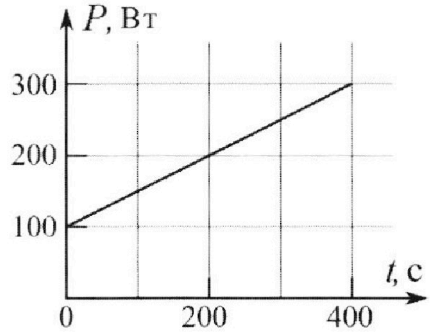
3) При каких значениях коэффициента μ трения скольжения шар будет находиться в покое? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2023

Вариант 09-01

Во всех задачах, в ответах допустимы обыкновенные дроби и радикалы.

4. Воду нагревают на электроплитке. Начальная температура воды $\tilde{t}_0 = 14\,^0$C, объем воды $V = 2$ л. Сопротивление спирали электроплитки $R = 20$ Ом, сила тока в спирали $I = 5$ А.



Зависимость мощности P тепловых потерь от времени t представлена на графике (см. рис.).

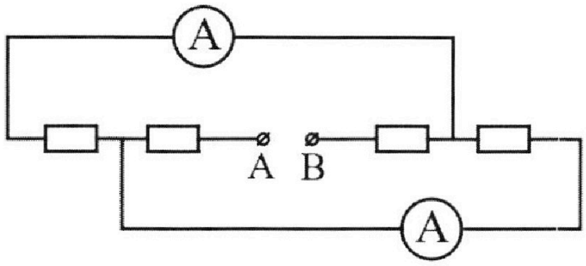
1) Найдите мощность P_H нагревателя.
2) Через какое время T после начала нагревания температура воды станет равной $\tilde{t}_1 = 25\,^0$C?

Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·^{0}C).

5. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, четыре резистора, у двух из которых сопротивление по 20 Ом, у двух других сопротивление по 40 Ом. Сопротивление амперметров пренебрежимо мало.

После подключения к клеммам A и B источника постоянного напряжения показания амперметров оказались различными. Меньшее показание $I_1 = 1$ А.

1) Найдите показание I_2 второго амперметра.
2) Найдите напряжение U источника.



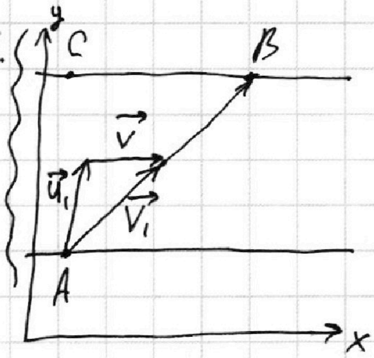
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$ — скорости пловца относительно земли в 1 и 2 случаях.



$\vec{V_1} t_1 = \vec{AB} \Rightarrow V_1 = |\vec{V_1}| = \frac{AB}{t_1} = \frac{\sqrt{L^2+d^2}}{t_1}$

$\vec{V_2} t_2 = \vec{AB} \Rightarrow V_2 = |\vec{V_2}| = \frac{AB}{t_2} = \frac{\sqrt{L^2+d^2}}{t_2}$

$\left.\begin{matrix} V_{1x} t_1 = AB_x = BC = L \\ V_{1y} t_1 = AB_y = AC = d \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} V_{1x} = \frac{L}{t_1} = 1{,}25 \text{ м/с} \\ V_{1y} = \frac{d}{t_1} = \frac{35}{96} \text{ м/с} \end{matrix}$

$\vec{u_1}$ — пусть это скорость пловца относительно воды. $\vec{V_1} = \vec{u_1} + \vec{V}$, $V_{1x} = u_{1x} + V$, $V_{1y} = u_{1y}$

Аналогично, для второго случая:

$V_{2x} = \frac{L}{t_2} = \frac{80}{139}$ м/с, $V_{2y} = \frac{d}{t_2} = \frac{70}{417}$ м/с

$\vec{V_2} = \vec{u_2} + \vec{V}$, $V_{2x} = u_{2x} + V$, $V_{2y} = u_{2y}$

$U = |\vec{u_1}| = |\vec{u_2}|$; По теореме Пифагора,

$u_{1x}^2 + u_{1y}^2 = u_{2x}^2 + u_{2y}^2$; $V_{1y}^2 + (V_{1x} - V)^2 = V_{2y}^2 + (V_{2x} - V)^2$

$V_{1y}^2 + V_{1x}^2 - 2VV_{1x} + V^2 = V_{2y}^2 + V_{2x}^2 - 2VV_{2x} + V^2$

$2V(V_{1x} - V_{2x}) = V_{1x}^2 + V_{1y}^2 - V_{2x}^2 - V_{2y}^2$

$$V = \frac{V_{1x}^2 + V_{1y}^2 - V_{2x}^2 - V_{2y}^2}{2V_{1x} - 2V_{2x}} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2V_{1x} - 2V_{2x}}$$

$U = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = \sqrt{V_{1y}^2 + (V_{1x} - V)^2}$.

Рассмотрим третий случай:

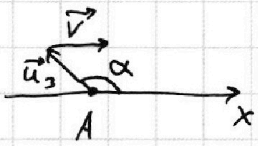
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть пловец плывёт со скоростью $\vec{u_3}$ относительно воды под углом α к оси x.

L' – новый снос.



$\vec{V_3} = \vec{u_3} + \vec{V}$, $V_{3x} = U\cos\alpha + V$, $V_{3y} = U\sin\alpha$

$V_{3y}T = d \Rightarrow T = \frac{d}{U\sin\alpha}$. $V_{3x}T = L' = (U\cos\alpha + V)\frac{d}{U\sin\alpha}$.

если $U > V$ (но у меня нет калькулятора, поэтому я не буду это проверять), то $\forall\alpha: L' = 0$, тогда $U\cos\alpha + V = 0$, $\cos\alpha = -\frac{V}{U}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{U^2-V^2}}{U}$, $T = \frac{d}{\sqrt{U^2-V^2}}$.

Иначе надо найти такой α, что

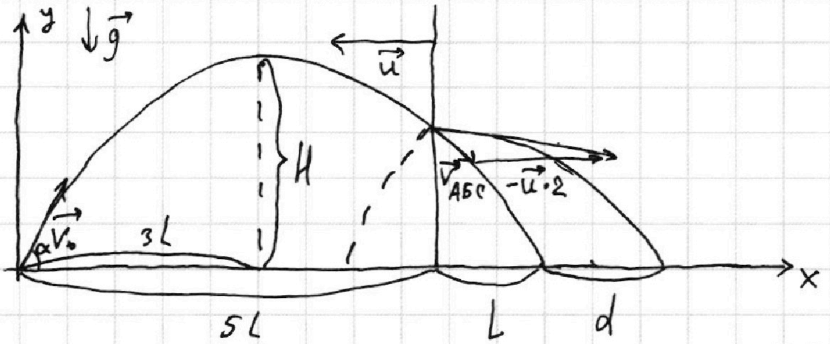
$L' = (U\cos\alpha + V)\frac{d}{U\sin\alpha} = \frac{dU\cos\alpha}{U\sin\alpha} + \frac{dV}{U\sin\alpha} = d\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \frac{dV}{U\sin\alpha}$ – минимально, и $T = \frac{d}{U\sin\alpha}$.

Ответ: 1) $V_1 = \frac{\sqrt{L^2+d^2}}{t_1}$, $V_2 = \frac{\sqrt{L^2+d^2}}{t_2}$,

2) $U = \sqrt{V_{1y}^2 + \left(V_{1x} - \frac{V_1^2 - V_2^2}{2V_{1x} - 2V_{2x}}\right)^2}$, где $V_{1y} = \frac{d}{t_1}$, $V_{1x} = \frac{L}{t_1}$, $V_{2x} = \frac{L}{t_2}$.

3) $T = \frac{d}{\sqrt{U^2-V^2}}$, если $U > V$,

иначе $T = \frac{d}{U\sin\alpha}$, где при α снос минимальный.



Когда шарик абсолютно упруго ~~отражается~~ ударяется, его скорость относительно стены отображается симметрично, относительно вертикалной прямой. Пока стенка покоится, можно считать, что скорость шарика относительно земли $\vec V_{АБС}$ отображается симметрично. Тогда можно и траекторию отобразить симметрично, и считать, что тело движется по параболе.

$y(t)=V_0\sin\alpha\, t-\frac{gt^2}{2}$. При $y(T)=H$ $V_y=0$, значит,
$2Hg=V_0^2\sin^2\alpha-0^2 \Rightarrow H=\frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}$, $V_0\sin\alpha=\sqrt{2gH}$.
$V_0\sin\alpha=gT \Rightarrow T=\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

$x(t)=V_0\cos\alpha\, t$. Максималную высоту тело имело, когда находилось в середине своего пути по горизонтали, т.е. $x(T)=V_0\cos\alpha\sqrt{\frac{2H}{g}}=3L$,
а $V_0\cos\alpha\, t_1=5L \Rightarrow \sqrt{\frac{2H}{g}}:t_1=\frac{3}{5}$, $t_1=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$y(t_1) = \sqrt{2gH} \cdot \frac{5}{3}\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{2H}{g} = \frac{5}{3} \cdot 2H - \frac{25}{9}H = \frac{5}{9}H = h.$

Во втором случае при ударе $\vec{V}_{АБС} = \vec{V}_{отн} + \vec{u}$, $\vec{V}_{отн} = \vec{V}_{АБС} - \vec{u}$ — скорость относительно стены до удара. $\vec{V}'_{АБС}$ (новая скорость шара) получится симметричным отражением $\vec{V}_{отн}$ и прибавлением $\vec{u}$. Запишем это в проекциях: $y: V'_{АБС\,y} = V_{АБС\,y}$

$x: V'_{АБС\,x} = -(V_{АБС\,x} + u) - u = -V_{АБС\,x} - 2u$

Как и в прошлый раз, для удобства отобразим $\vec{V}'_{АБС}$ относительно вертикали. Новый вектор скорости (сразу после удара) $\vec{V}_{АБС} - 2\vec{u}$. Оставшееся время падения зависит только от вертикальной проекции, а она не изменилась. Время равно $2T - t_1 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2H}{g}}$. $d = (V_{АБС\,x} + 2U)\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right) - V_{АБС\,x}\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right) = \frac{2}{3}U\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Ответ: 1) $h = \frac{5}{9}H$; 2) $t_1 = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{2H}{g}}$; 3) $d = \frac{2}{3}U\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

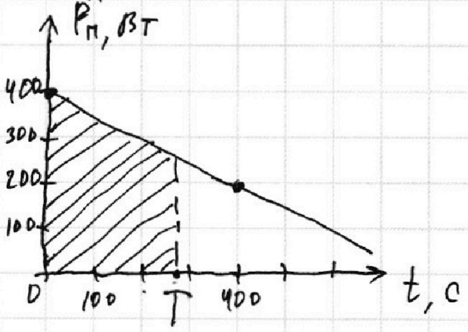
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По закону Джоуля-Ленца, выделяемая спиралью мощность $P_H = I^2 R = (5 A)^2 \cdot 20\ Ом = 500\ Вт$. $m = \rho V = 2\ кг$ — масса воды

$Q = cm(\tilde{t}_1 - \tilde{t}_0) = 4200 \frac{Дж}{кг\,°C} \cdot 2\ кг \cdot 11\ °C = 92400\ Дж$ — столько надо подвести теплоты к воде, чтобы её нагреть.

$P_H = const$, а P линейно зависит от t. полезная мощность, которая поступает к воде, $P_п(t) = P_H - P(t)$ — тоже линейная зависимость. $P_п(0\ с) = 500\ Вт - 100\ Вт = 400\ Вт$. $P_п(400\ с) = 500\ Вт - 300\ Вт = 200\ Вт$. Построим $P_п(t)$ по 2 точкам. Можно вывести урав-



нение этой прямой.

$P_п(t) = 400 - 0{,}5t$. Количество теплоты, подведённое к воде, численно равно площади под графиком (это прямоугольная трапеция) $Q(t) = \cancel{\frac{400+}{2}}\ \frac{P_п(0) + P_п(t)}{2} \cdot t = \frac{800 - 0{,}5t}{2} \cdot t = 400t - \frac{1}{4}t^2$. Решим уравнение:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Уравнение: $400t - \frac{1}{4}T^2 = 92400\cancel{0}$

$\frac{1}{4}T^2 - 400t + 92400\cancel{0} = 0$

$D = 400^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 92400\cancel{0} = 160000 - 92400\cancel{0} =$

$= 67600\cancel{0} = 260^2$

$T = \frac{400 \pm 260}{2 \cdot \frac{1}{4}}$; $T = 2(400 \pm 260)$;

$T = 280$ (с) или $T = 1320$ (с)

При $T = 1320$ с $P_п$ станет < 0, значит нас интересует первый корень уравнения (во время нагревания, а не во время остывания).

Ответ: 1) 500 Вт; 2) через 280 с.

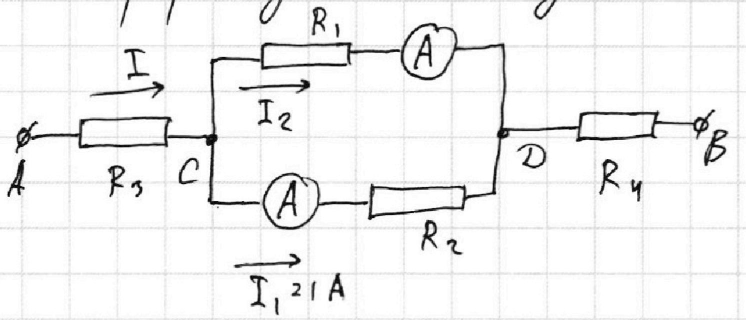
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Перерисуем схему:



$U_{CD} = I_1 R_2 = I_2 R_1 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1}{R_2}$, но из условия следует, что ~~если~~ т.к. $I_1 \neq I_2$, то $\frac{R_1}{R_2} = 2$ или $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$.

1) $\frac{R_1}{R_2} = 2 \Rightarrow R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $I_2 = 0{,}5$ A, $I = I_1 + I_2 = 1{,}5$ A. $U = IR_3 + I_1 R_2 + IR_4 =$
$= I(R_3 + R_4) + I_1 R_2 = 1{,}5\,A \cdot 60$ Ом $+ 1\,A \cdot 20$ Ом $=$
$= 110$ В

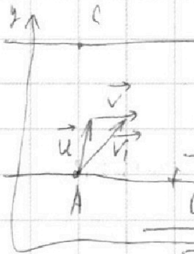
2) $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $I_2 = 2$ A, $I = I_1 + I_2 = 3$ A. $U = I(R_3 + R_4) + I_1 R_2 =$
$= 3\,A \cdot 60$ Ом $+ 1\,A \cdot 40$ Ом $= 220$ В.

Ответ: 1) $I_2 = 0{,}5$ A или $I_2 = 2$ A;
2) $U = 110$ В или $U = 220$ В.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

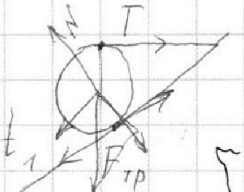
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) 

$24 \times 24 = 96 + 48 = 576$

$\vec{\Delta r} = \vec{AB}$, $\vec V_1 = \vec u + \vec V$

$\vec V_1 t_1 = \vec{\Delta r} = \cancel{\vec u t}\ (\vec u + \vec V) t_1$

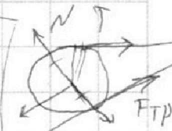


$\Delta r_x = (u_x + V_x) t_1 = (u_x + V) t_1 = BC = L$

$\Delta r_y = (u_y + V_y) t_1 = u_y t_1 = AC = d$

2) $\Delta r_x = (u_x + V_x) t_2 = (u_{x2} + V) t_2 = L$

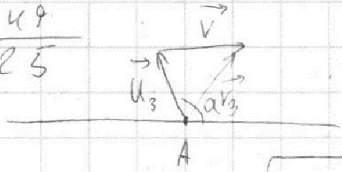
$\boxed{u_{x1} + V = \frac{L}{t_1} \quad u_{y1} = \frac{d}{t_1}}$



$\Delta r_y = u_{y2} t_2 = d$

$u_{x2} + V = \frac{L}{t_2} = V_{2x}$

$576 + 49 = 625$



$t = \frac{d}{U\sin\alpha}$

$u_{y2} = \frac{d}{t_2}$

$L' = (U\cos\alpha + V)t = \frac{U\cos\alpha\, d}{U\sin\alpha} + \frac{Vd}{U\sin\alpha}$

$u_{x1} + V = V_{1x}$, $u_{y1} = V_{1y}$, $V_1 = \sqrt{V_{1y}^2 + V_{1x}^2}$

$u^2 = u_{y1}^2 + u_{x1}^2 = u_{y1}^2 + (V_{1x} - V)^2 = u_{y2}^2 + (V_{2x} - V)^2$

$u_{y1}^2 + V_{1x}^2 - 2VV_{1x} + \cancel{V^2} = u_{y2}^2 + V_{2x}^2 - 2VV_{2x} + \cancel{V^2}$

$2V(V_{1x} - V_{2x}) = u_{y1}^2 + V_{1x}^2 - u_{y2}^2 - V_{2x}^2$

$U\cos\alpha + V = 0$

$\cos\alpha = -\frac{V}{u}$

$V = \frac{u_{1y}^2 + V_{1x}^2 - u_{2y}^2 - V_{2x}^2}{2V_{1x} - 2V_{2x}}$; $\frac{\sqrt{u^2 - V^2}}{u}$

$u_{1x} = V_{1x} - V$

$u_{y1} = \frac{d}{t_1}$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{V^2}{u^2}$

$u = \sqrt{\left(\frac{L}{t_1} - V\right)^2 + \frac{d^2}{t_1^2}}$

$d\,ctg\alpha + d\cdot\frac{V}{U\sin\alpha} = d\left(ctg\alpha + \frac{V}{U\sin\alpha}\right)$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{u^2 - V^2}{u^2}}$

$192 = 2\cdot 96 = 64\cdot 3 = 2^6\cdot 3$, $240 = 24\cdot 10 = 2^4\cdot 3\cdot 5$

$V_{1x} = \frac{2^4\cdot\cancel{3}\cdot 5}{2^6\cdot\cancel{3}} = \frac{5}{2^2} = 1{,}25$

$\frac{70}{417}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{70}{192} = \frac{2\cdot 5\cdot 7}{2^6\cdot 3} = \frac{35}{96}$

$417 = 3\cdot 139 = \frac{240}{417} = \frac{2^4\cdot 5}{139} = \frac{80}{139}$

$L^2 + d^2 = 240^2 + 70^2 = 57600 + 4900 = \underline{62500}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

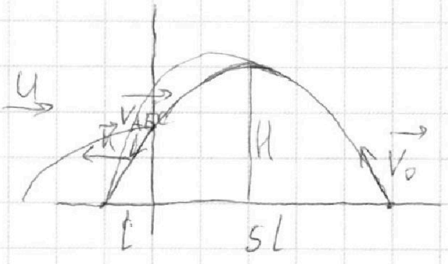
$V_1^2 - V_2^2 = \frac{62500}{192} - \frac{62500}{417} = \frac{62500(417-192)}{192 \cdot 417} =$

$= \frac{62500 \cdot 225}{192 \cdot 417}$ $42 \cdot 22 = 84 \cdot 11 = 924$ $417 - 192 = 225$

$42 \cdot 22$; $84 \cdot 11 = 924$ $26 \cdot 26 = 156$

$2(V_{1x} - v_{2x}) = 2{,}5 - \frac{160}{139}$

$2{,}5 \cdot 192 \cdot 417 - \frac{160 \cdot 192 \cdot \cancel{417}}{\cancel{139}} = 192(2{,}5 \cdot 417 - 480)$



$y: 0 + V_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$

$T_{max} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{\sqrt{2gH}}{g} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

$V_0 \sin\alpha = g T_{max}$ $\frac{-200}{400} = -0{,}5$

$V_0 \cos\alpha\, T_{max} = 3l$ $H = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$V_0 \sin\alpha = \sqrt{2gH}$; $V_0 \cos\alpha \sqrt{\frac{2H}{g}} = 3l$

$V_0 \cos\alpha\, t_1 = 5l$; $\sqrt{\frac{2H}{g}} : t_1 = \frac{3}{5}$; $t_1 = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{2H}{g}}$

$h = \frac{5}{3}\sqrt{2gH}\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{\cancel{g}}{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{\cancel{2}H}{\cancel{g}} = \frac{5}{3}\sqrt{4H^2} - \frac{25}{9}H =$

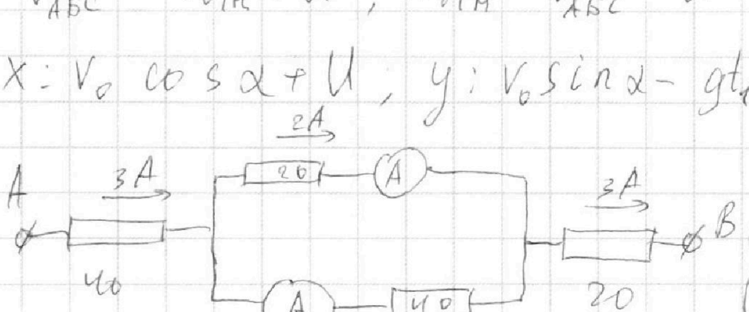
$= \frac{5}{3} \cdot 2H - \frac{25}{9}H = H\left(\frac{10}{3} - \frac{25}{9}\right) = \frac{5}{9}H$

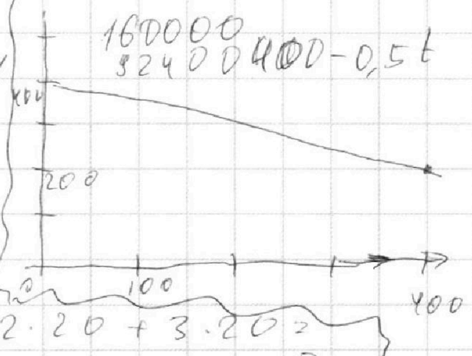
$\vec{V}_{АБС} = \vec{V}_{ОТН} + \vec{U}$, $\vec{V}_{ОТН} = \vec{V}_{АБС} - \vec{U}$

$P_H = I^2 R = 25 \cdot 20 = 500$ Вт

$X: V_0 \cos\alpha + U$, $y: V_0 \sin\alpha - g t_1$

160000
32400 $400 - 0{,}5t$





$1600 - 924 =$
$1600 - 900 - 24 =$
$= 700 - 24 = 676$

$\vec{I_1} = 1A$

$3 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 20 =$
$= 120 + 40 + 60 = 220$ В