



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1 стр 1.

~~$2^{14} \cdot 4^{10}$~~ $ab : 2^{14} \cdot 4^{10}$, $bc : 2^{14} \cdot 4^{14}$, $ac : 2^{20} \cdot 4^{34}$

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 4^{\beta_1} \cdot a'$, $(a', 2) = 1$; $(a', 4) = 1$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 4^{\beta_2} \cdot b'$, $(b', 2) = 1$; $(b', 4) = 1$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 4^{\beta_3} \cdot c'$; $(c', 2) = 1$; $(c', 4) = 1$

если $ab : 2^{14} \cdot 4^{10}$, то $ab : 2^{14}$ и $ab : 4^{10}$
 \Downarrow \Downarrow
 $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 14$ $\beta_1 + \beta_2 \geq 10$

аналогично для двух других кратностей:

$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$; $\beta_2 + \beta_3 \geq 14$; $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 20$; $\beta_1 + \beta_3 \geq 34$

$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 14 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 51 \\ \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{51}{2} \end{cases}$
 (имеем право складывать)
 \Downarrow $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 26$ (т.к $\alpha_i \in \mathbb{N}$ равны нулю)

$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 14 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 34 \end{cases} \Rightarrow 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 64 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 32$
 (имеем право складывать)
 Напомним, что $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 4^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot a' \cdot b' \cdot c'$

$abc \geq 2^{26} \cdot 4^{32}$ а если $a' = b' = c' = 1$

~~так в итоге равенство достигается при~~
 ~~$a = 2^{14}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МТФРД
Теперь покажем, что мы плохо оценили
$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ (равенство не достигается,
т.к. $\beta_1 + \beta_3 \geq 34$), тогда $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$

Т.е. $abc \geq 2^{26} \cdot 4^{34}$ (при $a' = b' = c' = 1$)

Равенство при $a = 2^{10} \cdot 4^{20}$, $b = 2^8 \cdot 4^0$,
 $c = 2^{10} \cdot 4^{14}$ (все условия выполнены, мы это
уже видели ранее)

Т.е. $abc = 2^{26} \cdot 4^{34}$

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 4^{34}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow (a, b) = 1$

мы хотим посчитать $(a+b, a^2-bab+b^2)$

Т.к эту дробь можно сократить не более чем на НОД числителя и знаменателя.

$$a^2-bab+b^2 = (a+b)(a-b) + 8b^2$$

Значит руководствуясь алгоритмом Евклида получаем, что

$$(a+b, a^2-bab+b^2) = (a+b, 8b^2)$$

$(a+b, b) = (a, b) = 1 \Rightarrow$ и $(a+b, b^2)$ - взаимно

значит $(a+b, 8b^2) \leq 8$ и кратно

~~равняется~~ $(a+b, 8b^2) = \cancel{x}$ и $\cancel{x} \leq 8$, $8 : \cancel{x}$

и $x=8$ для $a+b : 8$

т.е. $m \leq 8$ $m=8$ например при $a=1, b=7$

$$\left(\frac{a+b}{a^2-bab+b^2} = \frac{8}{49-42+1} = \frac{8}{8} \text{ можно сократить на } 8 \right)$$

Ответ: $m=8$.

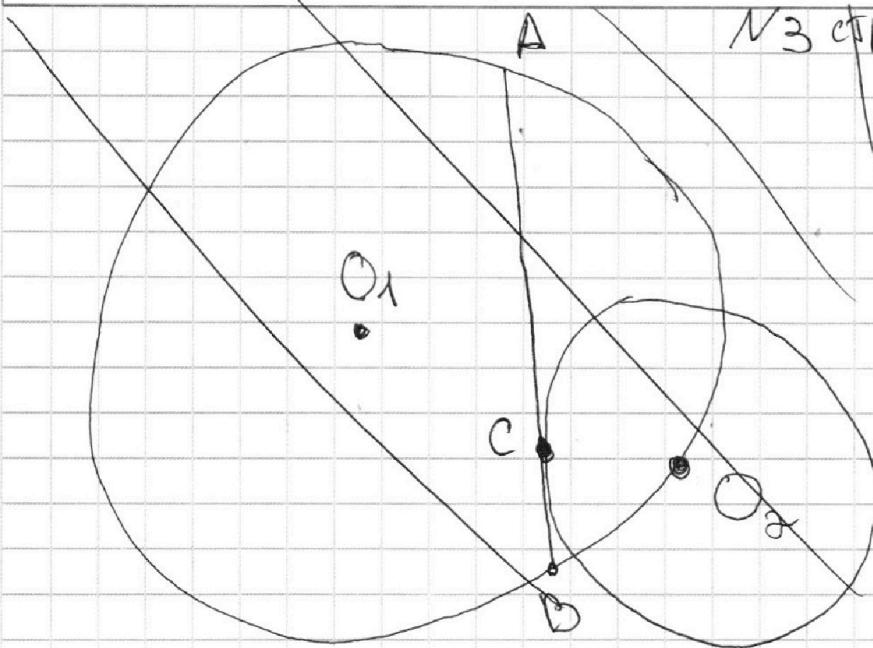
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

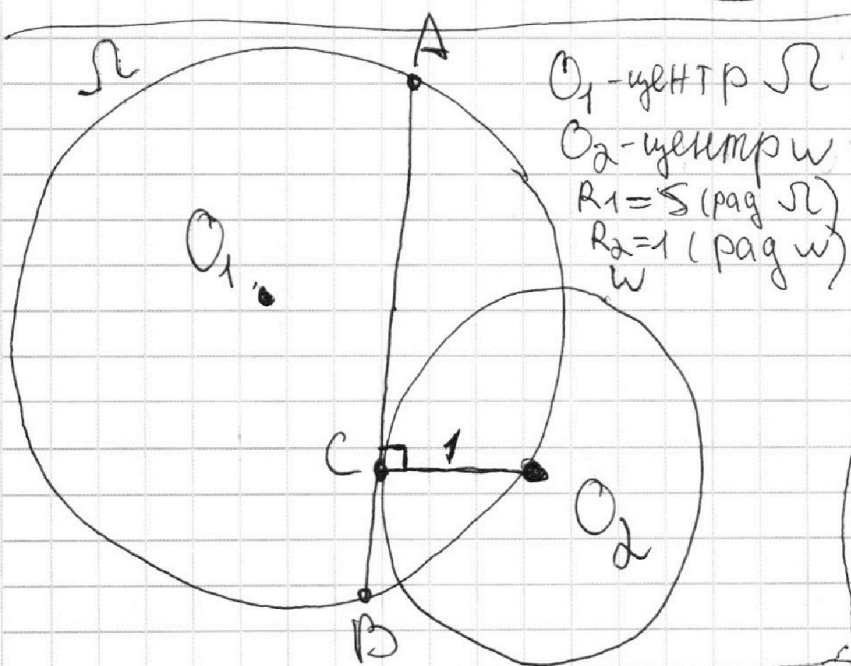
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



степень точки
 B отн окр w
 равна BC^2 , т.к.
 BC - касательная,
 но также
 $\text{pow } B_w = BO_2^2 - R_2^2$
 $= BO_2^2 - 1$

аналогично



O_1 - центр Ω
 O_2 - центр w
 $R_1 = 5$ (радиус Ω)
 $R_2 = 1$ (радиус w)

для T.A:
 $\text{pow } A_w = AC^2$
 $\text{pow } A_w = AO_2^2 - R_2^2$
 $= AO_2^2 - 1$

Значит:
 $BC^2 = BO_2^2 - 1$
 $AC^2 = AO_2^2 - 1$
 $\frac{AC}{AB} \left(\frac{AC}{BC} \right)^2 = \frac{AO_2^2 - 1}{BO_2^2 - 1}$

но по условию $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AO_2^2 - 1}{BO_2^2 - 1} = \frac{1}{4} \Rightarrow AO_2^2 - 1 = \frac{1}{4}(BO_2^2 - 1)$$

$$\Rightarrow AO_2^2 = \frac{1}{4}BO_2^2 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{4}BO_2^2 + \frac{3}{4}$$

т.к. O_2 - центр w , а AB касательная в т. $C \Rightarrow CO_2 \perp AB$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



тогда O_2C - высота h в $\triangle AO_2B$.

$$S_{AO_2B} = \frac{O_2C \cdot AB}{2} = \frac{O_2C \cdot (AC + BC)}{2} = \frac{O_2C \cdot 8BC}{2} = 4BC \quad (\text{т.к. } O_2C = R_2 = 1)$$

с гр. стороны

$$S_{AO_2B} = \frac{AO_2 \cdot BO_2 \cdot \sin \angle AO_2B}{2} \quad (\angle AO_2B = \alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} AO_2 &= \sqrt{49BC^2 + 1} \\ BO_2 &= \sqrt{BC^2 + 1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{AO_2B} = \frac{\sqrt{49BC^2 + 1} \cdot \sqrt{BC^2 + 1} \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$S_{AO_2B} = \frac{\sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1}}{2} \cdot \sin \alpha$$

тогда

$$4BC = \frac{\sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1}}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$8BC = \sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{8BC}{\sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1}}$$

Хорда AB окружности Ω может быть выражена
через α и R_1 , а именно $AB = 2R_1 \cdot \sin \alpha$.

$$AB = 8BC \quad (\text{по условию}) \Rightarrow 8BC = 2 \cdot 5 \cdot \frac{8BC}{\sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1}}$$

поделим все на $8BC$ ($BC \neq 0$) \Rightarrow

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{\sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1}} = 1 \Rightarrow \sqrt{49BC^4 + 50BC^2 + 1} = 20 \cdot 10$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3 стр 3.

возведем в кв, т.к $AB > 0$ и $BC > 0$.

$$49BC^4 + 50BC^2 + 1 = 400 \Rightarrow 49BC^4 + 50BC^2 - 399 = 0$$

$$BC^2 = t, t > 0 \Rightarrow 49t^2 + 50t - 399 = 0.$$

$$D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 399 = 80404$$

$$t = \frac{-50 + \sqrt{80404}}{98} \quad (\text{т.к. } t > 0)$$

$$t = \frac{-50 + 16\sqrt{34}}{98} = \frac{-25 + 8\sqrt{34}}{49}$$

$$BC^2 = \frac{-25 + 8\sqrt{34}}{49} \Rightarrow BC = \sqrt{\frac{8\sqrt{34} - 25}{49}}$$

$$AB = 8BC = 8\sqrt{\frac{8\sqrt{34} - 25}{49}} = 8\sqrt{\frac{2151}{49}}$$

$$= \frac{8}{7}\sqrt{2151} = \frac{8}{7} \cdot 3\sqrt{239}$$

$$\text{Ответ: } AB = \frac{24}{7}\sqrt{239}$$

$$49t^2 + 50t - 399 = 0 \Rightarrow (49t + 99)(t - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{т.к. } t > 0, t = 1 \Rightarrow BC^2 = 1 \Rightarrow BC = 1, \text{ т.к. } BC > 0$$

$$\Rightarrow AB = 8BC = 8.$$

$$\text{Ответ: } AB = 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МЧ.

Очевидно, что $x=1$ - подходит.
Возведем в кв (если найденные x
не входят в ОДЗ откинем их
сделаем проверку).

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1} +$$

$$+ 2x^2 + 2x + 1 = 4 - 28x + 49x^2$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1} =$$
$$= 4 - 28x + 49x^2$$

$$-45x^2 + 25x = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$(-45x^2 + 25x)^2$ можно возвести
в кв при $x \in [0; \frac{5}{9}]$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 49x^2 + 2x + 2x + 1 + 4\sqrt{2x^2 + 2x + 1} -$$

$$-40x - 14\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad \frac{49t^2 - 50t - 99}{49t^2 - 49t} \quad \frac{t-1}{49t+99} \quad t=1 \quad 49(t-1)$$

$$49x^2 - 26 + 4x = 14x\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 4\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 + 4x - 26 = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} (14x - 4)$$

$$2401x^4 + 49x^2 + 646 = (2x^2 + 2x + 1)(196x^2 - 112x + 16)$$

$$2401x^4 + 49x^2 + 646 + 686x^3 - 3548x^2 - 364x = (2x^2 + 2x + 1) \cdot x(196x^2 - 112x + 16)$$

$$2401x^4 - 3499x^2 + 686x^3 - 364x + 646 = 392x^4 - 224x^3 + 32x^2 +$$

$$+ 392x^3 - 224x^2 + 32x + 196x^2 - 112x + 16 \quad \text{Отв: } x=1$$

П.к. $x=1$ - корень, поделим на $x-1$ больше корней не получим

$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3)$$

$$4(4x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 9x + 3)$$

$$4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3$$

$$4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3$$

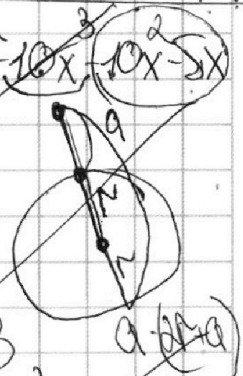
$$\begin{array}{r} 2250 \\ 24 \end{array}$$

$$2246$$

$$\begin{array}{r} 2246 \\ 14 \\ \hline 14 \\ \hline 06 \end{array}$$

$$2246 \overline{) 41}$$

$$\begin{array}{r} 2009 \\ 14 \\ \hline 60 \\ \hline 58 \\ \hline 49 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2246 \\ 14 \\ \hline 60 \\ \hline 58 \\ \hline 49 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$x \geq 0$

~~$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 4x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$~~

ОДЗ: $2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(2x-3) \geq 0$

$x \in (-\infty; 1] \cup [1.5; +\infty)$

$2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x - \sqrt{(x^2 + (x+1)^2)} > 0$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 4x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

это верно, только когда правая часть не отрицательна. $\Rightarrow 2 - 4x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \Rightarrow$

~~$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 4x - 2$~~

1 случай $4x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2}{4}$, тогда

при $x \in (-\infty; \frac{2}{4}]$ нер-во выполняется

2 случай $4x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{4} \Rightarrow$ ищем право

возвести в квадрат, т.к. меньшая часть нер-ва положит.

$2x^2 + 2x + 1 \geq 49x^2 - 28x + 4 \Rightarrow 44x^2 - 30x + 3 \leq 0$

$44 \left(x - \frac{15 + 2\sqrt{21}}{44} \right) \left(x - \frac{15 - 2\sqrt{21}}{44} \right) \leq 0$

$x \in \left[\frac{15 - 2\sqrt{21}}{44}, \frac{15 + 2\sqrt{21}}{44} \right]$

Т.о мы наложим ограничения на x . Решим теперь ур-ние

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

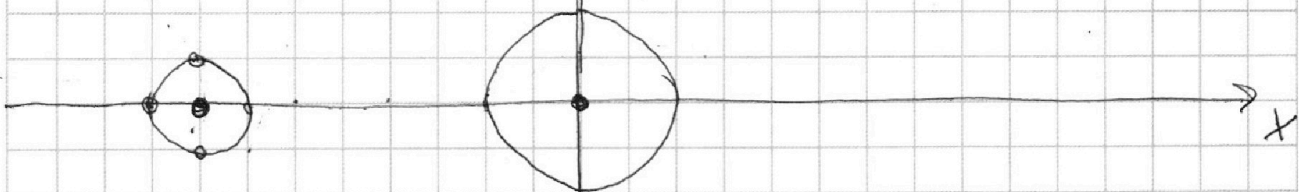
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N_6
Ур-ние системы задает прямую $ax+10b=y$
 $(x+8)^2+y^2-1$ - ур-ние окр. с центром
в т. $(-8; 0)$ и $r=1$

x^2+y^2-4 - ур-ние окр. с центром в т. $(0; 0)$

и $r=2$
Тогда для всех точек внутри и на границе
одной из окружностей пер-во будет выполнено,
т.к. две скобки либо разных знаков, либо одна
из них ноль. Это удовлетворяет пер-ву.



Тогда, т.к. мы хотим, чтобы система
имела два решения, а первое ур-ние -
прямая, эта прямая должна быть
касательной к обеим окружностям (иначе,
если она пересекает какую-то, то все точки
лежащие на этой прямой внутри окр. будут являться
решениями, но это очевидно ∞).

~~Если она не к.~~ Т.е. мы можем сделать
вывод, что

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если прямая пересекает окр, то 2 кол-ва
реш, если не касается, то 1 решение; соотв
т.к. нам нужно 2 реш, прямая должна
касаться обеих окружностей.
т.е. нужно чтобы $ax+10b=y$ было
ур-нием касательной к обеим окр.

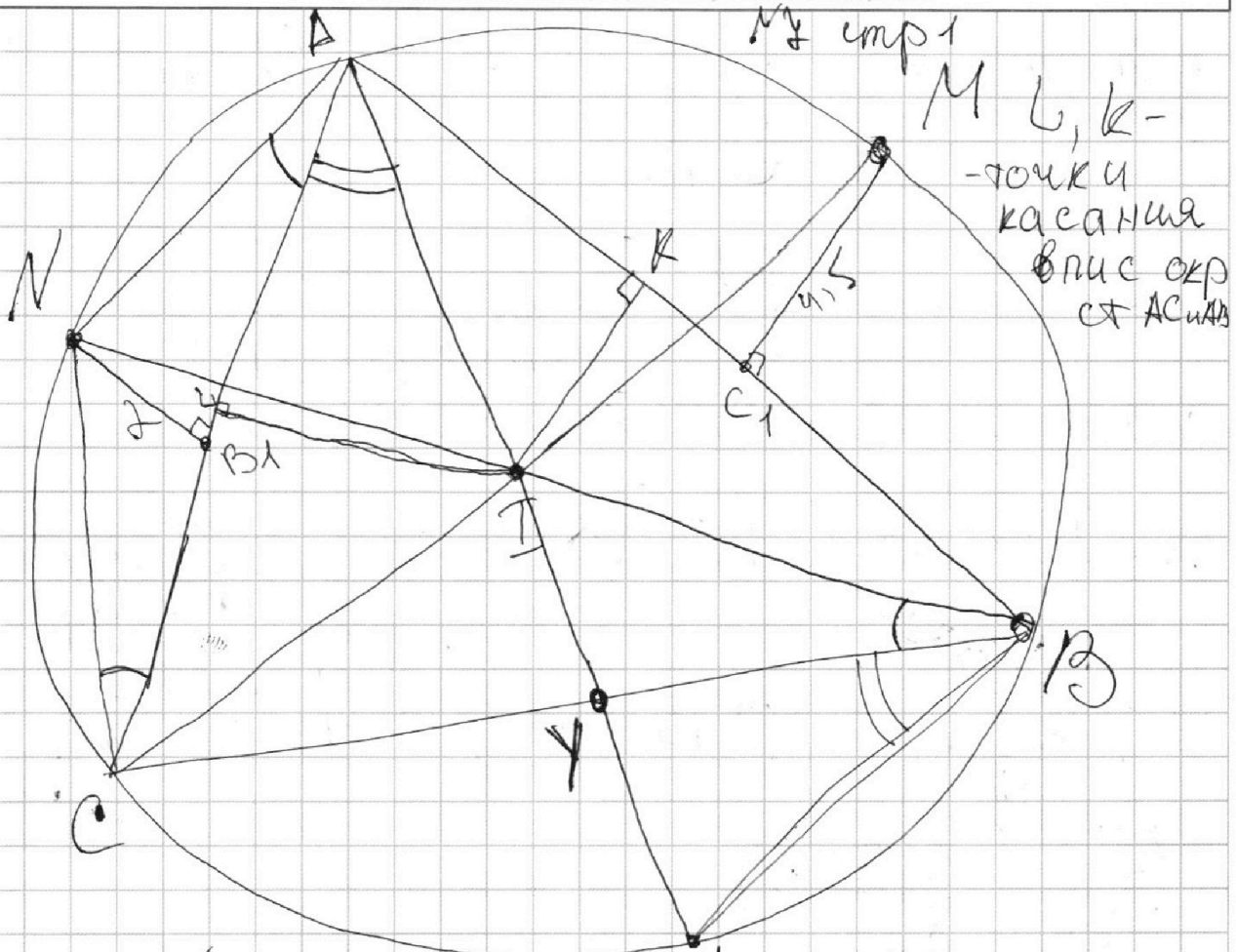
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



∇ . к N и M - середины дуг AC и AB
 не содерж ∇ . B и C соотв. то
 CM и BN - бис-сы $\angle ACB$ и $\angle ABC$
 (т.к. $\sphericalangle CN = \sphericalangle AN =$ дуга AB аналогично
 дуга AC) $\Rightarrow \nabla$. I - центр = $CM \cap BN$
 $\angle NAC = \angle MBC = \angle MBA = \angle MCA$
 (т.к. $MAFC$ - впис.) \cup (т.к. $MAFC$ - впис.)
 ΔCNA - р.б., аналог ΔAMB - р.б.
 перпендикуляр из N и M на AC и AB соотв.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

упадет на середину AC и AB соотв,
в ΔB_1 и E_1 .

$\Delta CNB_1 \sim \Delta BIK$ (т.к. $\angle BKI = \angle CNB_1 = 90^\circ$,
 $\angle NCB_1 = \angle IBK$)

аналогично $\Delta BMC_1 \sim \Delta CIL$.

$\Delta CIN \sim \Delta BIM$, т.к. $\angle CIN = \angle BIM$
как вертикаль,

$\Delta NAI \sim \Delta XIB$ (аналог) (опир на MM ,
 $\angle NCI = \angle MBI$)

$$\frac{AI}{IB} = \frac{NA}{XI} \quad (1)$$

$\Delta ACY \sim \Delta AXB$ (т.к. $\angle CAU = \angle XAB$,
т.к. CU - бис-са $\angle BAC$),

$$\frac{AC}{AX} = \frac{AY}{AB} = \frac{CY}{XB}$$

т.к. AU - бис-са $\Rightarrow \frac{CY}{YB} = \frac{AC}{AB}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Мн. стр 3

$$\frac{IB}{NC} = \frac{IK}{NB_1} = \frac{KB}{CB_1} \quad (\triangle CNB_1 \sim \triangle BIK)$$

$$\frac{IL}{MC_1} = \frac{CL}{BC_1} = \frac{CI}{BM} \quad (\triangle BMC_1 \sim \triangle CIL)$$

$$\frac{CI}{IB} = \frac{CN}{BM} \quad (\triangle CIN \sim \triangle BIM)$$

$$XI = XC = XB$$

$$CN = NI = NA; \quad AM = BM = MI \quad \forall \text{ по лемме о}$$

треугольнике.

$$\frac{IK}{NB_1} = \frac{N}{2}; \quad \frac{IL}{MC_1} = \frac{N}{4,5} \quad \left(\begin{array}{l} \text{т.к. } IK = IL = \\ = N \text{ впис} \\ MB_1 = 2; MC_1 = 4,5 \end{array} \right)$$

$$\frac{IB}{NC} = \frac{N}{2}; \quad \frac{CI}{BM} = \frac{N}{4,5}$$

$$IB = \frac{NC \cdot N}{2}; \quad CI = \frac{BM \cdot N}{4,5} \Rightarrow \frac{CI}{IB} = \frac{BM \cdot N}{NC \cdot N} = \frac{BM}{NC} = \frac{4}{9}$$

$$\text{т.к. } \frac{CI}{IB} = \frac{CN}{BM} \Rightarrow \frac{BM}{NC} = \frac{4}{9} = \frac{CN}{BM} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{BM}{CN} \right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{3}{2} \quad (\text{т.к. } \frac{BM}{CN} > 0)$$

$$\triangle CNI - \text{р.б} \quad \triangle BMI - \text{р.б}$$

$$\angle NCI = \angle NCA + \angle ACI = \angle NBA + \angle ABM =$$

$$= \angle IBA + \angle ABM = \angle IBM \Rightarrow \angle NIC = \angle BIM$$

$$\Rightarrow \triangle NCI \sim \triangle MBI \Rightarrow \frac{CI}{BI} = \frac{CN}{BM} = \frac{2}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{BI}{NC} = \frac{M}{2} \Rightarrow \frac{BI}{NI} = \frac{M}{2} \Rightarrow BI = \frac{NI \cdot M}{2}$$

$$\text{D.K. } \frac{CI}{BI} = \frac{2}{3} \Rightarrow BI = \frac{3CI}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3CI = NI \cdot M$$

$$BI = \frac{NI \cdot M}{2}$$

$$\frac{AI}{IB} = \frac{NA}{XI} \quad (1) \Rightarrow AI = \frac{IB \cdot NA}{XI} =$$

$$= \frac{NI \cdot M \cdot NA}{2XI} = \frac{NA^2 \cdot M}{2XI} = \frac{NA^2 \cdot M}{2XB}$$



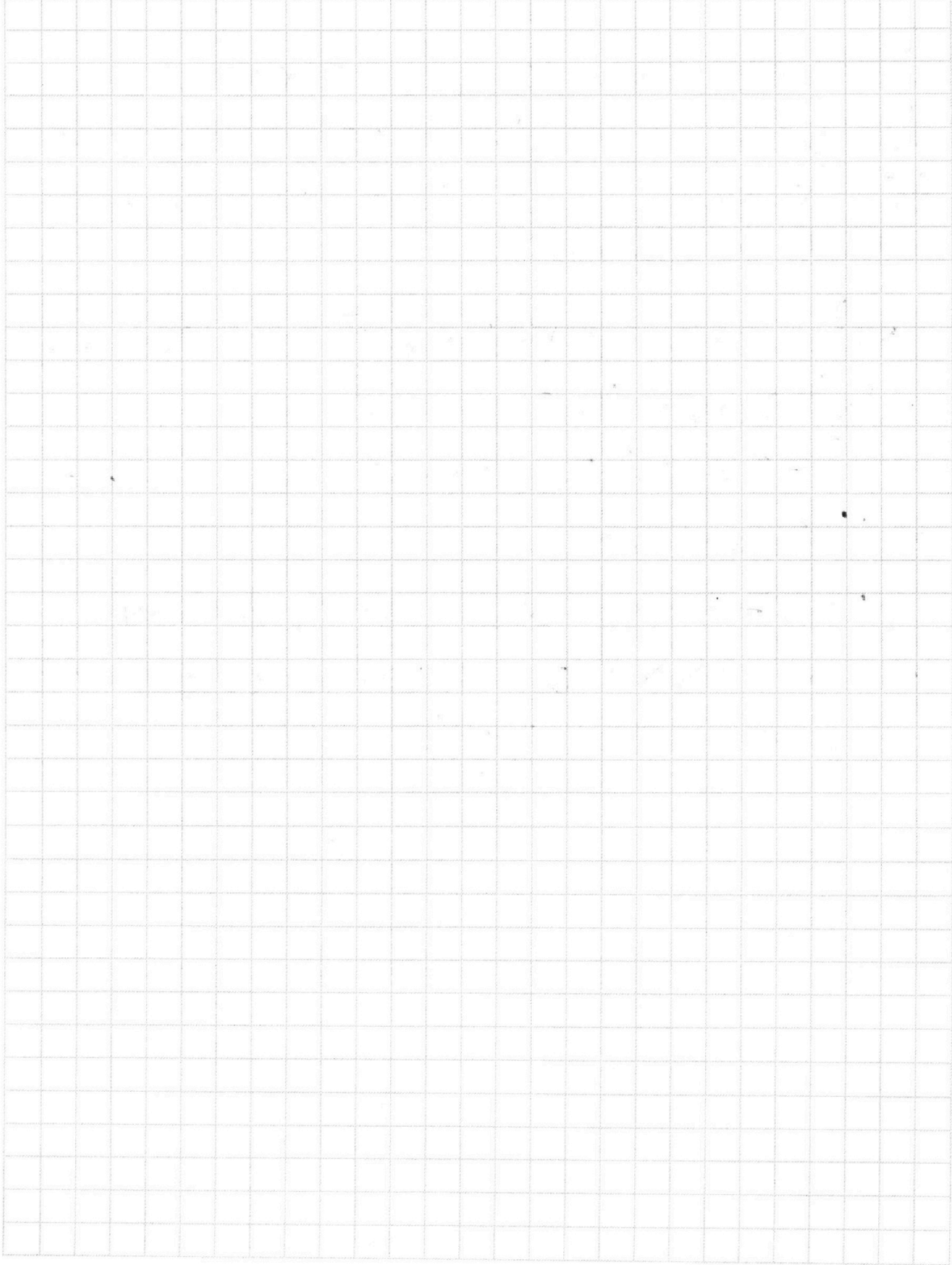
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 4 - 28x + 49x^2$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 4 - 28x + 49x^2$$

$$-45x^2 + 25x = 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$$

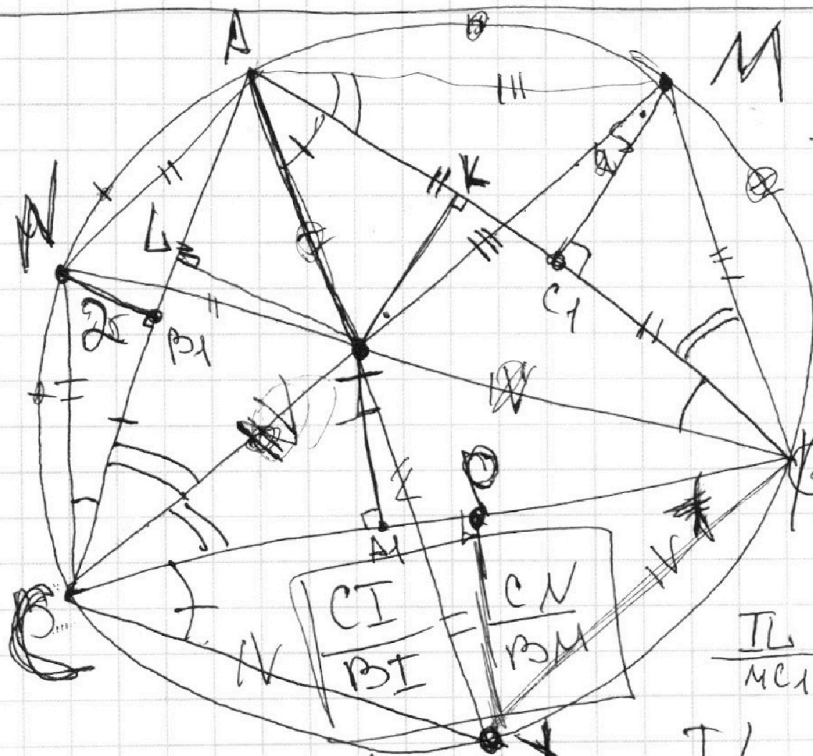
$$-45x^2 + 25x \geq 0 \quad 5(9x^2 - 5x) \leq 0$$

$$9x^2 - 5x \leq 0 \quad x(9x - 5) \leq 0 \quad x \in [0; \frac{5}{9}]$$

$$2025x^4 + 625x^2 - 2250x^3 = 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$2025x^4 + 625x^2 - 2250x^3 = 16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12$$

$$2009x^4 - 2246x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$



$$\frac{IB}{NC} = \frac{IK}{NB_1}$$

$$\frac{IB}{NC} = \frac{IK}{NB_1}$$

$$= \frac{KB}{CB_1}$$

$$\frac{IB}{NC} = \frac{IK}{NB_1} = \frac{KB}{CB_1} = \frac{R}{2}$$

$$\frac{IL}{MC_1} = \frac{CL}{AC_1} = \frac{CI}{AM} = 4,5$$

$$CIL \sim AMC_1 \Rightarrow \frac{IL}{MC_1} = \frac{CL}{AC_1} = \frac{CI}{AM}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

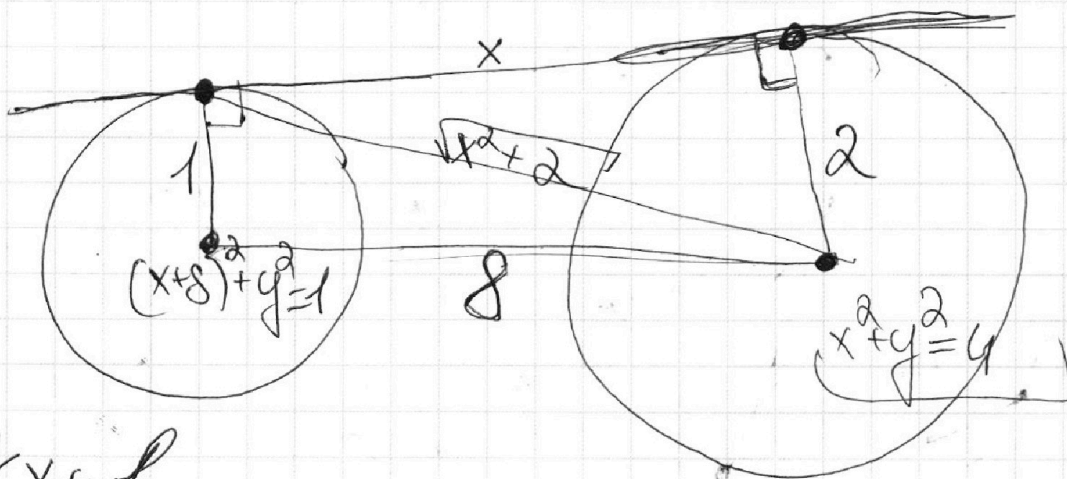
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



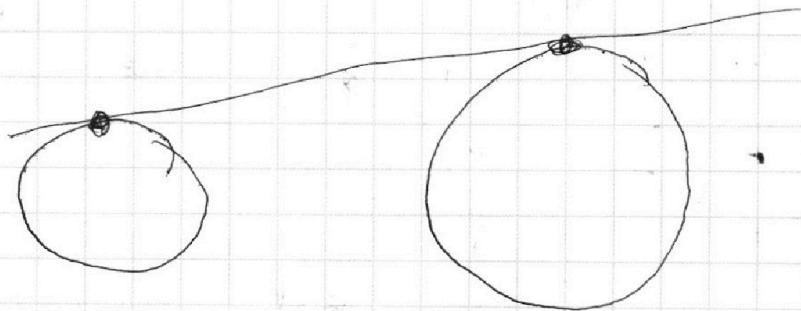
$$\frac{IB}{NC} = \frac{M}{2}, \quad \frac{CI}{BM} = \frac{M}{4,5}$$
$$IB = \frac{NC \cdot M}{2}, \quad CI = \frac{BM \cdot M}{4,5}$$
$$\frac{CI}{IB} = \frac{BM \cdot M}{4,5} \cdot \frac{2}{NC \cdot M} = \frac{BM \cdot 2}{4,5 \cdot NC} = \frac{BM}{NC} \cdot \frac{4}{9}$$

$$\frac{BM}{NC} \cdot \frac{4}{9} = \frac{CN}{BM} \Rightarrow \sqrt{\frac{BM}{CN}} = a \Rightarrow a \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{a} \Rightarrow$$
$$= \frac{4a}{9} = \frac{1}{a} = 4a^2 = 9 = a^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \text{ (т.к. } a > 0)$$



$$y = kx + b$$

$$kx_1 + b =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$x = 1,5$$

$$x = 1$$

$$2x^2 + 2x + 1 > 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) + x^2$$

$$(25+1)^2 = 625+50+1$$

$$(x-1)(2x-3)$$

$$12 \cdot 44 = 12(48-1) = 576 - 12 = 564$$

$$12 \cdot 48 - 12 = 576 - 12 = 564$$

$$12 \cdot 12 \cdot 4 - 12 = 144 \cdot 4 - 12 = 576 - 12 = 564$$

$$900 - 12 \cdot 44 = 900 - 528 = 372$$

$$\frac{35}{9}$$

$$\frac{24}{4\sqrt{21}}$$

$$\frac{1}{44}$$

$$\frac{194}{44}$$

$$\frac{42}{4}$$

$$\frac{546}{72}$$

$$\frac{49x^2 + 4x - 26}{x^2 + 3}$$

$$\frac{336}{2} = 168$$

$$\frac{168}{2} = 84$$

$$\frac{84}{2} = 42$$

$$\frac{42}{2} = 21$$

$$\frac{68}{2} = 34$$

$$\frac{34}{2} = 17$$

$$\frac{564}{12} = 47$$

$$\frac{336}{12} = 28$$

$$\frac{28}{2} = 14$$

$$\frac{14}{2} = 7$$

$$\frac{168}{8} = 21$$

$$\frac{21}{3} = 7$$

$$X = \frac{30 \pm 2\sqrt{83}}{44}$$

$$r + p \cdot 9 - 6h = 94$$

$$r = 9, p = 0$$

$$225 - 83 = 142$$

$$2\sqrt{21} \cdot X = \frac{15 \pm \sqrt{83}}{44}$$

$$44 \left(X - \frac{15 + \sqrt{83}}{44} \right)$$

$$\left(X - \frac{15 - \sqrt{83}}{44} \right)$$

$$-15x + \sqrt{83}x$$

$$-15x - \sqrt{83}x$$

$$44x^2 - 44x$$

$$\frac{15 - \sqrt{83}}{44} + \frac{15 + \sqrt{83}}{44}$$

$$\frac{639}{612}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{15 + 2\sqrt{21}}{44}$$

$$\frac{15 - 2\sqrt{21}}{44}$$

$$\frac{15 + 2\sqrt{21}}{44}$$

$$\frac{15 + 2\sqrt{21}}{44}$$

$$(50-1)^2 = 2500 - 100 + 1$$

$$\frac{15 - \sqrt{81}}{44}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{AR} = \frac{b}{AR}$$

$$\frac{3499}{3548}$$



$$\frac{15 - \sqrt{81}}{44} < \frac{15 - 9}{44} = \frac{15 - 9}{44}$$

$$\frac{6}{44} < \frac{1}{4}$$

$$X \in (-\infty; \frac{2}{4}]$$

$$X \in (-\infty; \dots)$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 49x^2 + 2x + 1 - 10\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 28$$

$$49x^2 + 4x + 2 + 2x - 28 = 10\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 + 9x - 26 = 10\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49 \cdot 2401x^4 + \dots$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 4x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 49x^2 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 14x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 49x^2 + 2x + 1 + 10\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 28 - 14x$$

$$9551$$

$$9551$$

$$966x$$

$$966x$$

$$966x$$