



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1.

Обозначим за  $a_2$  макс. входящие от числа 2 в число  $a$ ;  $b_2$  - в число  $b$ ;  $c_2$  - в число  $c$ ; аналогично для  $a_3, b_3, c_3, a_5, b_5, c_5$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Тогда: } ab: 2^8 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 8 \\ \text{Аналогично: } a_3 + c_3 \geq 14 \\ b_3 + c_3 \geq 21 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 = \overline{a_2 + b_2 + c_3} \\ = \frac{(a_2 + b_2) + (b_3 + c_3) + (a_3 + c_3)}{2} \\ \geq \frac{34}{2} = \underline{17}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_3 + b_3 \geq 14 \\ a_3 + c_3 \geq 21 \\ b_3 + c_3 \geq 20 \end{array} \right\} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq \frac{14 + 21 + 20}{2} = 27,5 \neq \\ a_3 + b_3 + c_3 - \text{целое} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq \underline{28}$$

$$\overline{a_5 + b_5 \geq 11} \\ a_5 + c_5 \geq 39 \Rightarrow a_5 + c_5 + b_5 \geq \underline{39} \quad (\text{м.к. число неопр.})$$

Максим.  $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Пример:  $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$   
 $b = 2^3 \cdot 3^6$   
 $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$

$$ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}; \quad 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{22}; \quad 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{34}; \quad 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{39}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} - \text{Макс.}$$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2}(\cdot)$$
$$= F\left(a\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sqrt{\frac{2}{7}}; a\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = F\left(\frac{2}{7}a; \frac{\sqrt{10}}{7} \cdot a\right)$$

~~$$FM = \sqrt{14 - \frac{4}{49}a^2} \cdot r - \frac{10}{49}a = r \Rightarrow$$~~  
~~$$\Rightarrow 14 -$$~~

$$FM = \sqrt{\left(14 - \frac{2}{7}a\right)^2 + \left(r - \frac{\sqrt{10}}{49}a\right)^2} = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 196 - \frac{4}{7}a \cdot 14 + \frac{4}{49}a^2 + r^2 -$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3 (1)

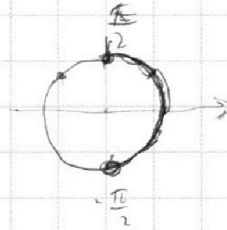
$$10 \arcsin(\cos(x)) = \pi - 2x$$

$$t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t$$

$$5 \arcsin(\sin(t)) = t$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\sin(t)) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-1,5\pi \leq t \leq 1,5\pi$$



$$\left\{ \begin{array}{l} -2,5\pi \leq t \leq -1,5\pi, \\ 5 \cdot (t + \pi) = t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1,5\pi < t \leq -0,5\pi \\ 5 \cdot (-\pi - t) = t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -0,5\pi < t \leq 0,5\pi \\ 5 \cdot t = t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,5\pi < t \leq 1,5\pi \\ 5 \cdot (\pi - t) = t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,5\pi < t \leq 2,5\pi \\ 5 \cdot (t - 2\pi) = t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2,5\pi \leq t \leq -1,5\pi, \\ t = -2,5\pi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1,5\pi < t \leq -0,5\pi \\ t = -\frac{5}{6}\pi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -0,5\pi < t \leq 0,5\pi, \\ t = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,5\pi < t \leq 1,5\pi \\ t = \frac{5}{2}\pi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,5\pi < t \leq 2,5\pi, \\ t = 2,5\pi \end{array} \right.$$

$$x = \frac{\pi}{2} - t;$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3 (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3\pi, \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}, \\ x = \frac{\pi}{2}, \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}, \\ x = -2\pi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3\pi, \\ x = \frac{4\pi}{3}, \\ x = \frac{\pi}{2}, \\ x = -\frac{1}{3}\pi, \\ x = -\pi \end{array} \right.$$

Ответ:  $\left\{ -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

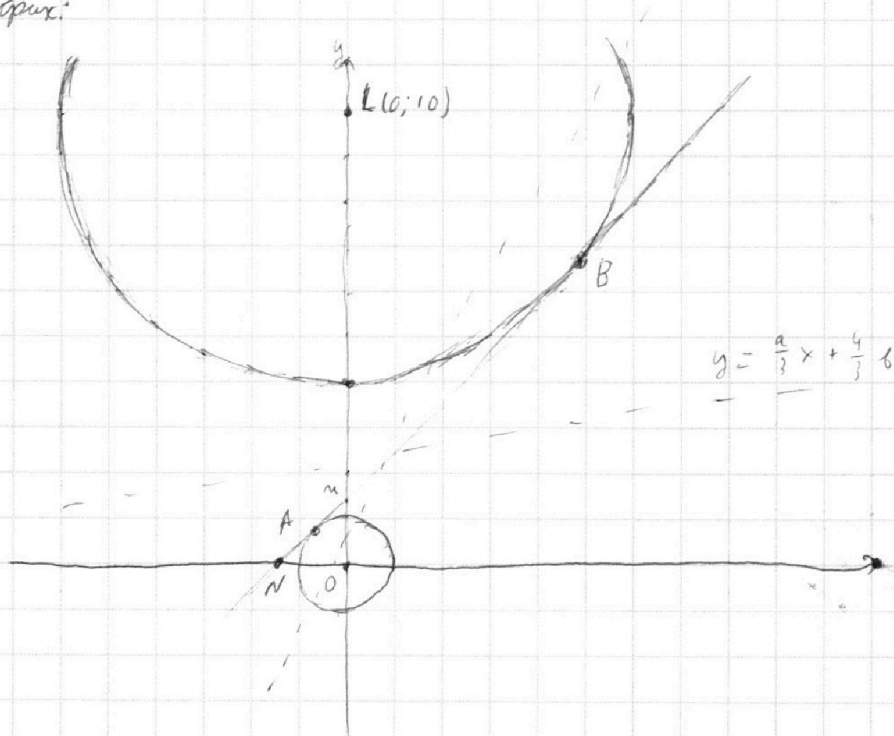
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4. (1)

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 7)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b, \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 7, & \text{— окружность радиуса } \sqrt{7} \text{ с центром } O(0; 0) \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 & \text{— окр. с ради } 6 \text{ и центром } L(0; 10) \end{cases} \end{cases}$$

График:



Чтобы ур-е имело 4 корня, необходимо, чтобы прямая пересекала окружности по 2 разам. Окружности не пересекаются.

Найти корень  $a$ , при  $a \geq 0$ , при кот. прямая может их касаться внутри образои:

Точки касания с нижней окр. — А; с верхней — В; с  $O_y$  — М.

$$\left. \begin{aligned} \angle OAM = \angle MBL = 90^\circ \\ \angle AMO = \angle LMB \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle LBO \sim \triangle LBM \text{ и } \triangle AMO \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4(2)

$$\Rightarrow LM/MO = LB/AO = 6/1$$

$$LM + MO = LO = 10$$

$$7MO = 10$$

$$MO = \frac{10}{7}$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$N$ -касательная к окружности. Упр.  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$  с  $O_k$ .

$\Delta NMO$  с  $\Delta OAM$  (по 2 угл.)

$$\begin{aligned} \frac{a}{3} &= \operatorname{tg}(\angle \text{при } NMO) = \operatorname{tg}(\angle AOM) = \\ &= \frac{AM}{AO} = \frac{\sqrt{51}}{7} \end{aligned}$$

$$a = \frac{3\sqrt{51}}{7}$$

Если  $a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$ , то касательная к окружности в 2 точках касания  $\Rightarrow$  4 касания.

Каждая касательная пересечет окружность в 2 точках касания  $\Rightarrow$  4 касания.

Если  $a \leq \frac{3\sqrt{51}}{7}$  и касательная не касательная к окружности, то она

не пересечет окружность в 2 точках  $\Rightarrow$   $\leq$  4 касания.

Значит при  $a \geq 0$  4 касания может быть при  $a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$

Окружность симметрична относительно  $O_y$  (касательная сама себе)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  для  $a \leq 0$  4 касания только при  $a < -\left(\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \Rightarrow \begin{cases} a < -\frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \end{cases}$

Ответ: при  $(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(7):  $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x}(5) = \log_{0,2}(6,5) - 3$   $2x > 0,$   
 $2x \neq 1$

$$(\log_5(2x))^4 - 3 \cdot \frac{1}{\log_5(2x)} = \log_{2x} 5^{-\frac{4}{3}} - 3$$

$t_x = \log_5(2x); \quad 2x \neq 1 \Rightarrow t_x \neq 0$

$$t_x^4 - 3 \cdot \frac{1}{t_x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5(2x)} - 3$$

$$t_x^4 - \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{t_x} + 3 = 0$$

$t_x \neq 0$

$$t_x^5 + 3t_x = \frac{13}{3}$$

(2):

$$\log_5^4(y) + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$$
  $y > 0,$   
 $y \neq 1$

$$(\log_5(y))^4 + 4 \log_y 5 = \log_y(5^{-\frac{1}{3}}) - 3 \quad \left| \log_y 5^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \log_y 5 \right.$$

$t_y = \log_5(y); \quad y \neq 1 \Rightarrow t_y \neq 0$

$$t_y^4 + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 y} = -3$$

$t_y \neq 0$

$$t_y^5 + 3t_y = -\frac{13}{3}$$

$$t_y^5 + 3t_y + t_x^5 + 3t_x = -\frac{13}{3} + \frac{13}{3}$$

$$(t_y + t_x)(t_y^4 - t_y^3 t_x + t_y^2 t_x^2 - t_y t_x^3 + t_x^4 + 3) = 0$$

$$t_y^4 - t_y^3 t_x + t_y^2 t_x^2 - t_y t_x^3 + t_x^4 > 0 \Rightarrow \pm \text{сходится } > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_y + t_x = 0$$

$$\log_5(2x) + \log_5(y) = 0$$

$$\log_5(2xy) = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = 0,5. \text{ Ответ: } xy = 0,5$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6 (1)

пар-ма, бюджет ~~или~~ удовлетворяет равенству  $\Rightarrow$  бюджет  $b$

искомой макс-ве  $\Rightarrow$  это макс-ва точек яв-ся искомыми.

Рассмотрим прямую  $y = -5x + b_0$  и найдём кол-во

точек внутри пар-ма.

Прямая пар-ма боковой стороны  $[-5 = -5]$

~~Если  $b_0 \leq 0$ , то прямая не пересекает~~

левая грань пар-ма:  $y = -5x$ , т.к.  $\begin{cases} 0 = -5 \cdot 0 \\ 10 = -5 \cdot (-10) \end{cases}$

правая грань пар-ма:  $y = -5x + 90$ , т.к.  $\begin{cases} 80 = -5 \cdot 2 + 90 \\ 0 = -5 \cdot 18 + 90 \end{cases}$

а 2 точки ограничены заданной прямой.

Значит, если  $b_0 < 0$  или  $b_0 > 90$ , то прямая лежит выше или

ниже пар-ма  $\Rightarrow$  не пересекает его  $\Rightarrow$  0 искомым точек.

Если  $b_0$  не целое, то  $\forall x_i \in \mathbb{Z}$ ,  $y_i = -5 \cdot x_i + b_0$  - нецелое  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  0 искомым точек.

Значит, все искомые точки - на прямой с  $b_0 \in \mathbb{Z}$ ;  $0 \leq b_0 \leq 90$ .

Докажем, что если  $b_0 : 5$ , то кол-во обычных точек равно 17, а если не делится, то равно 16.

~~Найдём точки  $\forall b_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq b_0 \leq 90$ , найдём  $f(x, y)$ :~~

~~$x_i \in \mathbb{Z}$ ;  $y_i \in \mathbb{Z}$ ;  $y_i = -5 \cdot x_i + b_0$ . Решим систему,~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6(3)

прямая - между бою. гранями  $\Rightarrow$  пересечение бюджет, прямой

~~прямая - между бою. гранями пересечение бюджет содержит точки~~

~~и не может с целой 16 точек~~ прямая отрезка пересе-

чения на  $Oy$  - ~~прямая~~ отрезок  $OM$ , где  $O(0;0)$   $M(0;80)$ ,

т.к. верхняя и нижняя грани  $\parallel Oy$ ; бою. грани прямой.

Если  $b_0 \equiv 0$ , то на отрезке  $0..80$  находится 17

точек, совпадающих с  $b_0$  по модулю 5; Итого при целом  $b_0$  их

кол-во - 16, т.к.  $(80-0)/5 = 16$ ;  $80:5$ ;  $0:5$ .

Для каждой точки, лежащей на нижней прямой, ~~если~~ (точка

$A(x_1; y_1)$  если  $y_1 \equiv b_0$ , то  $y_1$  точки целые координаты, т.к.

$y_1 \in \mathbb{Z}$ ;  $x_1 = 0 + \frac{y_1 - b_0}{-5}$  - целое число  $(y_1 - b_0 : 5)$ , а

если  $y_1 \not\equiv b_0$ , то  $x_1 \notin \mathbb{Z} = 0 + \frac{y_1 - b_0}{-5}$  - нецел.  $(y_1 - b_0 : 5)$ .

Итого, кол-во таких точек 16, если  $b_0 : 5$  и 17, если  $b_0 \not: 5$ .

Для 2 прямой  $y = -5x + b_0$  и  $y = -5x + b_0 + 45$  если

$b_0 > 45$ , то  $b_0 + 45 > 90 \Rightarrow$  нет ~~еще~~ иск. точек.

Если  $b_0 : 5$ , то  $b_0 \neq 45 : 5 \Rightarrow 17 - 17 = 2 \Rightarrow$  нет

точек. иначе  $b_0 \not: 5$ ,  $b_0 + 45 : 5 \Rightarrow 16 - 16 = 256$  нет

точек. Точки не совп., т.к.  $y$  разные;  $x = \frac{y-b}{-5}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sim B(4)$

Итого, ответ на задачу  $\sum_{b_0=0}^{45} \left( \begin{matrix} 77, b_0 \cdot 15 \\ 16, b_0 \cdot 15 \end{matrix} \right)$ , м.к.  $\begin{cases} b_0 \geq 0 \\ b_0 \leq 40 \\ b_0 \cdot 15 \geq 20 \\ b_0 \cdot 15 \leq 90 \end{cases}$

Жел - 60 тысяч от 0, 45, сумма на 5 -

- 10 млн (45/15) все деньги - 46 - 10 = 36

Итого, ответ:  $10 \cdot 289 + 36 \cdot 256 = 2890 + 9216 =$   
 $= 12106$

Ответ: 12106



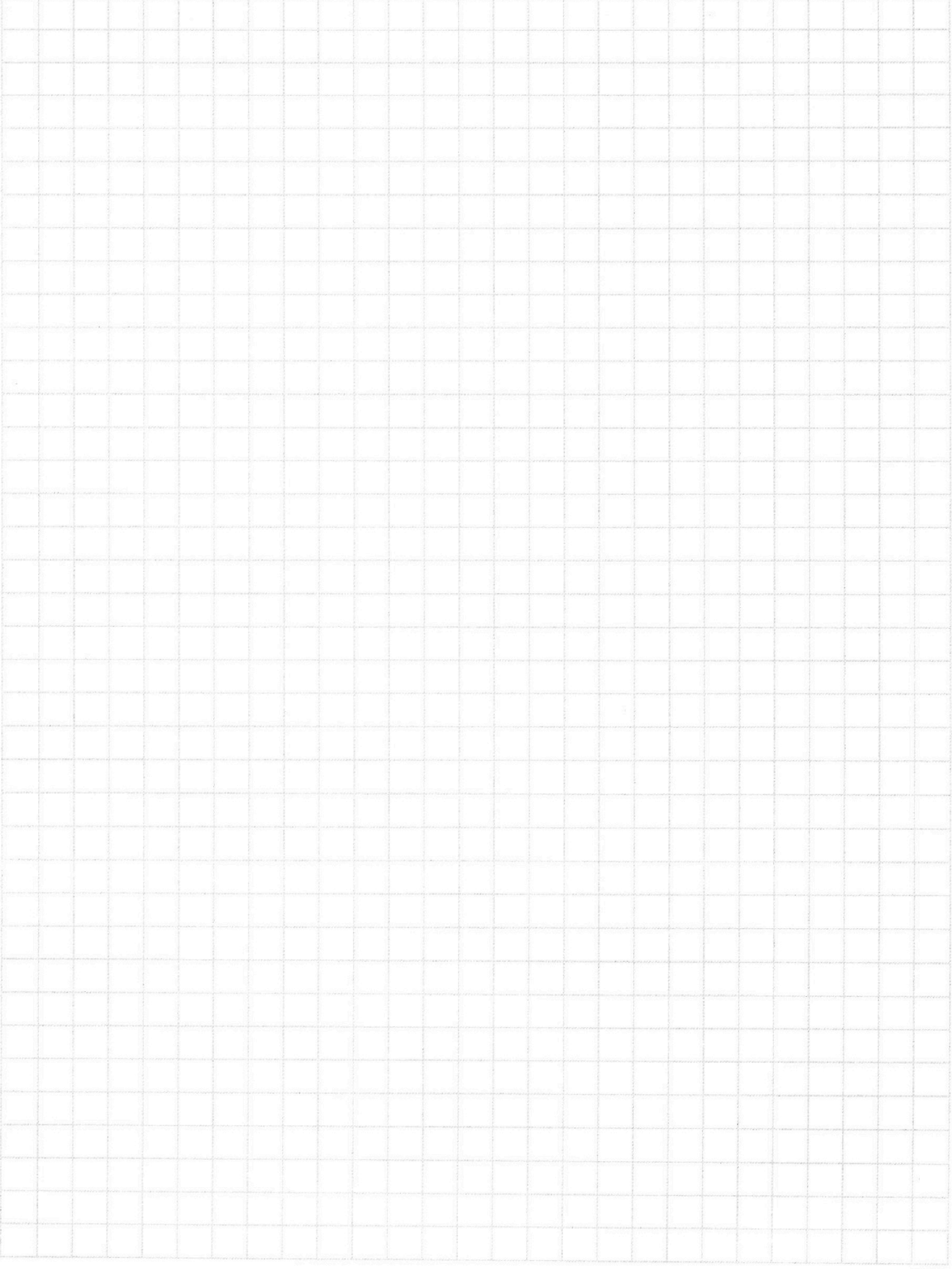
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



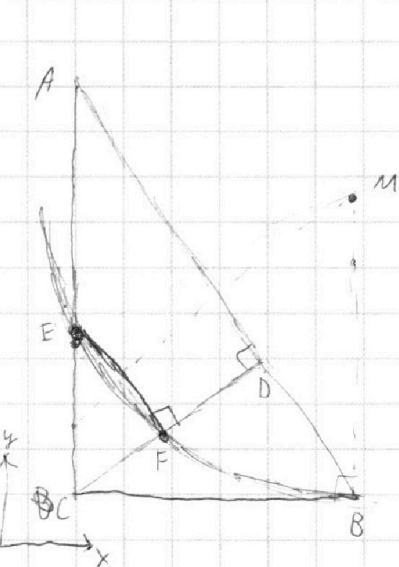
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2, (1)

$$EF \parallel AB \perp CD \Rightarrow EF \perp CD$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CAD \text{ (по 2 угла)}$$

$$\triangle CAD \sim \triangle ABC \text{ (по 2 угла)}$$

$$S(\triangle CAD) = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot \frac{5}{7} AB = \frac{5}{7} S(\triangle ABC)$$

Пусть  $AB = 7x$ . Тогда  $AD = 5x$ ,  $DB = 2x$ ,  $CD = \sqrt{AD \cdot DB} =$   
 $= \sqrt{10}x$ ;  $CB = x \cdot \sqrt{10+4} = \sqrt{14}x$ ;  $AC = x \cdot \sqrt{10+25} =$   
 $= \sqrt{35}x$

Введем систему координат  $(0;0)$ ;  $CB \uparrow \uparrow Oy$ ;  $CA \uparrow \uparrow Ox$ ;

длины сторон  $= x$ . Тогда  $B(\sqrt{14}; 0)$ ;  $A(0; \sqrt{35})$

$M$  - центр осп.  $\triangle EFB$ .  $CB$  - ~~радиус~~ касан  $\Rightarrow \angle MBC = 90^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow MB \parallel AC \Rightarrow$  если радиус  $= r$ , то  $M(\sqrt{14}; r)$

Пусть  $EC = a$ . Тогда  $E(0; a)$ .  $EM = \sqrt{(r-a)^2 + 14} = r \Rightarrow$   
 $\Rightarrow r^2 - 2ra + a^2 + 14 = r^2 \Rightarrow 2ra = a^2 + 14$

$$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \frac{5}{7} \overrightarrow{AB} = D\left(\frac{5}{7} \sqrt{14}; \frac{2}{7} \sqrt{35}\right)$$

$$\cos \angle DCB = \frac{DC}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$\sin \angle DCB = \sqrt{1 - \frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle ABC \sim \triangle CDB \Rightarrow CF = CE \cdot \sin \angle CEF = a \cdot \sin \angle DCB =$$
  
 $= a \cdot \sqrt{\frac{2}{7}} \Rightarrow F = C + \overrightarrow{CF} = F\left(a \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \cos \angle DCB; a \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \sin \angle DCB\right)$



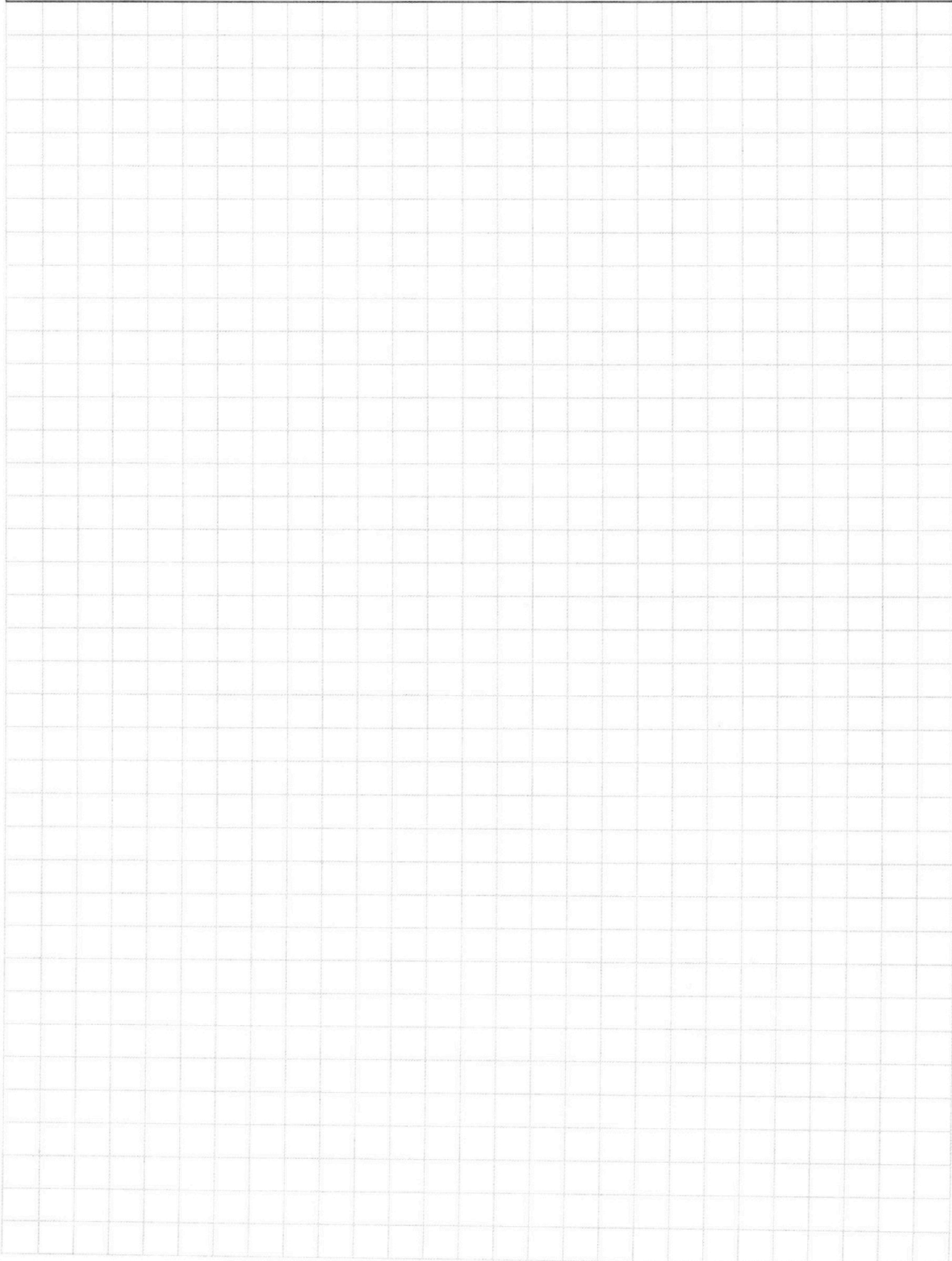
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a_1 + b_2 \geq 8; \quad a_2 + c_2 \geq 14$$

$$b_2 + c_2 \geq 12$$

$$8 + 12 + 14$$

$$c_2 - b_2 = 6$$

$$a_2 - b_2 = 2$$

$$a_2 = 8$$

$$b_2 = 6$$

$$c_2 = 9$$

$$a + b = 14$$

$$b + c = 20$$

$$a + c = 23$$

$$a - b = 2$$

$$a_3 = 8$$

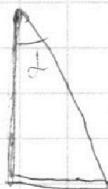
$$b_3 = 6$$

$$c_3 = 14$$

$$\arcsin(\cos x) =$$

$$= \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - x$$



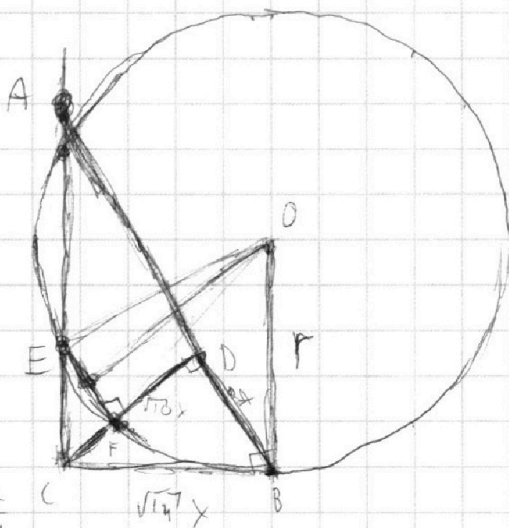
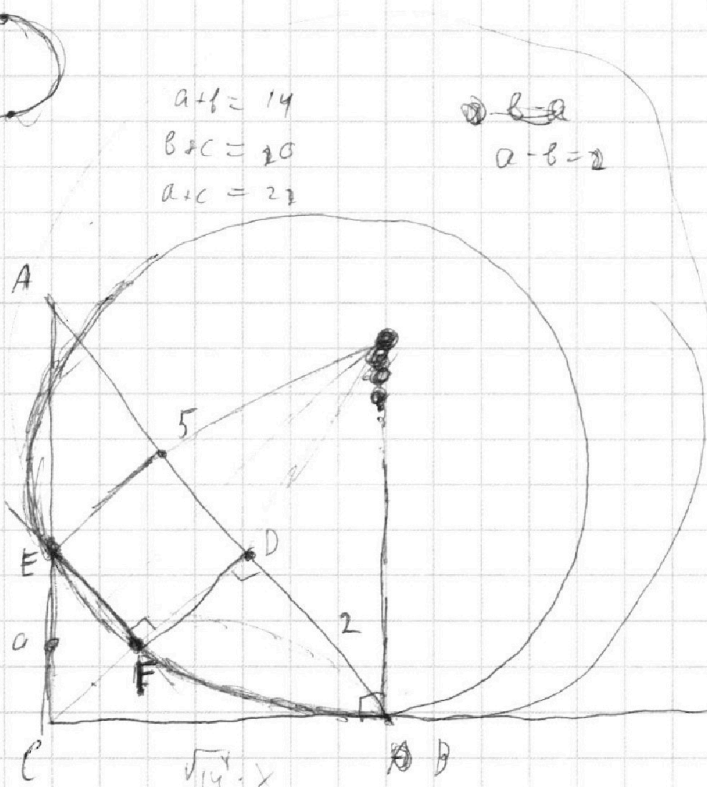
$$AD \cdot DB = CD^2 = 10x^2$$

$$CD = \sqrt{10} \cdot x$$

$$CB = \sqrt{14} \cdot x$$

$$AC = \sqrt{35} \cdot x$$

$$\frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$



$$(r - EC)^2 + (CB)^2 = r^2$$

$$r^2 - 2r \cdot EC + EC^2 + 14x^2 = r^2$$

$$EC^2 + 14x^2 = 2r \cdot EC$$

$$r = \frac{a^2 + 14}{2a}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{7}{a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$(x^2 + y^2 = 1)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 17 \\ \hline 12 \\ \hline 116 \\ \hline 17 \\ \hline 200 \end{array}$$

$$-\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi$$

$$-4\pi \leq 2x \leq 6\pi$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$$

$$\log_5^4(2x)$$

$$-2\pi \leq x \leq \pi$$

$$y = -5x + b_0$$

$$5 \arcsin(\sin(t)) = t$$

$$-5x = y - b_0$$

$$x = y - b$$

$$-1,5$$



$$-0,5\pi \leq -t \leq 1,5\pi$$

$$1,5\pi \leq \pi - t \leq 2,5\pi$$

$$-0,5\pi \leq -\pi - t \leq 0,5\pi$$

$$4t = -10\pi$$

$$t = -2,5\pi$$

$$-5\pi - 5t = t$$

$$6t = -5\pi$$

$$t = -\frac{5\pi}{6}$$

$$|y - 10|^2 = y^2 - 20y + 100$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

$$a_1 = \frac{a}{3}$$

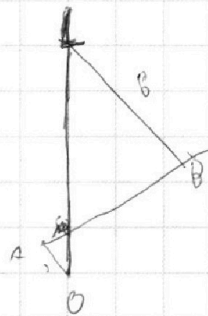
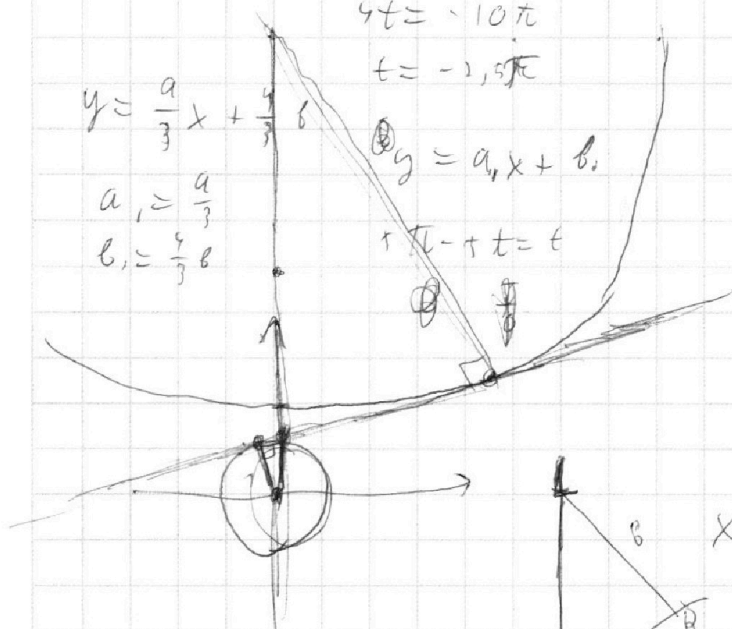
$$b_1 = \frac{4}{3}b$$

$$y = a_1x + b_1$$

$$\pi - t = t$$

$$\frac{7}{2} + \frac{5}{6} = \frac{3+5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$



$$x^2 + (y - 10)^2 = 100$$

$$AO \sim MBL$$

$$AO = 1; LB = 6$$

$$LM + MO = 10$$

$$7 \cdot MO = 10$$

$$AM = \sqrt{\frac{100 - 49}{49}} = \sqrt{\frac{51}{49}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$MO = \frac{10}{7}$$

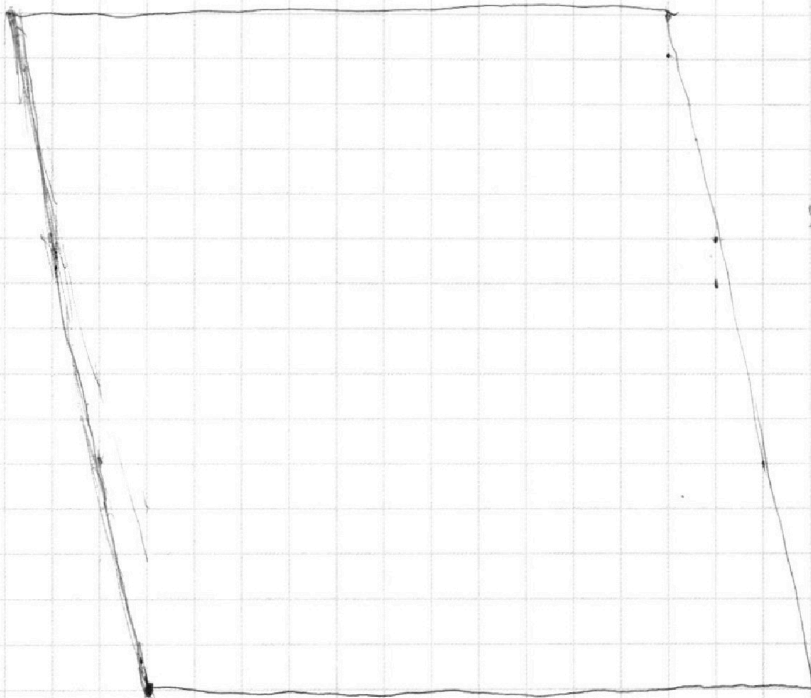
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -5x + 8$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$5x_2 + y_2 - 8 = 45$$

$$y_2 = -5x_2 + 8 + 45$$

$$A(\sqrt{32}, 8)$$

$$B(\sqrt{14}, 0)$$

$$E(0; a)$$

$$(r-a)^2 + 14 = r^2$$

$$-2ra + a^2 + 14 = 0$$

$$a^2 + 14 = 2ra$$

$$D\left(\frac{2}{7}\sqrt{14}; \frac{2}{7}\sqrt{35}\right)$$

$$F_y / F_x = \frac{2}{7} \sqrt{35} \cdot \frac{7}{5 \cdot \sqrt{14}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\left(\sqrt{14} - \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot a \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 +$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 38 \\ \times 256 \\ \hline 1536 \\ 768 \\ \hline 9216 \\ + 2890 \\ \hline 12106 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 5 \rightarrow \frac{4}{3} \log_{2x} \left( \frac{5}{5 \cdot 3 \cdot 5} \right) - 3$$

$$\left( \frac{\log 2x}{\log 5} \right)^4 - 3 \left( \frac{\log 5}{\log 2x} \right) = \frac{4}{3} \left( \frac{\log 5}{\log 2x} \right) - 3$$

$$t = \log_5(2x)$$

$$t^4 - 3 \cdot \frac{1}{t} - \frac{4}{3} \left( \frac{1}{t} \right) + 3 = 0$$

$$3t^4 - 13 \frac{1}{t} = 0 \rightarrow$$

$$3t^5 + t = 13/3$$

$$t^5 + 3t = \frac{13}{3}$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 y = \log_5^3 5 - 3$$

$$\log_5^3 5^{-1} = \log_5^3 5^{-3} = -\frac{1}{3} \log_5 5$$

$$\left( \log_5 y \right)^4 + 4 \left( \frac{1}{\log_5 y} \right) = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{\log_5 y} \right) - 3$$

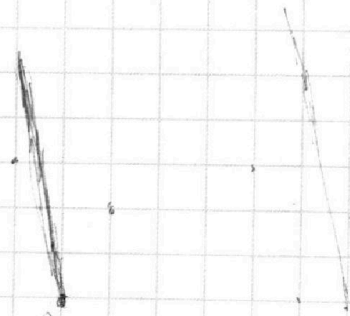
$$t_y = \log_5(y)$$

$$t_y^5 + 4 \frac{1}{3} + 3 t_y = 0$$

$$t_y^5 + 3 t_y = -\frac{13}{3}$$

$$t_x^5 + 3 t_x - t_y^5 - 3 t_y = 0$$

$$(t_x - t_y) \left( t_x^4 + t_x^3 t_y + t_x^2 t_y^2 + t_x t_y^3 + t_y^4 \right) + 3 = 0$$



$x = 5$

$$5(x - x_0) + (y - y_0) = 95$$

$$y_x = -5(x - x_0) + y_0 + 95$$

x: y