МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

√1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

√2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

√3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

√4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 1. $ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12} \Rightarrow ab = 2^8 3^{14} 5^{12} k$, где $k \in \mathbb{N}$;

$bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17} \Rightarrow bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17} m$, где $m \in \mathbb{N}$;

$ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39} \Rightarrow ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} c$, где $c \in \mathbb{N}$;

Перемножим ab, bc и ac: $(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} kmc$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow abc = \sqrt{2^{34} 3^{55} 5^{68} kmc} = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{3kmc}$;

Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{3kmc} \in \mathbb{N}$; Т.к. мы ищем наим. знач. abc, то kmc – наим. множитель, при котором $3kmc$ – полный квадрат $\Rightarrow$ т.к. $k, m, c \in \mathbb{N}$, то $kmc = 3$ и достигается, к примеру, при $k = 3$ и $m = c = 1 \Rightarrow \sqrt{3kmc} = 3$ и $\min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$;

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

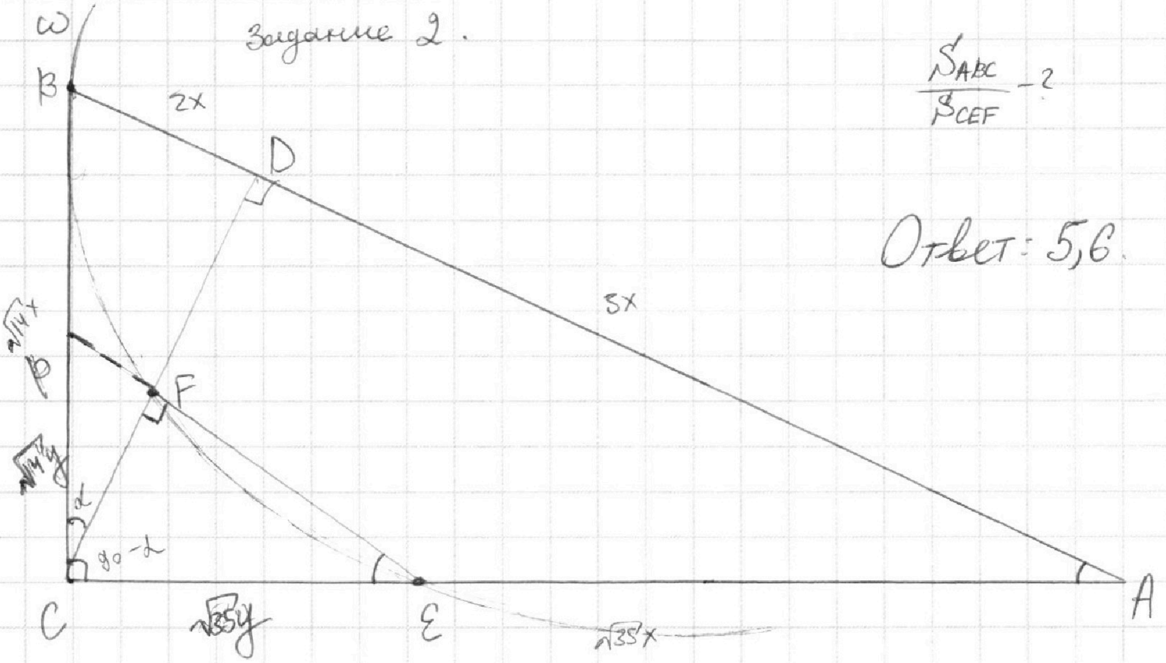
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 2.

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} - ?$

Ответ: 5,6.



Решение: $AD : DB = 5 : 2 \Rightarrow$ пусть $AD = 5x$; $DB = 2x$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{10}\,x$ (высота, опущ. на гипотенузу равна ср. геом. частей, на которые она делит гипотенузу),

Тогда по т. Пифагора из $\triangle CDA$ и $\triangle BDA \Rightarrow AC = \sqrt{35}\,x$; $BC = \sqrt{14}\,x$;

Продлим $FE \cap BC = P$; т.к. из условия $FE \parallel AB$, то и $PE \parallel AB \Rightarrow \angle CPE = \angle B$; $\angle CEF = \angle A$ и $CF \perp PE$, где BC, CD и AC — секущие к паралл. пр. PE и BA; Отсюда же по 3-м углам подобны $\triangle PCE$ и $\triangle ABC$; Тогда пусть $CE = \sqrt{35}\,y$ и $PC = \sqrt{14}\,y$, где $k = \frac{y}{x}$ — коэф. подобных тр-ников;

Из $\triangle FPC$ и $\triangle BCD$: $\angle F = \angle D = 90°$ и $\angle C$ — общ. $\Rightarrow$ они подобны с коэф. $k = \frac{CP}{CB} = \frac{y}{x} \Rightarrow PF = 2y$; Аналогично из $\triangle CFE$ и $\triangle CDA$: $FE = 5y$; т.к. CB — касат. к окружности, а $PE \cap \omega = F$ и E, где ω — окр. из условия, то верно след.: $PB^2 = PF \cdot PE \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sqrt{14}(x-y))^2 = 2y \cdot 7y \Rightarrow y^2 = (x-y)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2y = x; \\ x = 0; \end{array}\right.$ При $x = 0$ тр-ник не существует ($BA = 0$); При $2y = x$ найдём отнош. площадей: $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{7\sqrt{10}x^2}{2}$;

$S_{CEF} = \frac{CF \cdot FE}{2} = \frac{\sqrt{10}y \cdot 5y}{2} = \frac{5\sqrt{10}y^2}{2}$; $\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{28}{5} = 5{,}6$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 3. $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$;

Аргумент arcsin'а определён на $[-1;1]$, что верно $\forall x$ для $\cos x$; Сам arcsin принимает значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi-2x}{10} \le \frac{\pi}{2}$; $\Rightarrow -5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi \Rightarrow -2\pi \le x \le 3\pi$;

Тогда исходное ур-ние равносильно след. системе:

$$\begin{cases} \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right); \\ -2\pi \le x \le 3\pi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right); \\ -2\pi \le x \le 3\pi; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{5}\right) = 0; \\ -2\pi \le x \le 3\pi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{10}+\frac{x}{5}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{10}-\frac{x}{5}}{2}\right) = 0; \\ -2\pi \le x \le 3\pi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{2x}{5}\right) = 0; \\ \cos\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{3x}{5}\right) = 0; \end{array}\right. \\ -2\pi \le x \le 3\pi; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{5}-\frac{2x}{5} = \pi k; \\ \frac{3\pi}{10}-\frac{3x}{5} = \frac{\pi}{2}+\pi n; \end{array}\right. k, n \in \mathbb{Z}; \\ -2\pi \le x \le 3\pi; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}(1-5k); \\ x = -\frac{\pi}{3}(1+5n); \end{array}\right. k, n \in \mathbb{Z}; \\ -2\pi \le x \le 3\pi; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3\pi; -2\pi; \frac{\pi}{2}; \\ x = 3\pi; -2\pi; \frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \end{array}\right. \Rightarrow$$

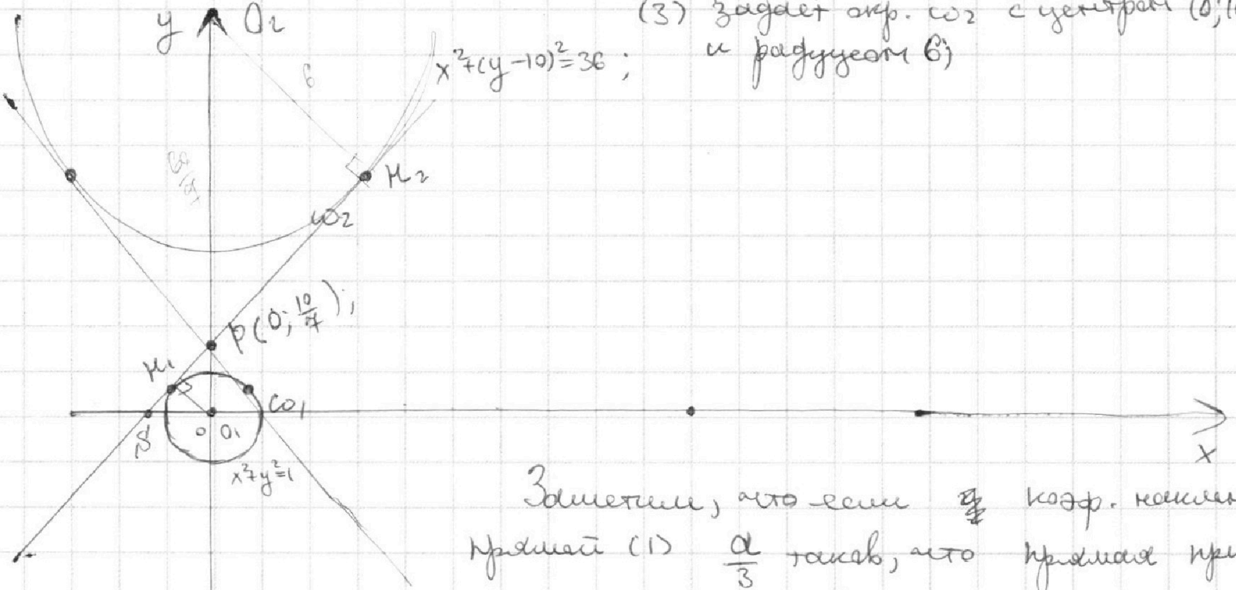
$\Rightarrow x = -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$;

Ответ: $\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\}$.

Задание 4. $\begin{cases} ax-3y+4b=0; \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0; \end{cases}$

$$\begin{cases} y=\dfrac{ax+4b}{3}; \ (1) \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1; \ (2) \\ x^2+(y-10)^2=36; \ (3) \end{array}\right. \end{cases}$$

Изобразим систему на плоскости xOy: (2) задаёт окр. ω_1 с центром $(0;0)$ и радиусом 1; (3) задаёт окр. ω_2 с центром $(0;10)$ и радиусом 6)



Заметим, что если коэф. наклона прямой (1) $\frac{a}{3}$ таков, что прямая при определённом значении b является общей касат. к ω_1 и ω_2, то она не может иметь более 2 пересечений с (3) и (2) в совокупности: либо она пересекает дважды ω_1 или ω_2, а оставшуюся окр. не пересекает вовсе; либо же является общей касат. и задаёт две точки касания; Заметим, если модуль коэф. наклона растёт до бесконечности, то, будучи в положении, где располож. общая касат., новая прямая будет иметь уже 4 решения, что нам и нужно; Но если модуль коэф. наклона будет уменьшаться до нуля, то 4 решений не будет никогда, т.к. не найдётся ни при каком b такой прямой, чтобы она была хотя бы общей касат. $\Rightarrow$ если общие касат. (см. рис.) имеют углы наклона k и $-k$, где $k>0$, то решение достигается при $\frac{a}{3}\in(-\infty;-k)\cup(k;+\infty)$; Найдём k:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Отметим ~~на~~ в СК также O_2, O_1 — центры окр. ω_2 и ω_1 соотв.; H_2 и H_1 — основания перпен., опущенные из O_2 и O_1 соотв. на прямую с коэф. наклона k; $P = H_1H_2 \cap Oy$; Пусть $O_2P = \tilde{a}$; $O_1P = \tilde{b}$; ~~Из~~ $\tilde{a} + \tilde{b} = 10$, т.к. $O_2(0;10)$;

$O_2H_2 \perp H_1H_2$ и $O_1H_1 \perp H_1H_2 \Rightarrow O_2H_2 \parallel O_1H_1$ и $\angle H_1PO_1 = \angle O_2PH_2$ как вертикальные $\Rightarrow \triangle O_2H_2P \sim \triangle O_1H_1P$ по 3-м углам и тогда:

$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{6}{1} \Rightarrow 6\tilde{b} = \tilde{a} \Rightarrow 6\tilde{b} + \tilde{b} = 10 \Rightarrow \tilde{b} = \frac{10}{7}$ и $\tilde{a} = \frac{60}{7}$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ прямая с коэф. наклона k имеет вид: $y = kx + \frac{10}{7}$, где $\frac{4-b}{3} = \frac{10}{7} \Rightarrow b = \frac{30}{28} = \frac{15}{14}$;

~~Запишем систему из расстояний H_1O_1 и H_1P получим, что $H_1P = \sqrt{O_1P^2 - O_1H_1^2} =$~~

По т. Пифагора $H_1P = \sqrt{O_1P^2 - O_1H_1^2} = \sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$; Тогда ~~угол~~ $tg\angle H_1O_1P = \frac{H_1P}{H_1O_1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$, но $\triangle SPO_1 \sim \triangle H_1O_1P$, где $S = Ox \cap H_1H_2 \Rightarrow \angle H_1O_1P = \angle S \Rightarrow tg\angle H_1O_1P = \frac{\sqrt{51}}{7} = tg\angle S$, но $tg\angle S$ и есть угол наклона ~~пр~~ общей касат. с коэф. $k > 0 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{51}}{7}$ и 4 решения достигается при

$\Downarrow$

$\alpha = \frac{3\sqrt{51}}{7}$;

$\alpha \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$;

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 5. Пусть $2x=v$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_5^4 v - 3\log_v 5 = \log_{v^3} 625 - 3; \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^4 v - \frac{3}{\log_5 v} = \frac{4}{3\log_5 v} - 3; \\ \log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3\log_5 y} - 3; \\ v>0; \\ y>0; \\ v\neq 1;\ y\neq 1; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_5^4 v = \frac{13}{3\log_5 v} - 3; \\ \log_5^4 y = -\frac{13}{3\log_5 y} - 3; \\ v, y>0; \\ v, y\neq 1; \end{cases}$$

Пусть $\log_5 v = a$ и $\log_5 y = b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^4 = \frac{13}{3a} - 3; \quad (1) \\ b^4 = -\frac{13}{3b} - 3; \quad (2) \\ v, y>0; \\ v, y\neq 1; \end{cases} \Rightarrow$$

из (1) и (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0; (1) \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0; (2) \\ v, y>0; \\ v, y\neq 1; \end{cases} \xrightarrow{\text{из } (1)+(2)} 3(a^5+b^5) + 9(a+b) = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(a+b)(a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4 + 3) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} a+b=0; (1) \\ a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4 + 3 = 0; (2) \end{array} \right.$$

(1): $a+b=0 \Rightarrow \log_5 v + \log_5 y = 0 \Rightarrow vy = 1 \Rightarrow 2xy = 1$ и $xy = \frac{1}{2}$;

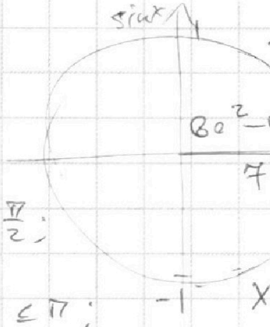
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x;$



3600

$\frac{80^2 - 42^2}{7^2}$

$x_0^2 + \left(y_0 - \frac{19}{7}\right)^2 = \frac{36}{49}\cdot 51;$

$\sqrt{\frac{18\cdot 102}{7^2}} = \frac{3\cdot 2}{7}\sqrt{51} = \frac{6}{7}\sqrt{51};$

$-1 \le \cos x \le 1$

$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(\cos x) \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi - 2x}{10} \le \frac{\pi}{2};$

$H_2(x_0; y_0);$

$H_1(x_0; y_0);$

$-\pi \le \frac{\pi - 2x}{5} \le \pi;$

$x_0^2 + (y_0 - 10)^2 = 36;$

$-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi;$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right);$

$1 = x_0^2 + y_0^2;$

$-6\pi \le -2x \le 4\pi;$

$-2\pi \le x \le 3\pi;$

$\sin(90 - x) = \cos x;$

$-20y_0 + \frac{20}{7}y_0 + 100 - \frac{100}{49} =$

$\frac{51}{49}$ $x_0^2 + \left(y_0 - \frac{10}{7}\right)^2$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = 0;$

$\frac{51}{49} - 1 = -\frac{20}{7}y_0 + \frac{100}{49};$

$2\sin\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{\pi - 2x}{10}}{2}\right)\cos\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)}{2}\right) = 0;$

$= 36\left(1 - \frac{51}{49}\right);$

$\frac{100}{49} - \frac{49}{49}$

$\frac{7}{10} = y_0;$
$x_0 = \frac{\sqrt{51}}{10};$

$\sqrt{\frac{51}{49}}$ $\frac{49}{100}$

$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\frac{5\pi}{10} - \frac{5x}{5} - \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}}{2}\right) = 0, \\ \cos\left(\frac{\frac{5\pi}{10} - \frac{5x}{5} + \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}}{2}\right) = 0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2x}{5}\right) = 0; \\ \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{3x}{5}\right) = 0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{5} - \frac{2x}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ \frac{3\pi}{10} - \frac{3x}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2x}{5} = \frac{\pi}{5} - \pi k \\ \frac{3x}{5} = \frac{3\pi}{10} - \frac{5\pi}{10} - \pi k \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi - 5\pi k}{2}; \\ x = \frac{-\pi - 5\pi k}{3}; \end{array}\right.$

$-\frac{2\pi}{10} = -\frac{\pi}{5}$

$-2\pi \le \frac{\pi - 5\pi k}{2} \le 3\pi;$

$+\frac{120}{7}y_0 = -\frac{2\cdot 36}{49} + \frac{100}{49} + 100;$

$-4\pi \le \pi(1 - 5k) \le 6\pi;$

$-2\pi \le \frac{-\pi - 5\pi k}{3} \le 3\pi$

$~~-\frac{10\pi}{10} = \arcsin(\cos\frac{\pi}{2})~~$

$-4 \le 1 - 5k \le 6$

$-6\pi \le -\pi(1 + 5k) \le 9\pi$

$-\pi = \arcsin(0)$

$-5 \le -5k \le 5;$

$-1 \le -k \le 1;$

$k \le 1$

$-9 \le (1 + 5k) \le 6$

$-\frac{28}{49} + \frac{100\cdot 49}{49};$

$-1 \le k \le +1;$

$-10 \le 5k \le 5$

$y_0 = \frac{100\cdot 49\ 7}{7\cdot 120} - \frac{28\ 4}{7\cdot 120};$

$k = -1; 0; 1 \Rightarrow x = 3\pi; \frac{\pi}{2}; -2\pi;$

$-2 \le k \le 1;$

$k = -2; -1; 0; 1 \Rightarrow x = 3\pi; \frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{3};$ $-2\pi;$

$x = -\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; -2\pi; 3\pi;$

$\begin{array}{r} 21 \\ +21 \\ \hline 21 \\ +42 \\ \hline 441 \end{array}$ $x_0 =$

y_0 $~~4900~~$ 28

$\arcsin(\cos(3\pi)) = \frac{\pi - 6\pi}{10} = -\frac{\pi}{2};$

$\frac{70}{12} - \frac{1}{30} =$

$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2};$

$x_0^2 + \left(\frac{21}{5}\right)^2 = 36;$

$\frac{174}{30} = \frac{87}{15} = \frac{29}{5};$

$x_0 = \sqrt{51}\cdot\frac{3}{5}$

$\frac{29}{5} - \frac{50}{5}$

$\frac{36\cdot 25}{25} - \frac{21^2}{25} = \frac{900 - 441}{25} = \frac{459}{25}; \quad = 9\cdot 51$

$= \frac{350 - 2}{60} = \frac{348}{60};$

МФТИ

1) $ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12} \Rightarrow ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} k$

$bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$ $\quad bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} m \Rightarrow abc = \sqrt{2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} kmc}$;

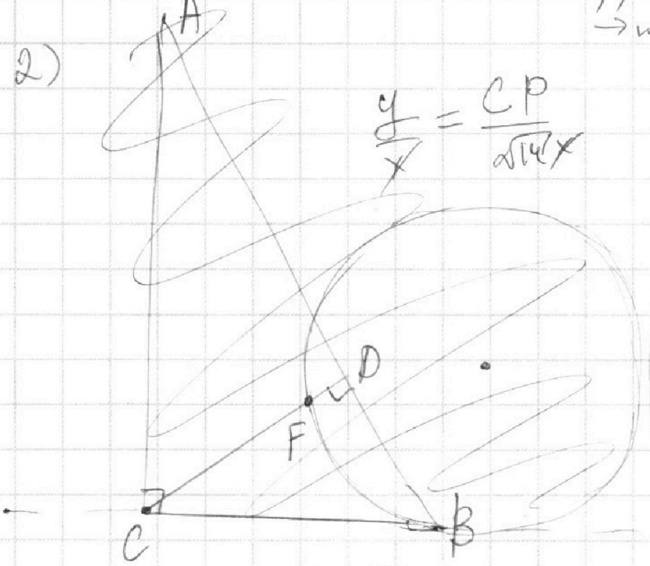
$ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$ $\quad ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} c$

$abc = 2^{17} \cdot 5^{34} \cdot 3^{27} \sqrt{3kmc}$,

$abc \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \to \min$, если $\sqrt{3kmc} \to \min$ и $\sqrt{3kmc} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ пусть $k=3, m=c=1$; $\Rightarrow$

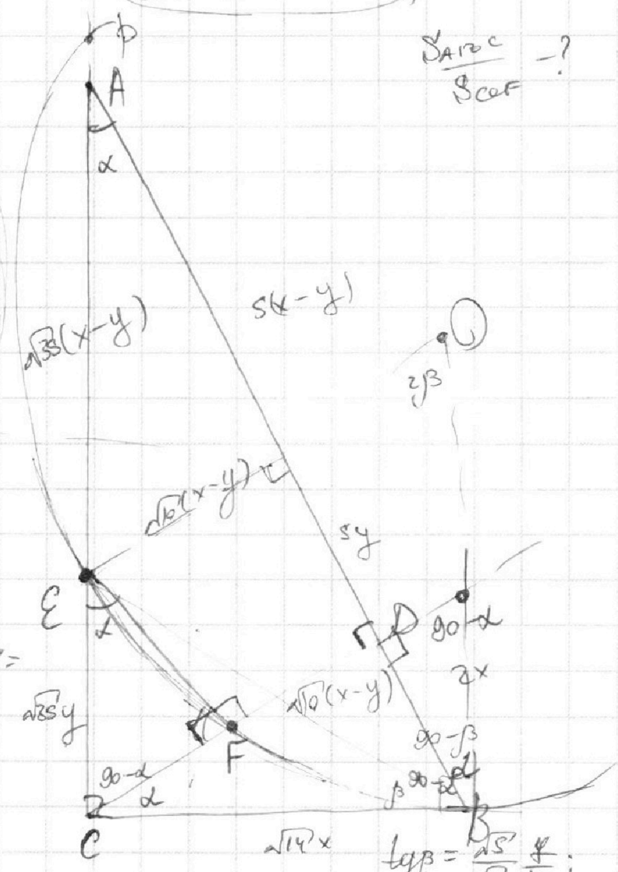
$\Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$;

2)



$\frac{y}{x} = \frac{CP}{\sqrt{14}x}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$ — ?



$PF \cdot PE = \frac{CD}{2} = \sqrt{10x^2} = \sqrt{10}x$;

$= \frac{(x-y)}{14}$ $BC = \sqrt{14}x$;

$AC = \sqrt{35}x$; $\quad S_{ABC} = \frac{x^2}{2}$.

$2y \cdot 7y \quad y^2 = (x-y)^2 \Rightarrow \quad \sqrt{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7}$

$CE \cdot CP = \cancel{CB}^2 = (2y-x)(\cancel{x}) = ;\ \frac{7}{2}x^2\sqrt{10}$; $\quad \sqrt{35}y$

$CE \cdot CP =$

$y = \frac{x}{2}$, $\quad \frac{\sqrt{10}x}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5} = tg\alpha$;

$tg(90-\alpha) =$

$= \frac{tg 90 - tg\alpha}{1 + tg 90 \cdot tg\alpha} = \frac{1 - \frac{tg\alpha}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + tg\alpha} = \frac{1}{tg\alpha} = ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{5}{\sqrt{10}}$, $\Rightarrow EF = 5y = \frac{5x}{2}$

$CF = \sqrt{10}y = \frac{x}{2}$

$\frac{EF}{AD} = \frac{y}{x} = \frac{CF}{CD} = \frac{y}{x}$; $\frac{EC}{AC} = \frac{EC}{\sqrt{35}x} \Rightarrow EC = y\sqrt{35}$ $\quad S_{CEF} = \frac{\sqrt{10} \cdot 5}{2} y^2 = \frac{\sqrt{10}x}{2}$;

$\cancel{tg}$ отн. $= \frac{\frac{7}{2}x^2\sqrt{10}}{\frac{5\sqrt{10}}{2}y^2} = \frac{7}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^2$ $\quad \cancel{tg\alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{8}$,

$\frac{4\sqrt{14}\sqrt{35}x}{5\sqrt{10}} = \frac{4 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5} =$

$\cancel{tg\alpha}$ $\quad tg\gamma = \frac{2}{\sqrt{10}}$ $\quad tg(90-\gamma) = ctg\gamma = \frac{1}{tg\gamma} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{5y}{\sqrt{10}y} = 5{,}6$;

$tg\alpha = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$; $= \frac{CF}{FE}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5 v = t$
$\log_5 y = k$;

$$\begin{cases} 2x = v \\ \log_5^4 v - \dfrac{3}{\log_5 v} = \dfrac{4}{3}\log_v \underset{=5^4}{625} - 3; \\ \log_5^4 y + \dfrac{4}{\log_5 y} = \dfrac{1}{3}\log_y \underset{=5^{-1}}{0{,}2} - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1; \end{cases}$$

$t^4 - \dfrac{3}{t} = \dfrac{4}{3t} - 3$; $\quad t^4 = \dfrac{13}{3t} - 3$;

$k^4 + \dfrac{4}{k} = -\dfrac{1}{3k} - 3$; $\quad k^4 = -\dfrac{13}{3k} - 3$;

$t^4 - k^4 = \dfrac{13}{3}\left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{13}{3}\dfrac{(t+k)}{tk}$;

$(t-k)(t+k)(t^2+k^2) - \dfrac{13}{3}\dfrac{(t+k)}{tk} = 0$;

$(t+k)\left((t-k)(t^2+k^2) - \dfrac{13}{3tk}\right) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 vy = 0; \Rightarrow vy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}; \\ \log_5\left(\frac{v}{y}\right)(t^2+k^2) = \dfrac{13}{3}\cdot\dfrac{1}{\log_5 v \log_5 y}; \end{array}\right.$$

$kx_1 + b = y_1$
$kx_2 + b = y_2$,
$k(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$
$\dfrac{\sqrt[5]{13}}{\sqrt[5]{13}} = $

$3t^5 + 9t - 13 = 0$; $\quad 3t^5 + 9t - 12 = 1$;

$(t-1)(3t^4 + 3t^3 + 3t^2 + 3t + 12) = 1$;

$3(t^4 + t^3 + t^2 + t + 4)$

$3k^5 + 9k + 13 = 0$;

$(k+1)(3k^4 + 3k^3 + 3k^2 + 3k \quad) = -1$;

$$\begin{cases} \underbrace{\log_5^4 v}_{a} - \dfrac{3}{\log_5 v} = \dfrac{4}{3}\log_v 5 - 3; \\ \underbrace{\log_5^4 y}_{b} + \dfrac{4}{\log_5 y} = -\dfrac{1}{3}\log_y 5 - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 - \dfrac{3}{a} = \dfrac{4}{3a} - 3; \\ b^4 + \dfrac{4}{b} = \dfrac{-1}{3b} - 3; \end{cases}$$

$a^4 - \dfrac{13}{3a} + 3 = 0$;

$b^4 + \dfrac{13}{3b} + 3 = 0$;

$b^4 - a^4 + \dfrac{13}{3}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a}\right) = 0$;

$a^4 + b^4 + \dfrac{13}{3}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right) + 6 = 0$;

$\dfrac{\sqrt[5]{13}}{10} + 1 = (-1)k = \dfrac{\sqrt[5]{13}}{10} - \dfrac{\sqrt[5]{13}}{8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0; \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1; \\ x^2+(y-10)^2=100-64=36; \end{array}\right. \end{cases}$$

$y=\sqrt{1-x^2}$; $\left(-\frac{a^2}{18};\right.$

$-\frac{4a^3b}{18\cdot 9}$

$\frac{a^4}{324}\left(1+\frac{a^2}{9}\right)$

$$\begin{cases} y=\frac{ax+4b}{3}; = \frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}; \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1; \\ x^2+(y-10)^2=36; \end{array}\right. \end{cases}$$

$x^2+\frac{a^2}{9}x^2+\frac{4ab}{9}x+\frac{16b}{9}-1=0;$

$\frac{9{,}42}{3}>\frac{10}{7}$?

$x_0=-\frac{a^2}{18}$; y_0

$y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$; $\frac{9{,}42}{3}>\frac{3}{7}$;

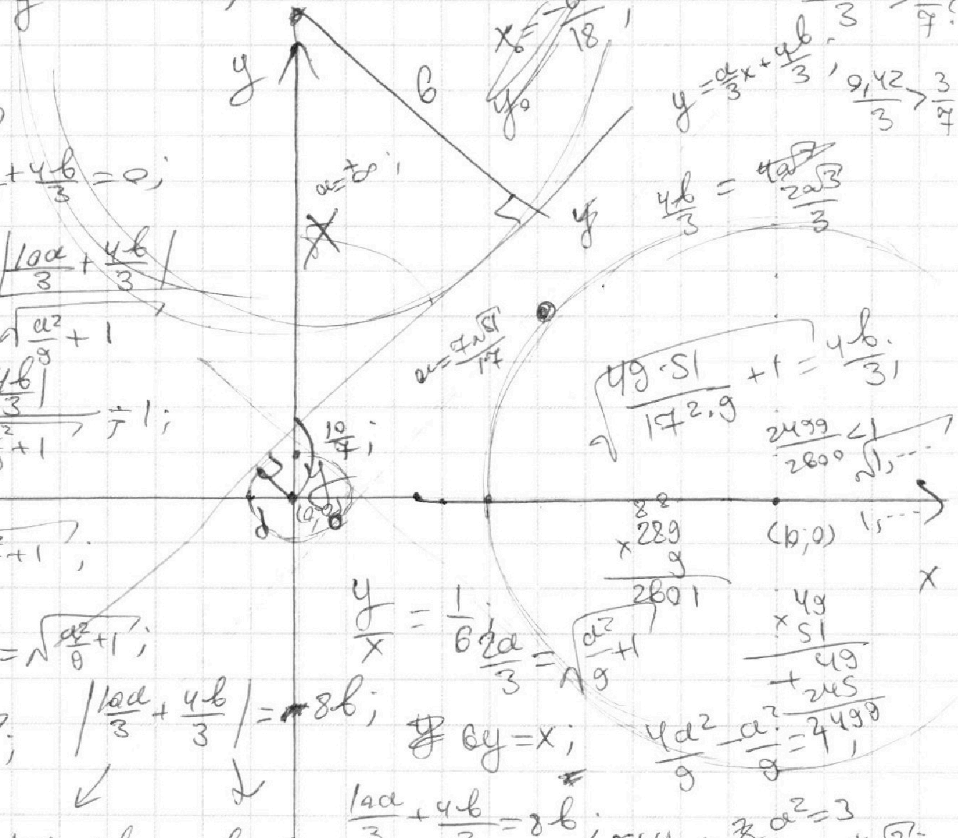
$Ax+By+C=0$;

$\frac{ax}{3}-y+\frac{4b}{3}=0$;

$\frac{4b}{3}=\frac{4a\sqrt{7}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}$

$d_1=6=\frac{\left|\frac{10a}{3}+\frac{4b}{3}\right|}{\sqrt{\frac{a^2}{9}+1}}$

$d_2=\frac{\left|\frac{4b}{3}\right|}{\sqrt{\frac{a^2}{9}+1}}=1$;



$\sqrt{\frac{49\cdot 51}{17^2\cdot 9}+1}=\frac{4b}{3}$;

$\frac{2499}{2800}<1$

$\left|\frac{4b}{3}\right|=\sqrt{\frac{a^2}{9}+1}$;

$\frac{\left|\frac{10a}{3}+\frac{4b}{3}\right|}{6}=\sqrt{\frac{a^2}{9}+1}$;

$\frac{4b}{3}=\sqrt{\frac{a^2}{9}+1}$;

$\left|\frac{10a}{3}+\frac{4b}{3}\right|=8b$;

$\frac{y}{x}=\frac{1}{6}$; $\frac{2a}{3}=\sqrt{\frac{a^2}{9}+1}$

$6y=x$; $\frac{4a^2}{9}-\frac{a^2}{9}=1$

$289\cdot 9=2601$; $49\cdot 51=2499$

$\frac{10a}{3}+\frac{4b}{3}=8b$; $x+y=10$; $3a^2=3$; $a=\pm\sqrt{3}$;

$10a+4b=24b$;

$10a=20b$; $a=2b$;

$\left|\frac{2a}{3}\right|=\sqrt{\frac{a^2}{9}+1}$; $\varnothing$

$\sqrt{1-x^2}=\frac{ax}{3}+\frac{4b}{3}$; $\frac{10a}{3}+\frac{4b}{3}=-8b$

$\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{a}{3}$

$10a+4b=-24b$;

$10a=-28b$

$a=-\frac{28b}{10}\Rightarrow b=\frac{10a}{-28}=\frac{5a}{-14}$;

$\left|\frac{4\cdot 5a}{3\cdot -14}\right|=$

$=\left|\frac{10a}{-21}\right|=\sqrt{\frac{a^2}{9}+1}$;

$y=\frac{10}{7}$; $x=\frac{60}{7}$;

$60=a\cdot 7x$

$\left(\frac{10a}{21}\right)^2=\frac{a^2}{9}+1\Rightarrow\frac{100a^2}{21^2}-\frac{a^2}{9}=1\Rightarrow a^2=\frac{1}{\frac{100}{21^2}-\frac{1}{9}}=\frac{49\cdot 9}{100-49}=\frac{49\cdot 9}{51}=\frac{49\cdot 3}{17}\Rightarrow a=\pm 7\sqrt{\frac{3}{17}}=\frac{\pm 7\sqrt{51}}{17}$

$a\in\left(-\frac{7\sqrt{51}}{17};\ \frac{7\sqrt{51}}{17}\right)$;

$a=\frac{\pm 7\sqrt{51}}{17}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\underbrace{\log_5^4 v}_{a}-\underbrace{\log_5^4 y}_{b}=\frac{13}{3}\left(\frac{1}{\log_5 v}+\frac{1}{\log_5 y}\right);$$

$$\log_5\frac{v}{y}\cdot\log_5 vy\cdot$$

$$\frac{13}{3}\left(\log_v 5+\log_y 5\right);$$

$$\cdot\left(\log_5^2 vy-2\log_5 v\log_5 y\right)=\frac{13}{3}\left(\frac{\log_5 vy}{\log_5 v\log_5 y}\right);$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_5 vy=0\\ \log_5\frac{v}{y}\left(\log_5^2 vy-2\log_5 v\log_5 y\right)=\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{\log_5 v\log_5 y}\end{array}\right.$$

$$(\log_5 v-\log_5 y)\log_5 v\log_5 y=$$

$$=\log_5^2 v\log_5 y-\log_5 y^2\log_5 v;$$

$$a^4-b^4=\frac{13}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right);$$

$$a^4+b^4=\frac{13}{3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)-6;$$

$$\cancel{a^8-b^8=\left(\frac{13}{3}\right)^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}$$

$$a^3(a-b)\quad a(a-b)(a^2+b^2)$$
$$+b^{4+3}$$
$$b^2a(a-b)$$
$$b^{4+3}\quad a^5+b^5=$$
$$=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+ab^4-ab^5)$$

$$a^4=\frac{13}{3a}-3;\qquad a^4+3=\frac{13}{3a};\qquad 3a^5+9a-13=0;$$
$$\vee|\ 3$$
$$3b^5+9b+13=0;$$

$$(a+b)(a$$

$$3(a^5+b^5)+9(a+b)=0;$$

$$\begin{array}{l|l} a^5+0\cdot a^4+0\cdot a^3+0\cdot a^2+0\cdot a+b^5 & a+b\\ \hline -a^5+ba^4 & a^4-ba^3+b^2a^2-b^3a+b^4\\ \quad -ba^4+0\cdot a^3 & \\ \quad -ba^4-ba^3 & \\ \quad\quad b^2a^3+0\cdot a^2\quad -b^2a^2+0\cdot a & \\ \quad\quad +b^2a^2 & +b^4a+b^5 \end{array}$$