



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



- √ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- √ 2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- √ 3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- √ 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1. $ab = 2^8 3^{14} 5^{12} \Rightarrow ab = 2^8 3^{14} 5^{12} k, \text{ где } k \in \mathbb{N};$

$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17} \Rightarrow bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17} m, \text{ где } m \in \mathbb{N};$

$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} \Rightarrow ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} c, \text{ где } c \in \mathbb{N};$

Перемножим ab, bc и ac : $(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} kmc; \Rightarrow$

$\Rightarrow abc = \sqrt{2^{34} 3^{55} 5^{68} kmc} = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{3kmc};$

Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{3kmc} \in \mathbb{N}$; Т.к. мы ищем
наим. знач. abc , то kmc - наим. множитель, при котором
 $3kmc$ - полный квадрат \Rightarrow т.к. $k, m, c \in \mathbb{N}$, то $kmc = 3$ и
достигается, к примеру, при $k=3$ и $m=c=1 \Rightarrow \sqrt{3kmc} = 3$ и
 $\min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34};$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34};$

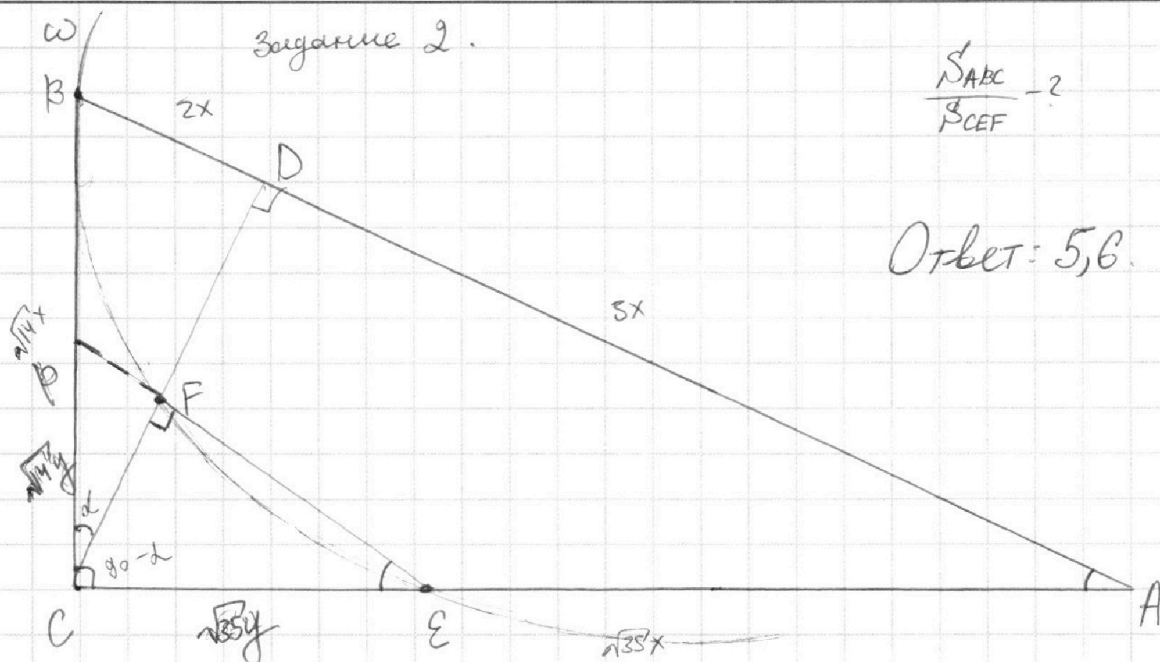
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Ответ: 5,6.

Решение: $AD:DB = 5:2 \Rightarrow$ пусть $AD = 5x; DB = 2x; \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{10}x$ (высота, опущенная из вершины C на гипотенузу равна ср. геом. между катетами, на которые она делит гипотенузу)

Тогда по т. Пифагора из $\triangle CDA$ и $\triangle CDB \Rightarrow AC = \sqrt{35}x; BC = \sqrt{14}x;$

Продлим $FE \cap BC = F$; т.к. из условия $FE \parallel AB$, то и

$FC \parallel AB \Rightarrow \angle CFE = \angle B; \angle CEF = \angle A$ и $CF \perp FE$, где BC, CD и AC - секущие к паралл. пр. FE и AB ; ~~Решение~~ Аналогично по

3-м углам подобны $\triangle FCE$ и $\triangle ABC$; Тогда пусть $CE = \sqrt{35}y$ и $FC = \sqrt{14}y$, где $k = \frac{y}{x}$ - коэф. подобных тр-ников;

Из $\triangle FPC$ и $\triangle FED$: $\angle F = \angle D = 90^\circ$ и $\angle C$ - общ. \Rightarrow эти треугольники с коэф. $k = \frac{CF}{CD} = \frac{y}{x} \Rightarrow PF = 2y$; Аналогично из $\triangle CFE$ и $\triangle CDA$:

$FE = 5y$; т.к. CF - касат. к окружности, а $FE \cap \omega = F$ и E ,

где ω - окр. из условия, то верно след.: $FB^2 = PF \cdot FE \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sqrt{14}(x-y))^2 = 2y \cdot 5y \Rightarrow 14(x-y)^2 = 10y^2 \Rightarrow 7(x-y)^2 = 5y^2$; При $x=0$ тр-ник не существует ($BA=0$);

Отним. площади: $S_{ABC} = AC \cdot BC = 7\sqrt{10}x^2$; $x=0$; При $2y=x$ не существует

$S_{CEF} = \frac{CF \cdot FE}{2} = \frac{\sqrt{14}y \cdot 5y}{2} = \frac{5\sqrt{14}y^2}{2} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{7\sqrt{10}x^2}{\frac{5\sqrt{14}y^2}{2}} = \frac{14}{5} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{28}{5} = 5,6$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3. $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$;

Аргумент \arcsin 'а определен на $[-1; 1]$, что верно

$\forall x$ для $\cos x$; Если \arcsin принимает значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \Rightarrow -2\pi \leq x \leq 3\pi$;

Тогда исходные уравнение равносильно след. системе:

$$\begin{cases} \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right); \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right); \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = 0; \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}}{2}\right) = 0; \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2x}{5}\right) = 0; \\ \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{3x}{5}\right) = 0; \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{5} - \frac{2x}{5} = \pi k; \\ \frac{3\pi}{10} - \frac{3x}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} k, k \in \mathbb{Z}; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}(1 - 5k); \\ x = -\frac{\pi}{3}(1 + 5k); \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi; \end{cases} k, k \in \mathbb{Z}; \Rightarrow \begin{cases} x = 3\pi; -2\pi; \frac{\pi}{2}; \\ x = 3\pi; -2\pi; \frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi \right\};$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



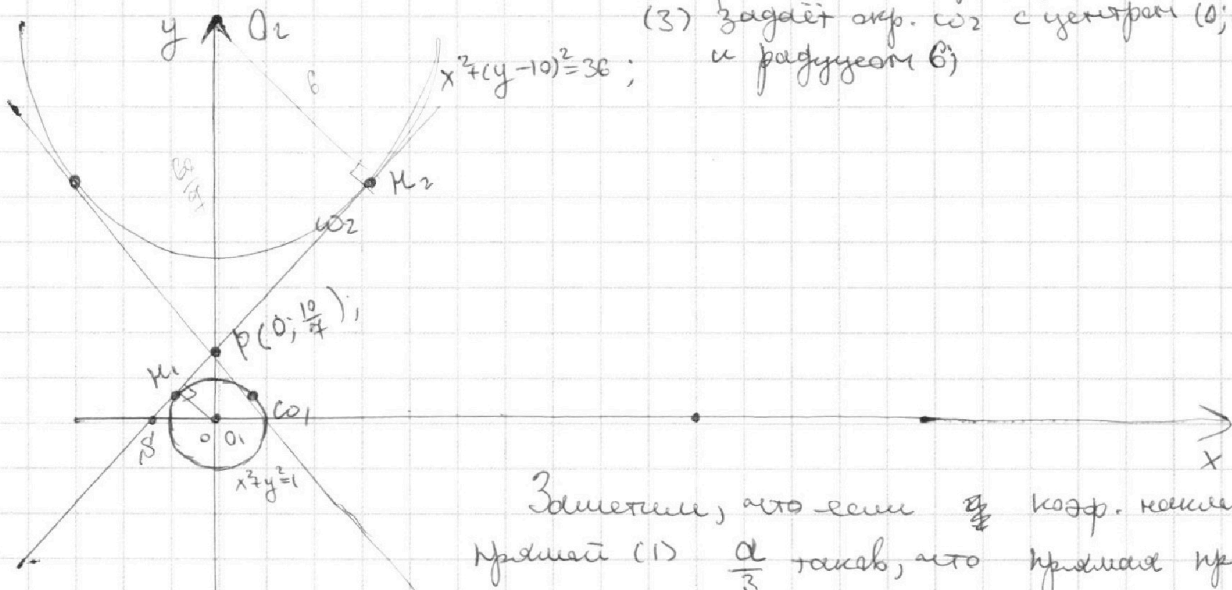
Задача 4.

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0; \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2ay + 6b) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{ax + 4b}{3}; & (1) \\ x^2 + y^2 = 1; & (2) \\ x^2 + (y - 1)^2 = 3b; & (3) \end{cases}$$

Изобразим систему на плоскости xOy :

(2) задаёт окр. ω_1 с центром $(0; 0)$ и радиусом 1;
(3) задаёт окр. ω_2 с центром $(0; 1)$ и радиусом $\sqrt{3b}$.



Заметим, что если $\frac{a}{3}$ коэф. наклона прямой (1) $\frac{a}{3}$ таков, что прямая при

определённом значении b является общей касат. к ω_1 и ω_2 , то она не имеет более 2 пересечений с (2) и (3) в совокупности: либо она пересекает окружность ω_1 , или ω_2 , а оставшуюся окр. не пересекает вовсе; либо же является общей касат. и задаёт две точки касания; Заметим, если

модуль коэф. наклона растёт до $+\infty$, соответственно, то, будучи в положении, где касалась общей касат., какая прямая будет иметь уже 4 решения, то есть 4 нуля; Но если модуль $\frac{a}{3}$ коэф. наклона будет уменьшаться до нуля, то 4 решения не будет никогда, т.к. не найдётся ни при каком b такой прямой, которая была бы общей касат. \Rightarrow если общие касат. (см. рис.) имеют уже наклон k и $-k$, где $k > 0$, то решение существует при $\frac{a}{3} \in (-\infty; -k) \cup (k; +\infty)$; Найдём k :

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Имеем ~~на~~ в СК также O_2, O_1 - центры окруж. ω_2 и ω_1 соответственно;
 K_2 и K_1 - основания перпен., опущенные из O_2 и O_1 соответственно.
 на прямую с коэф. наклона k ; $P = K_1 K_2 \cap O_y$; Пусть
 $O_2 P = \tilde{a}$; $O_1 P = \tilde{b}$; ~~$O_2 P = \tilde{a}$~~ $\tilde{a} + \tilde{b} = 10$, т.к. $O_2(O; 10)$;

$O_2 K_2 \perp K_1 K_2$ и $O_1 K_1 \perp K_1 K_2 \Rightarrow O_2 K_2 \parallel O_1 K_1$ и $\angle K_1 P O_1 = \angle O_2 P K_2$ как
 вертикальные $\Rightarrow \triangle O_2 K_2 P \sim \triangle O_1 K_1 P$ по 3-м углам и тогда:

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{8}{1} \Rightarrow \tilde{a} = 8\tilde{b} \Rightarrow 8\tilde{b} + \tilde{b} = 10 \Rightarrow \tilde{b} = \frac{10}{9} \text{ и } \tilde{a} = \frac{80}{9}; \Rightarrow$$

\Rightarrow прямая с коэф. наклона k имеет вид: $y = kx + \frac{10}{9}$, где

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{10}{9} \Rightarrow b = \frac{30}{28} = \frac{15}{14};$$

Заметим ~~связь~~ ~~между~~ ~~из~~ ~~расстояний~~ $K_1 O_1$ и $K_1 P$ ~~функции~~,
 что $K_1 P = \sqrt{O_1 P^2 - O_1 K_1^2} =$

По т. Пифагора $K_1 P = \sqrt{O_1 P^2 - O_1 K_1^2} = \sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$; Тогда

~~чрез~~ $\text{tg} \angle K_1 P O_1 = \frac{K_1 P}{K_1 O_1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$, но $\triangle S P O_1 \sim \triangle K_1 O_1 P$, где $S =$

$= O_x \cap K_1 K_2 \Rightarrow \angle K_1 O_1 P = \angle S \Rightarrow \text{tg} \angle K_1 O_1 P = \frac{\sqrt{51}}{7} = \text{tg} \angle S$, но

$\text{tg} \angle S$ и есть угл наклона ~~пр~~ общей касат. с коэф.

$k > 0 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{51}}{7}$ и 4 решения формируются при ~~$k < 0$~~

$$\alpha = \frac{3\sqrt{51}}{7};$$

$$\alpha \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty);$$

Ответ: $(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty);$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5. Пусть $2x = v \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_5^4 v - 3 \log_5 v = \log_5^3 625 - 3; \\ \log_5^4 y + 4 \log_5 y = \log_5^3 0,2 - 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^4 v - \frac{3}{\log_5 v} = \frac{4}{3 \log_5 v} - 3; \\ \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{1}{3 \log_5 y} - 3; \Rightarrow \\ v > 0; \\ y > 0; \\ v \neq 1; y \neq 1; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_5^4 v = \frac{13}{3 \log_5 v} - 3; \\ \log_5^4 y = \frac{-13}{3 \log_5 y} - 3; \\ v, y > 0; \\ v, y \neq 1; \end{cases} \quad \text{Пусть } \log_5 v = a \text{ и } \log_5 y = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^4 = \frac{13}{3a} - 3; \quad (1) \\ b^4 = \frac{-13}{3b} - 3; \quad (2) \\ v, y > 0; \\ v, y \neq 1; \end{cases} \Rightarrow$$

из (1) и (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0; \quad (1) \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0; \quad (2) \end{cases} \xrightarrow{\text{из (1)+(2)}} 3(a^5 + b^5) + 9(a + b) = 0; \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v, y > 0; \\ v, y \neq 1; \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(a+b)(a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4 + 3) = 0;$$

$$\begin{cases} a+b=0; \quad (1) \\ a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4 + 3 = 0; \quad (2) \end{cases}$$

$$(1): a+b=0 \Rightarrow \log_5 v + \log_5 y = 0 \Rightarrow v y = 1 \Rightarrow 2xy = 1 \text{ и } \boxed{xy = \frac{1}{2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \operatorname{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x;$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsin}(\cos x) \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2};$$

$$K_1(x_0; y_0);$$

$$1 = x_0^2 + y_0^2;$$

$$x_0^2 + (y_0 - \frac{10}{4})^2 = \frac{36}{49}$$

$$-1 = \frac{-20}{4} y_0 + \frac{100}{4} \Rightarrow \frac{100}{49} - \frac{49}{49} = \frac{36}{49} \left(1 - \frac{51}{49}\right);$$

$$\begin{cases} \frac{7}{10} = y_0 \\ x_0 = \frac{\sqrt{51}}{10} \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{51}{49}}$$

$$\frac{49}{100}$$

$$\left. \begin{cases} \sin\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{5x}{5} - \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{5x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2x}{5}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{3x}{5}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{5} - \frac{2x}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\pi}{10} - \frac{3x}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{5} - \pi k \\ 3x = \frac{3\pi}{10} - \frac{5\pi}{10} - \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi - 5\pi k}{2} \\ x = \frac{-\pi - 5\pi k}{3} \end{cases}$$

$$-2\pi \leq \frac{\pi - 5\pi k}{2} \leq 3\pi;$$

$$-4\pi \leq \pi(1 - 5k) \leq 6\pi;$$

$$-4 \leq 1 - 5k \leq 6;$$

$$-5 \leq -5k \leq 5;$$

$$-1 \leq -k \leq 1;$$

$$-1 \leq k \leq 1;$$

$$k = -1; 0; 1 \Rightarrow x = 3\pi; \frac{\pi}{2}; -2\pi;$$

$$-2\pi \leq \frac{-\pi - 5\pi k}{3} \leq 3\pi$$

$$-6\pi \leq -\pi(1 + 5k) \leq 9\pi$$

$$-9 \leq (1 + 5k) \leq 6$$

$$-10 \leq 5k \leq 5 \Rightarrow -2 \leq k \leq 1;$$

$$k = -2; -1; 0; 1 \Rightarrow x = 3\pi; \frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; -2\pi;$$

$$x = -\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; -2\pi; 3\pi;$$

$$\operatorname{arcsin}(\cos(3\pi)) = \pi - \frac{6\pi}{10} = -\frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2};$$

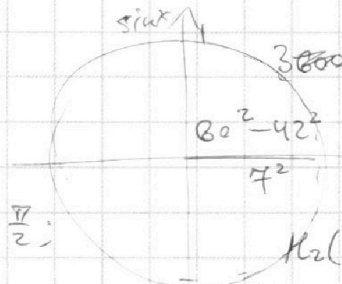
$$x_0 = \sqrt{\frac{51}{49}} \cdot \frac{3}{5}$$

$$x_0^2 + \left(\frac{21}{5}\right)^2 = 36;$$

$$\frac{29}{5} - \frac{50}{5} = \frac{36 \cdot 25}{25} - \frac{21 \cdot 20}{25} = \frac{900 - 420}{25} = \frac{480}{25} = \frac{96}{5} = 19.2$$

$$y_0 = \frac{100 \cdot 49}{4 \cdot 120} - \frac{28 \cdot 4}{4 \cdot 120} = \frac{4900}{480} - \frac{28}{30} = \frac{490}{48} - \frac{1}{3} = \frac{490}{48} - \frac{16}{48} = \frac{474}{48} = \frac{79}{8} = 9.875$$

$$\frac{144}{15} = \frac{87}{5} = \frac{29}{5}; \quad \frac{40}{12} - \frac{1}{30} = \frac{380 - 2}{60} = \frac{378}{60} = \frac{63}{10} = 6.3$$



$$x_0^2 + (y_0 - \frac{10}{4})^2 = \frac{36}{49}$$

$$\frac{18 \cdot 102}{49} = \frac{3 \cdot 2 \sqrt{51}}{7}$$

$$K_2(x_0; y_0); \quad \frac{18 \cdot 102}{49} = \frac{3 \cdot 2 \sqrt{51}}{7}$$

$$x_0^2 + (y_0 - 10)^2 = 36;$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi; \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right);$$

$$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi;$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi;$$

$$\sin(\pi - x) = \cos x; \quad -20y_0 + \frac{20}{4}y_0 + 100 - \frac{100}{49} = \frac{36}{49}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = 0;$$

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{2} + \left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)\right) = 0;$$

$$= 36 \left(1 - \frac{51}{49}\right);$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

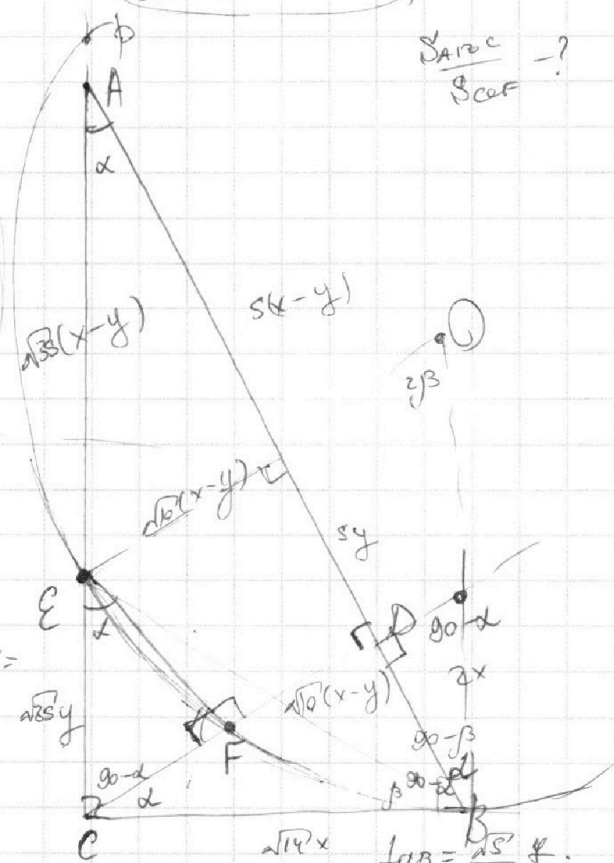
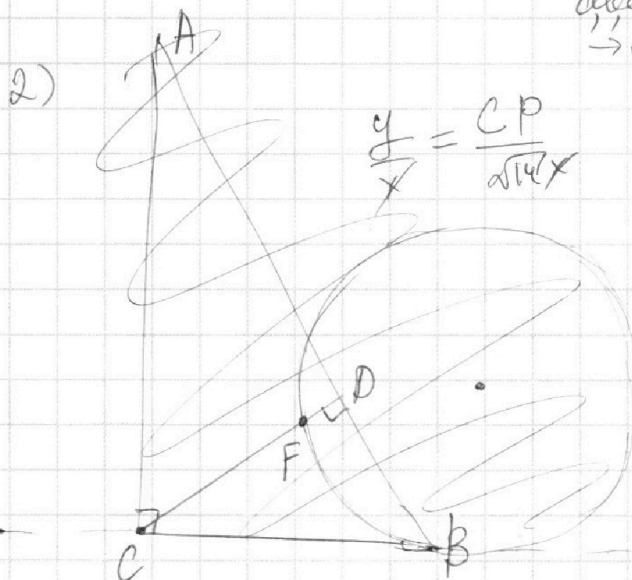
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \Rightarrow ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} k$
 $bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} m \Rightarrow abc = \sqrt{2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{88}} kmc$
 $ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} e \Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{3} kmc$

$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \rightarrow \min$, если $\sqrt{3} kmc \rightarrow \min$ и $\sqrt{3} kmc \in \mathbb{N} \Rightarrow$ пусть $k=3, m=c=1$
 $\Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$



$CF, CE = CD = \sqrt{10x^2} = \sqrt{10}x$
 $BC = \sqrt{14}x$
 $AC = \sqrt{35}x$
 $S_{ABC} = \frac{x^2}{2}$
 $y^2 = (x-y)^2 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 = \sqrt{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7$
 $CE \cdot CP = \frac{1}{2} (y-x) \cdot \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{10}$
 $CE \cdot CP = \frac{1}{2} x \cdot \frac{\sqrt{10}x}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5} x^2 = \text{tg} \alpha$

$\text{tg}(90-\alpha) = \frac{1}{\text{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\text{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \sqrt{10}$
 $\text{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{10}}$
 $\text{tg}(\alpha - \gamma) = \text{ctg} \gamma = \frac{1}{\text{tg} \gamma} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{5y}{\sqrt{10}y} = \frac{5}{\sqrt{10}}$

$\text{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{CF}{FE}$

$EF = sy = \frac{5x}{2}$
 $CF = \sqrt{10} \cdot \frac{y}{2}$
 $S_{CEF} = \frac{\sqrt{10} \cdot 5}{2} \cdot \frac{y^2}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{y^2}{2}$
 $\frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$
 $\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{y^2}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{10} \cdot y^2}{x^2} = \frac{4 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2x = v \\ \log_5^4 v - \frac{3}{\log_5 v} = \log_5 v \cdot 5^x - 3; \\ \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{1}{3} \log_5 y \cdot 5^y - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_5 v = t \\ \log_5 y = k; \end{cases}$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3; \quad t^4 = \frac{13}{3t} - 3;$$

$$k^4 + \frac{4}{k} = -\frac{1}{3k} - 3;$$

$$k^4 = -\frac{13}{3k} - 3;$$

$$t^4 - k^4 = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k} \right) = \frac{13}{3} \frac{(t+k)}{tk};$$

$$(t-k)(t+k)(t^2+k^2) - \frac{13}{3} \frac{(t+k)}{tk} = 0;$$

$$(t+k)((t-k)(t^2+k^2) - \frac{13}{3tk}) = 0;$$

$$\log_5 v y = 0; \Rightarrow v y = 1 \Rightarrow \boxed{xy = \frac{1}{2}};$$

$$\log_5 \left(\frac{v}{y} \right) (t^2 + k^2) = \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 v \log_5 y};$$

$$3t^5 + 9t - 13 = 0;$$

$$3k^5 + 9k + 13 = 0;$$

$$3t^5 + 9t - 12 = 1;$$

$$(t-1)(3t^4 + 3t^3 + 3t^2 + 3t + 12) = 1;$$

$$3(t^4 + t^3 + t^2 + t + 4)$$

$$(k+1)(3k^4 + 3k^3 + 3k^2 + 3k) = -1;$$

$$\log_5^4 v - \frac{3}{\log_5 v} = \frac{4}{3} \log_5 v \cdot 5^x - 3;$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \log_5 y \cdot 5^y - 3;$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3;$$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3;$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0;$$

$$b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0;$$

$$b^4 - a^4 + \frac{13}{3} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = 0;$$

$$a^4 + b^4 + \frac{13}{3} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) + 6 = 0;$$

$$\begin{cases} kx_1 + 9 = y_1 \\ kx_2 + 9 = y_2 \\ k(x_1 - x_2) = y_1 - y_2 \\ t = \frac{\log_5 v}{\log_5 y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx_1 + 9 = y_1 \\ kx_2 + 9 = y_2 \end{cases}$$

$$\frac{10}{18}$$

$$- \frac{88}{18}$$

$$= k \left(\frac{\log_5 v}{\log_5 y} \right)$$

$$+ \frac{10}{18} = k \left(\frac{\log_5 v}{\log_5 y} \right)$$

$$+ \frac{10}{18} = k \left(\frac{\log_5 v}{\log_5 y} \right)$$

$$+ \frac{10}{18} = k \left(\frac{\log_5 v}{\log_5 y} \right)$$

$$+ \frac{10}{18} = k \left(\frac{\log_5 v}{\log_5 y} \right)$$

$$+ \frac{10}{18} = k \left(\frac{\log_5 v}{\log_5 y} \right)$$

$$+ \frac{10}{18} = k \left(\frac{\log_5 v}{\log_5 y} \right)$$

$$+ \frac{10}{18} = k \left(\frac{\log_5 v}{\log_5 y} \right)$$

$$+ \frac{10}{18} = k \left(\frac{\log_5 v}{\log_5 y} \right)$$

$$+ \frac{10}{18} = k \left(\frac{\log_5 v}{\log_5 y} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0; & y = \sqrt{1-x^2}; \left(-\frac{a^2}{18}\right) \\ x^2 + y^2 = 1; & \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (y-10)^2 = 100 - 64 = 36; & -\frac{4a^2b}{18 \cdot 9} \\ y = \frac{ax+4b}{3} = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}; & \frac{a^4(1+\frac{a^2}{9})}{324} \neq \\ x^2 + y^2 = 1; & \\ x^2 + (y-10)^2 = 36; & \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{a^2}{9}x^2 + \frac{4ab}{9}x + \frac{16b^2}{9} - 1 = 0;$$

$$Ax + By + C = 0;$$

$$\frac{ax}{3} - y + \frac{4b}{3} = 0;$$

$$d_1 = \frac{|10a + 4b|}{\sqrt{\frac{a^2}{9} + 1}}$$

$$d_2 = \frac{|4b|}{\sqrt{\frac{a^2}{9} + 1}}$$

$$\frac{|4b|}{3} = \sqrt{\frac{a^2}{9} + 1};$$

$$\frac{|10a + 4b|}{3} = \sqrt{\frac{a^2}{9} + 1};$$

$$\frac{|4b|}{3} = \sqrt{\frac{a^2}{9} + 1}; \quad \frac{|10a + 4b|}{3} = 8b;$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{ax}{3} + \frac{4b}{3}; \quad \frac{10a}{3} + \frac{4b}{3} = -8b$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{a}{3}; \quad 10a + 4b = -24b;$$

$$\frac{4 \cdot 5a}{3 \cdot 14} =$$

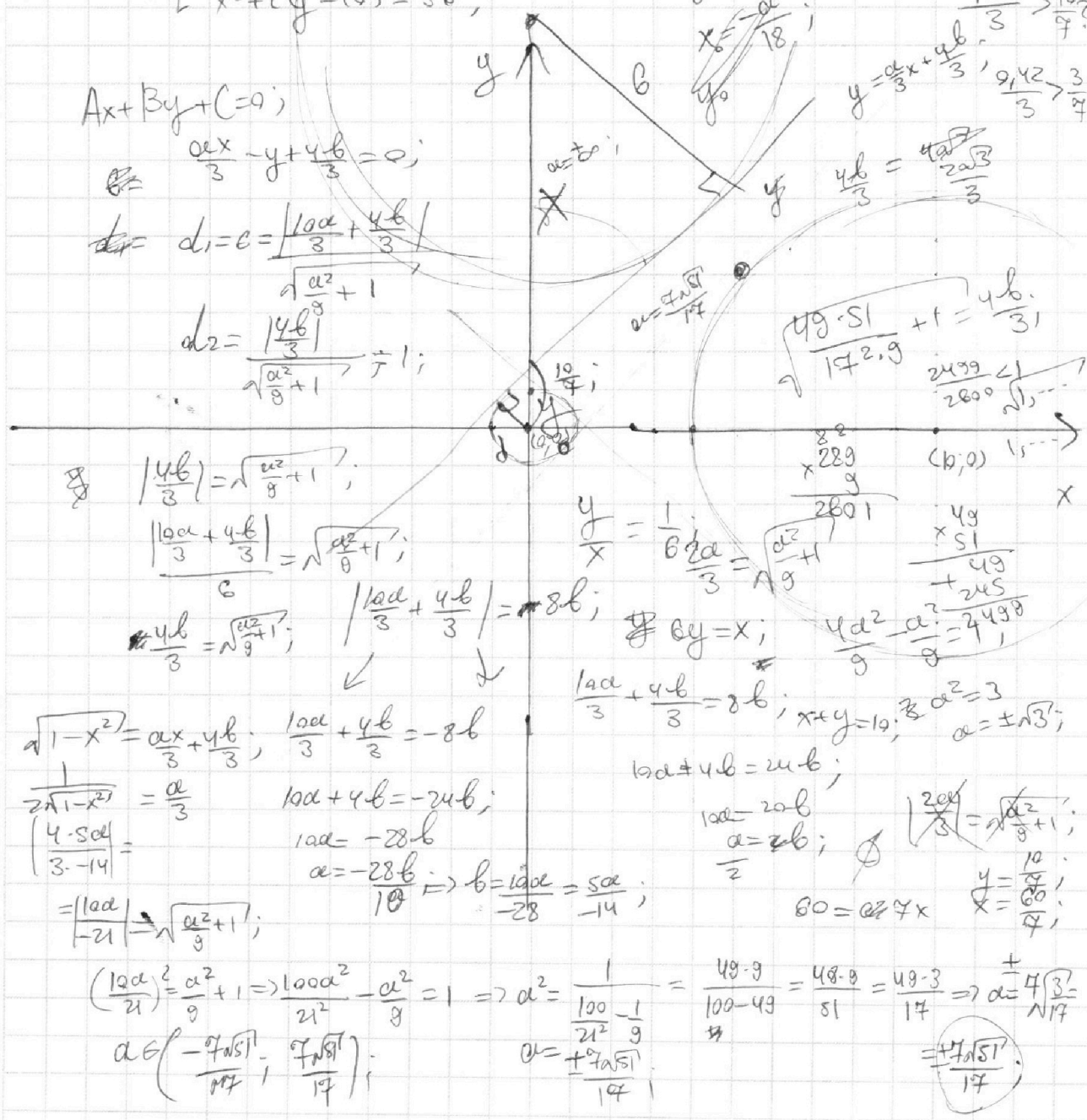
$$= \frac{|10a|}{-21} = \sqrt{\frac{a^2}{9} + 1};$$

$$\left(\frac{10a}{21}\right)^2 = \frac{a^2}{9} + 1 \Rightarrow \frac{100a^2}{21^2} - \frac{a^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{\frac{100}{21^2} - \frac{1}{9}} = \frac{49 \cdot 9}{100 - 49} = \frac{49 \cdot 9}{51} = \frac{49 \cdot 3}{17} \Rightarrow a = \pm \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$$

$$a \in \left(-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{17}}; \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{17}}\right);$$

$$a = \pm \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$$





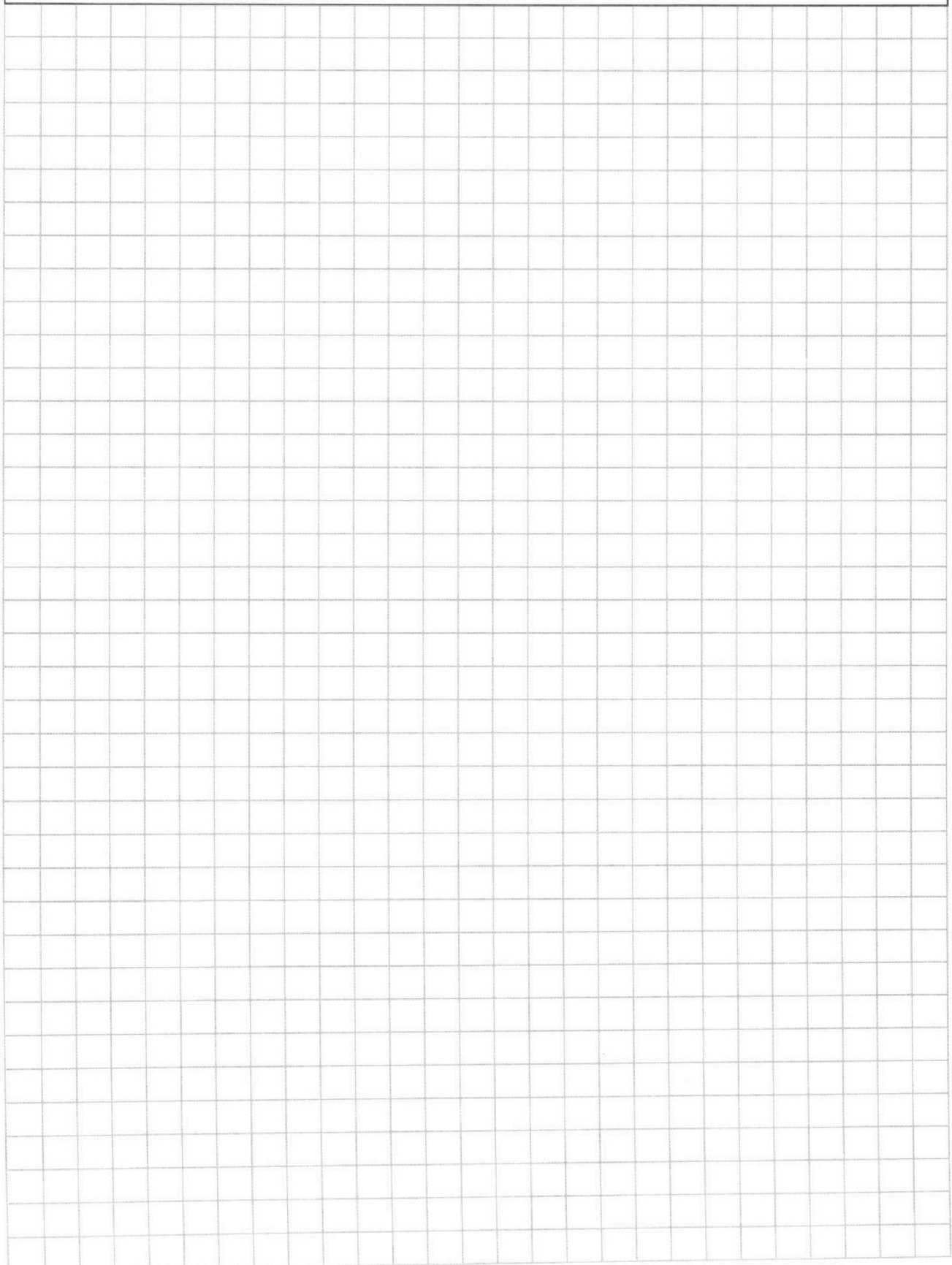
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\log_s^4 v - \log_s^4 y}{\log_s \frac{v}{y} \cdot \log_s vy} = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{\log_s v} + \frac{1}{\log_s y} \right);$$

$$\cdot (\log_s^2 vy - 2 \log_s v \log_s y) = \frac{13}{3} (\log_s v + \log_s y);$$

$$\cdot (\log_s^2 vy - 2 \log_s v \log_s y) = \frac{13}{3} \left(\frac{\log_s vy}{\log_s v \log_s y} \right);$$

$$\log_s vy = 0$$

$$\log_s \frac{v}{y} (\log_s^2 vy - 2 \log_s v \log_s y) = \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_s v \log_s y}$$

$$(\log_s v - \log_s y) \log_s v \log_s y =$$

$$= \log_s^2 v \log_s y - \log_s y^2 \log_s v;$$

$$a^4 - b^4 = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right); \quad a^3(a-b), a(a-b)(a^2+b^2) + b^{4+3}$$

$$a^4 + b^4 = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - 0; \quad b^2 a(a-b), b^{4+3} a^3 + b^5 =$$

$$\frac{a^8 - b^8}{(3)^2} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = (a+b)(a^4 - a^2 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4 - a b^5)$$

$$a^4 = \frac{13}{3a} - 3;$$

$$a^4 + 3 = \frac{13}{3a};$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0;$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0;$$

$$(a+b)(a$$

$$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) = 0;$$

$$\begin{array}{r|l} a^5 + 0 \cdot a^4 + 0 \cdot a^3 + 0 \cdot a^2 + a + b^5 & a+b \\ - a^5 + b^5 & a^4 - ba^3 + ba^2 - ba + b^4 \\ \hline -ba^4 + 0 \cdot a^3 & \\ -ba^4 - ba^3 & -ba^2 + a + b^5 \\ \hline -2ba^3 + 2ba^2 & \end{array}$$