



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

Заметим, что $ac \geq 7^{37} \cdot k$, где $k \in \mathbb{N}$
 Пусть степень входящих 7 в $ac = 37$, т.к. меньше быть не может (из неравенства)
 тогда $ac : 2^{20}$
 $bc : 2^{17}$
 $ab : 2^{14}$

Пусть степень входящих 2^{ki} в число $b =$:

- 1) $0 \Rightarrow$ ст. вх. 2^{ki} в $c \geq 17$; в $a \geq 14$; \sum степеней $2^{ki} \geq 31$
- 2) $1 \Rightarrow 11-11=0$. $c \geq 16$; $a \geq 13$; $\sum \geq 30$
- 3) $2 \Rightarrow \dots c \geq 15$; $a \geq 12 \Rightarrow \sum \geq 29$
- 4) $3 \Rightarrow \dots c \geq 14$; $a \geq 11 \Rightarrow \sum \geq 28$
- 5) $4 \Rightarrow \dots c \geq 13$; $a \geq 10 \Rightarrow \sum \geq 27$
- 6) $5 \Rightarrow \dots c \geq 12$; $a \geq 9 \Rightarrow \sum \geq 26$
- 7) $6 \Rightarrow \dots c \geq 11$; $a \geq 8$, но при минимальных c и a ; $ca = 2^{19} \cdot 2^{20}$
 \Rightarrow 7 пункта быть не может

($c \geq k$; $a \geq m$ означает, что степень двойки, входящий в число c и $a \geq k$ и m соответств.)

$\Rightarrow \min \sum$ степеней 2^{ki} в числе $abc = 26$
 $\Rightarrow \min abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

пример:

~~$a = 2^{14} \cdot 7^{10}$, $b = 2^{17} \cdot 7^{17}$, $c = 2^{20} \cdot 7^{37}$~~

$b = 2^5$; $a = 2^9 \cdot 7^{20}$; $c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

$ab = 2^{14} \cdot 7^{20} : 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{17} : 2^{17} \cdot 7^{17}$
 $ac = 2^{21} \cdot 7^{37} : 7^{37} \cdot 2^{20}$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} \cdot \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

нужно $a+b \div k$, тогда $a^2-6ab+b^2 \div k$.

$$(a+b)^2 \div k \Rightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2 \div k & (1) \\ a^2-6ab+b^2 \div k & (2) \end{cases}$$

вычитаем из (2) - (1)

$$\begin{aligned} -6ab - 2ab &\div k \\ 8ab &\div k \\ a+b &\div k. \end{aligned}$$

нужно $a+b \div 8ab$, тогда $a+b \div a$, но т.к. $(a,b)=1$; $b \nmid a$,
но $a \div a \Rightarrow$ такого быть не может.

тогда нужно $8ab \div a+b$

$$8ab = k(a+b)$$

$$8ab = ka + kb$$

$$b(8a - k) = ka$$

$$b = \frac{ka}{8a-k} \in \mathbb{N}$$

$$b = -a + \frac{8a^2}{8a-k}$$

$$8a^2 \div 8a-k$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

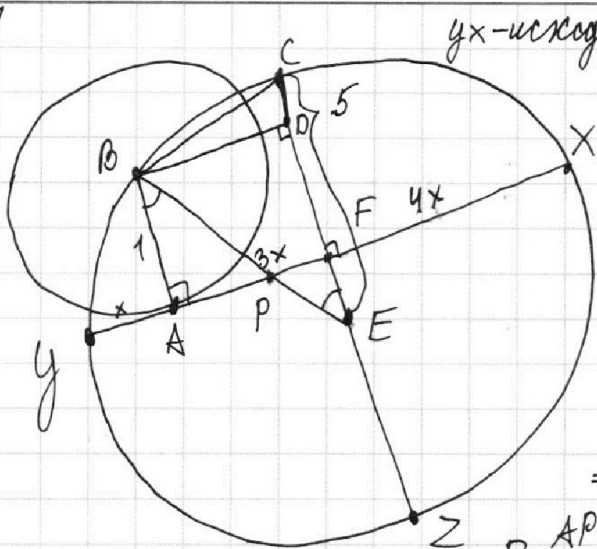
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.



yx-исходная хорда.
EC=EB=5.

AB=1.

Пусть PB=k.
тогда AP²=PB²-AB²=k²-1.
ΔBDE ~ ΔPAB

$$\frac{BD}{PA} = \frac{DE}{AB} = \frac{BE}{PB}$$

$$\frac{DE}{1} = \frac{5}{k} \Rightarrow DE = \frac{5}{k}$$

$$\Rightarrow CD = 5 - DE = 5 \left(\frac{k-1}{k} \right)$$

$$AP = \sqrt{BP^2 - 1} = \sqrt{k^2 - 1}$$
$$\frac{BD}{AP} = \frac{BE}{PB} \Rightarrow BD = \frac{5 \cdot \sqrt{k^2 - 1}}{k}$$

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = \frac{25(k^2-1)}{k^2} + 25 \frac{(k-1)^2}{k^2} = \frac{25}{k^2} (k^2-1 + k^2 - 2k + 1) = \frac{50(k^2-k)}{k^2}$$

$$= \frac{50(k-1)}{k} \quad BD = AF = 3x = \frac{5\sqrt{k^2-1}}{k} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{k^2-1}}{3k}$$

$$PE = 5 - BP = 5 - k \Rightarrow \frac{FE}{1} = \frac{PE}{BP} \Rightarrow FE = \frac{5-k}{k}$$

$$CF = 5 - \frac{5-k}{k} = \frac{6k-5}{k}$$

$$4x \cdot 4x = CF \cdot FZ = \frac{6k-5}{k} \cdot \left(5 + \frac{5-k}{k} \right) = \frac{(6k-5)(4k-5)}{k^2}$$

$$16 \frac{25(k^2-1)}{(3k)^2} = \frac{(6k-5)(4k-5)}{k^2}$$

- заметим, что это квадратное уравнение относительно k, найдем его, мы сможем найти x ⇒ найдем yx.

$$\frac{16 \cdot 25(k^2-1)}{9} = \frac{24k^2 - 50k + 25}{1}$$

$$16 \cdot 25(k^2-1) = 9 \cdot 24k^2 - 450k + 225$$

$$k^2 (16 \cdot 25 - 9 \cdot 24) + 450k - 16 \cdot 25 - 225 = 0$$

$$184k^2 + 450k - 625 = 0$$

$$D = 662500 = 5 \cdot 10 \sqrt{265}$$

$$k = \frac{-450 \pm 50 \sqrt{265}}{368}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4. $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$ $\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ (2x-3)(x-1) \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2+2x+1 \geq 0 \\ D=4-8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{всегда } \geq 0$

Пусть $2x^2+2x+1=a$.

$\sqrt{a+2-7x} - \sqrt{a} = 2-7x$

$\sqrt{a+2-7x} = \sqrt{a} + 2-7x$

Возведем в квадрат:

$a+2-7x = a + (2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{a}$

$(2-7x)^2 + (2-7x)(2\sqrt{a}-1) = 0$

1) $2-7x=0$

$x = \frac{2}{7}$ подставим: $\sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3} - \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{4}{7} + 1} = 2-2$

$2-7x + 2\sqrt{a}-1=0$

$7x-2 = 2\sqrt{2x^2+2x+1} - 1$

$7x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$

$41x^2 - 22x - 3 = 0$

$D = 22^2 + 4 \cdot 41 = 484 + 164 = 648 = 16 \cdot 61$

$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$

$\frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \approx \frac{11 + 16}{41} =$

$= \frac{27}{41}$ - уд. усе.

$\Rightarrow \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$ тоже удов. усе.

Рассмотрим строгую:

$7x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$7x-1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{7}$; $\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7} \Rightarrow$ данный корень отпадает.

Рассмотрим строгую:

$2-7x + \sqrt{a} = \sqrt{a+2-7x}$

$2-7x + \sqrt{a} \geq 0$

$7x-2 \leq \sqrt{a}$

1) $x \leq \frac{2}{7}$ (подходят)

2) $x > \frac{2}{7}$:

$49x^2 - 28x + 4 \leq 2x^2 + 2x + 1$

$47x^2 - 30x + 3 \leq 0$

$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 12 \cdot 47}}{94} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 564}}{94} = \frac{30 \pm \sqrt{336}}{94} \approx \frac{30 \pm 18}{94}$

$x_1 > 7$ корень, полученный в п.2.

$x_1 = \frac{30+18}{94} = \frac{48}{94}$

$\frac{48}{94} > \frac{27}{41}$

$\frac{24}{47} > \frac{27}{41}$, а это не так \Rightarrow корень не подходит.

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

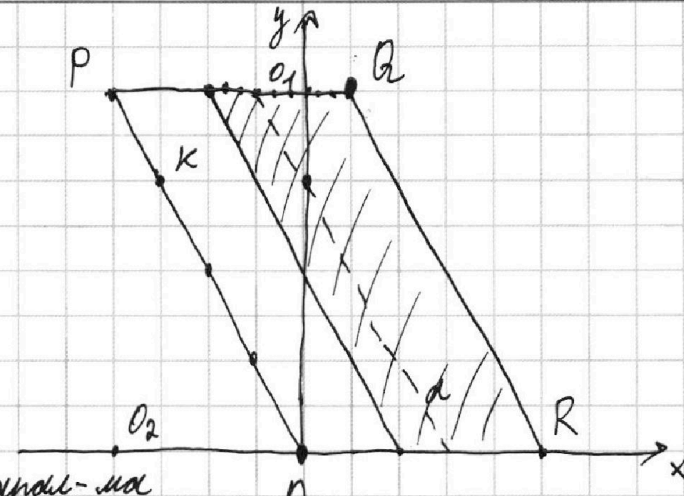
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

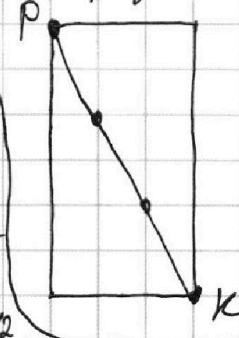
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Для начала найдем ка-во точек на границе нашего паралл-ма
 $PO_1 = \frac{1}{2} PO_2 \Rightarrow PO_1$ проходит через т.К
 Рассмотрим РК вблизи:

Заметим, что если зафиксировать т. В, то точки А, а точнее их координ. будут удовлетворять уравнению прямой.



Заметим, что на отр. РК лежит 2 точки с целочисл. координатами.
 \Rightarrow на пр. PO лежит $4 \cdot 3 + 1$ точек с целочисл. координ.

$$2x_2 - 2x_1 + 4y_2 - 4y_1 = 12$$

Рассмотрим т. В. Пусть это наша т. В. тогда все точки, лежащие на прямой в удовлетворяют условию. Заметим, что пр. а || стороне параллелограмма \Rightarrow проходит так же через $4 \cdot 3 + 1 = 13$ точек с целочисленными коорд. \Rightarrow для каждой т. В, лежащей в заштрихованной области, найдется 13 т. А. Если т. В не в заштрихованной обл., то т. А не суще.

Площадь заштрихов. области = $(3 \cdot 3) \cdot (8 \cdot 3) = 9 \cdot 24 = 216$

По формуле Эйлера: $P + \frac{i}{2} - 1 = 216$, где P - # т. на границе.

$$P = 13 + 13 + 8 + 8 = 26 + 16 = 42$$

$$\frac{i}{2} = 217 - 42 = 175$$

$$\Rightarrow i = 350 \Rightarrow i \cdot 13 = 350 \cdot 13 = 4550$$

нар т. А и В

Ответ: 4550

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

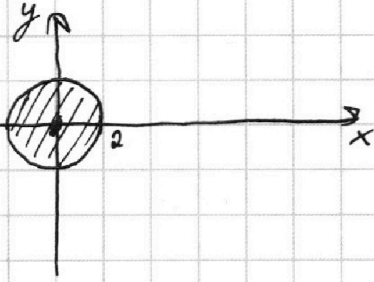


№6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Это уравнение окружности с центром в т. $(-8; 0)$ и $r = 1$

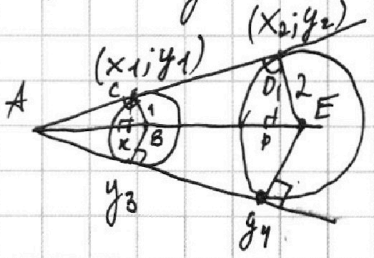
Это уравнение окружности с центром в т. $(0; 0)$ и $r = 2$



Заметим, что первое уравнение — это прямая.

2-е неравенству удовлетворяет область штриховкой зона.

Прямая должна иметь с 2-мя окружностями 2 общие точки \Rightarrow они должны являться касательной.



точки касания имеют коор. $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$

$\Delta ABC \sim \Delta AED \Rightarrow \frac{CB}{DE} = \frac{AB}{AE}$

$BE = AB = 8$

Опустим высоту из т. C и т. D на $AE = T$. К т. P.

$\frac{CK}{CB} = \frac{AC}{AB}; \frac{DP}{DE} = \frac{AD}{AE}$

$$CK = \frac{AC \cdot 1}{8} = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$DP = \frac{AD \cdot 2}{16} = \frac{2\sqrt{63}}{8}$$

$$AC^2 + CB^2 = AB^2$$

$$AC = \sqrt{63}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{63}}{8}; y_2 = \frac{2\sqrt{63}}{8}$$

$$AD^2 + DE^2 = AE^2$$

$$AD = 2\sqrt{63}$$

$$x_1 = 8 + KB = -8 + \sqrt{1 - \frac{63}{64}} = -8 + \frac{1}{8} = -8\frac{1}{8}$$

$$x_2 = -\left(\sqrt{4 - \frac{4 \cdot 63}{64}}\right) = -\sqrt{\frac{256 - 252}{64}} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

y_3 и y_4 симметричны y_1 и y_2 — соответственно.

подставляем в формулу 1 из системы:

$$\begin{cases} a(-8\frac{1}{8}) - \frac{\sqrt{63}}{8} + 10b = 0 \\ a(-\frac{1}{4}) - \frac{2\sqrt{63}}{8} + 10b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2(-8\frac{1}{8}) - (-\frac{1}{4}))a + 10b = 0 \\ (2 \cdot (-\frac{65}{8}) + \frac{1}{4})a + 10b = 0 \\ (-\frac{64}{4})a + 10b = 0 \\ 10b = 16a \end{cases}$$

$$a(-8\frac{1}{8}) - \frac{\sqrt{63}}{8} + 16a = 0$$

$$a(16 - \frac{65}{8}) = \frac{\sqrt{63}}{8} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{63}}{8 \cdot \frac{63}{8}} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

при y_3 и y_4 , коэф. $a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

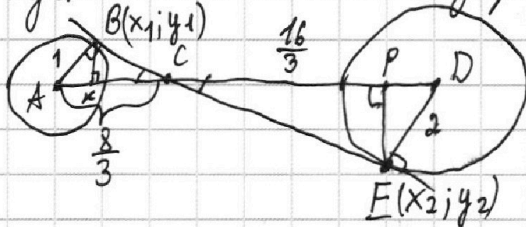
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (продолжение)

пусть касательные внутренние: $\frac{16}{3}$ и $\frac{8}{3}$ из подобия \triangle (см. рисунок)



(BK - высота - PE)

$$\frac{BK}{AB} = \frac{BC}{AC}$$

$$BK = \frac{BC \cdot 1}{\frac{8}{3}}$$

$$BC^2 = \frac{64}{9} - \frac{9}{9} = \frac{55}{9}$$

$$BC = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$\Downarrow BK = \frac{\sqrt{55}}{8} = 4$$

$$(x_1 + 8)^2 + y_1^2 = 1$$

$$(x_1 + 8)^2 = 1 - \frac{55}{64} = \frac{9}{64}$$

$$(x_1 + 8)^2 = \frac{9}{64} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{8} - \frac{64}{8} = -\frac{61}{8}; y_1 = \frac{\sqrt{55}}{8};$$

$$\frac{PE}{DE} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow PE = \frac{CE \cdot DE}{CD} = \frac{2CE}{CD} \text{ (по подобию)}; PE = 2BK = \frac{\sqrt{55}}{4}$$

$$x_2^2 + \frac{55}{16} = 4$$

$$x_2^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{4} \text{ (отриц. зн. по рисунку)}; y_2 = -\frac{\sqrt{55}}{4}$$

подставим (y_1, x_1) и (y_2, x_2) в 1^{ое} уравн. прямой.

$$\left. \begin{aligned} a\left(-\frac{61}{8}\right) - \frac{\sqrt{55}}{8} + 10b &= 0 \\ a\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{55}}{4} + 10b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(-\frac{61}{4}\right)a + 20b + \left(-\frac{3}{4}\right)a + 10b = 0$$

$$\left(-\frac{64}{4}\right)a = -30b$$

$$16a = 30b$$

$$10b = \frac{16}{3}a$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{3}{4}\right)a + \frac{\sqrt{55}}{4} + \frac{16}{3}a = 0.$$

$$a\left(\frac{16}{3} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{\sqrt{55}}{4}$$

$$a\left(\frac{64-9}{12}\right) = -\frac{\sqrt{55}}{4} \Rightarrow a = -\frac{12\sqrt{55}}{4 \cdot 55} = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

при симметричных y_1, y_2 относительно прямой OX

значение a стоит противонаправленным по знаку.

$$\Rightarrow \text{Ответ: } a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}; a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Р. $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 ab &: 2^{11} \cdot 7^{10} \\
 ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \\
 bc &: 2^{17} \cdot 7^{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 abc &: 2^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot k \\
 a &= 2^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot k \\
 b &= 2^{b_1} \cdot 7^{b_2} \cdot p \\
 c &= 2^{c_1} \cdot 7^{c_2} \cdot q
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\alpha + 2 - 7x = (2 - 7x)^2 + \alpha + \sqrt{\alpha^2}$$

$$\begin{cases}
 a_1 + b_1 = 14 \\
 b_1 + c_1 = 17 \\
 a_1 + c_1 = 20
 \end{cases}$$

~~~~~

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc : 2^{10} \cdot 7^3$$

$$\begin{cases}
 2b_1 =
 \end{cases}$$

$\sqrt{4}$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\sqrt{2(x^2-2x+1)-x+1} - \sqrt{2(x^2+2x+1)-2x-1} = 2-7x$$

$$\sqrt{2(x-1)^2 - (x-1)} - \sqrt{2(x+1)^2 - (2x+1)} = 2-7x$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$D = 4 - 8$$

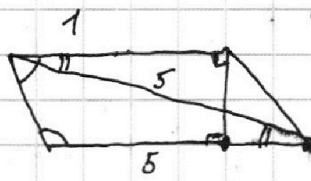
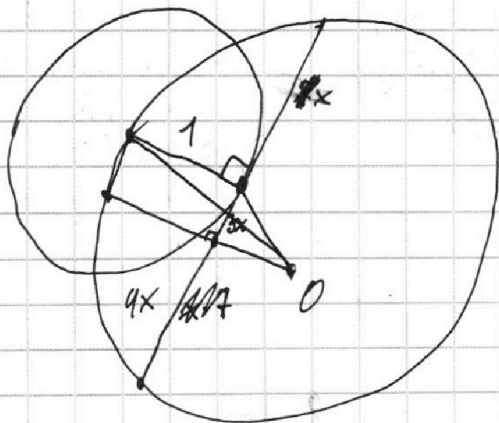
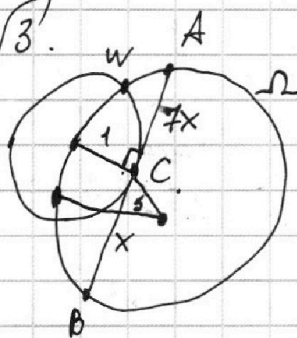
$$x = \frac{5 \pm 1}{4} = 1$$

$$\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{x^2+(x+1)^2} = 2-7x$$

$$\begin{aligned}
 &x^2 - 2x + 1 + x^2 - 3x + 2 \\
 &= (x-1)^2 + (x^2 - 2x + 1)
 \end{aligned}$$

$$\frac{27}{41}$$

$\sqrt{3}$



$\sqrt{2}$

$\frac{a}{b}$  - к.с.

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

7.

$$\frac{27}{41}$$

$$\frac{48}{94} = \frac{24}{47}$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)} = 4 - 28x$$

$$45x^2 - 25x = -2\sqrt{(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)}$$

$$5x(9x - 5) = -2\sqrt{\dots}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 - 2x + 1) + 6x - 1$$

$$2(x^2 - 2x + 1) - x - 1$$

$$\sqrt{\alpha + 2 - 7x} - \sqrt{\alpha} = 2 - 7x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{a-7x+2} - \sqrt{a} = 2-7x.$$

$$a - (7x+2) = (2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{a} + a$$

$$\sqrt{5}. (2-7x)^2 + (2-7x)(2\sqrt{a}+1) = 0.$$

$$\begin{cases} 2-7x=0 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$2-7x = -2\sqrt{a}-1.$$

$$2-7x+1 = -2\sqrt{a}.$$

$$7x-3 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}.$$

$$49x^2 - 92x + 9 = 8x^2 + 8x + 4.$$

$$41x^2 - 50x + 5 = 0.$$

$$D = 2500 - 20 \cdot 41 = 820$$

$$\frac{-1680 \pm \sqrt{820}}{82}$$

$$\frac{(2x-3)(x-1)}{x}$$

$$2x^2 + 2x + 17$$

$$\frac{90}{32}$$

$$\frac{10}{32}$$

$$\frac{47}{12}$$

$$\frac{47}{56}$$

$$\frac{47}{16 \cdot 105}$$

$$x = \frac{50 \pm 4\sqrt{65}}{82}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \leq \frac{30 \pm (23-24)}{94}$$

$$a+b : k$$

$$a^2+2ab+b^2 : k^2$$

$$2(x_2-x_1) + (y_2-y_1) = 12. a^2-6ab+b^2 : k$$

$$\frac{-4ab : k}{4ab : k} = \frac{99+4\sqrt{61}}{82}$$

$$a+b : k$$

$$564$$

$$484$$

$$\frac{11}{121}$$

$$\frac{12}{41}$$

$$\frac{18}{48}$$

$$\frac{18}{492}$$

$$\frac{18}{96}$$

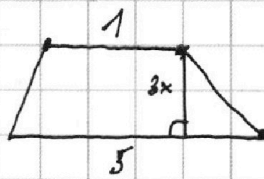
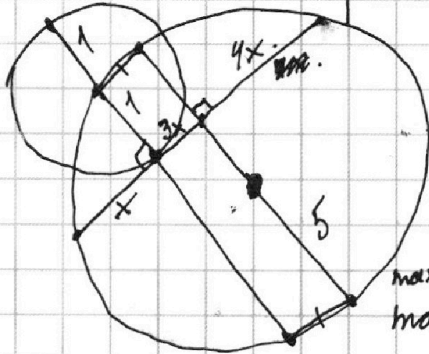
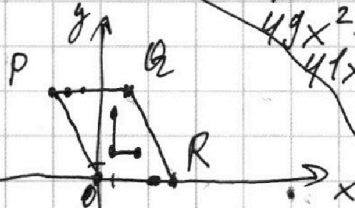
$$\frac{16}{96}$$

$$\frac{16}{16}$$

$$7x-270$$

$$7x \geq 272$$

$$x \geq \frac{272}{7}$$



$$\max x_2 - x_1 = 27$$

$$\max y_2 - y_1 = 24$$

$$x_2 - x_1 = 10$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$7x - 170$$

$$x \geq \frac{170}{7}$$



$$a = 2 \cdot \left( \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \right)^2 + 2 \left( \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \right) \geq 1. \sqrt{a-7x+2} \geq 0$$

$$2-7x \geq \sqrt{a} \geq 7x-2$$

$$7x-270$$

$$7x \geq 272$$

$$x \geq \frac{272}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

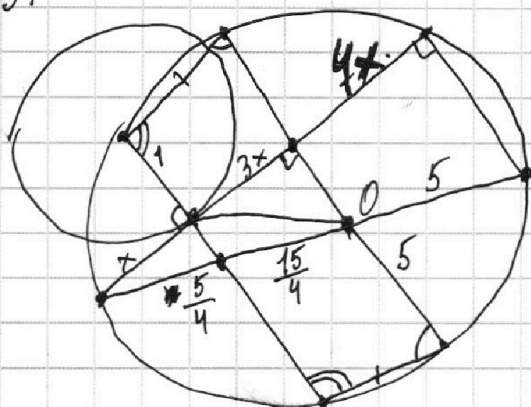
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$



н.п.

$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \end{aligned}$$

$$abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$b = 1.$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \quad \times$$

$$c = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$abc = 2^{27} \cdot 7^{37}$$

$$b = 2$$

$$a \geq 2^{13} \cdot 7^{10}$$

$$c \geq 2^{16} \cdot 7^{17}$$

$$abc \geq 2^{31} \cdot 7^{27}$$

$$\begin{array}{r} \times 350 \\ 13 \\ \hline 1050 \\ + 35 \\ \hline 4550 \end{array}$$

$$\frac{k}{x} = \frac{5}{4x}$$

$$4kx = 5x$$

$$k = \frac{5}{4}$$

$\sqrt{6}$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 = 1) \cap (x^2 + y^2 = 4) \end{cases}$$

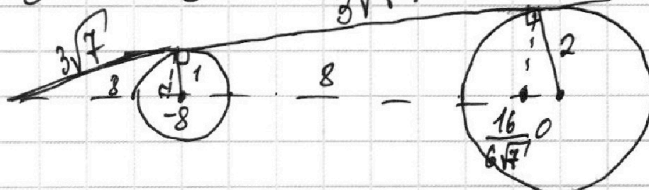
$$((x+8)^2 + y^2 = 1) \cap (x^2 + y^2 = 4) \leq 0$$

$$\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{1}{x}$$

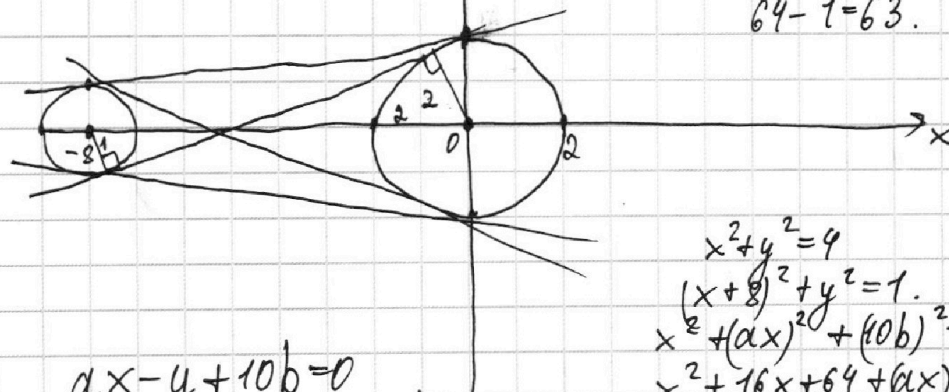
$$x = \frac{8}{3\sqrt{7}}$$

н.п.

$$9 \cdot 24 = 216$$



$$64 - 1 = 63.$$



$$\begin{aligned} ax - y + 10b &= 0 \\ y &= ax + 10b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ (x+8)^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 + (ax)^2 + (10b)^2 + 20abx &= 4 \\ x^2 + 16x + 64 + (ax)^2 + 20abx + 100b^2 &= 1 \\ x^2(1+a^2) + x(20ab) + (100b^2 - 4) &= 0 \end{aligned}$$



$$P + \frac{i}{2} n - 1 = 216.$$

$$46 - 1 + \frac{i}{2} = 216.$$

$$2(13+10) + \frac{i}{2} - 1 = 216.$$

$$45 + \frac{i}{2} = 216.$$

$$\frac{-216}{45} = 342.$$

$$171$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

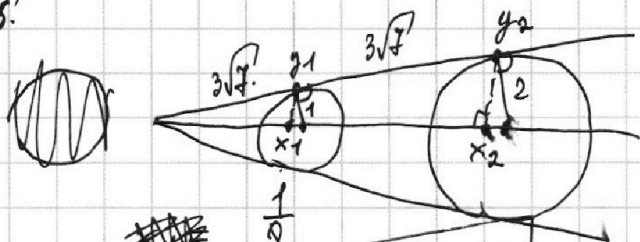
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5.



$$x_1 = -8 \frac{1}{8}$$

$$x_2 = -\frac{2}{8} \cdot \frac{256}{252}$$

$$\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{8}{3\sqrt{7}}$$

$$x = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\frac{64}{63} + \frac{63}{64} = \frac{x}{2} = \frac{6\sqrt{7}}{16}$$

$$x = \frac{6\sqrt{7}}{8}$$

$$\frac{36 \cdot 7}{64} + k^2 = 4$$

$$\frac{252}{64} + k^2 = 256$$

$$\frac{4}{64} = \frac{2}{8}$$

$$1 - (x+8)^2 = y^2$$

$$1 - \frac{1}{64} = y^2$$

$$y_1 = \pm \frac{3\sqrt{7}}{8} \quad y_2 = \pm \frac{6\sqrt{7}}{8}$$

$$\begin{cases} a \cdot (-\frac{65}{8}) - \frac{3\sqrt{7}}{8} + 10b = 0 \\ a \cdot (-\frac{2}{8}) - \frac{6\sqrt{7}}{8} + 10b = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{65}{8}a + 16a - \frac{3\sqrt{7}}{8} = 0$$

$$\frac{(128-65)a}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$-2a(\frac{65}{8}) + 10b + \frac{2}{8}a = 0$$

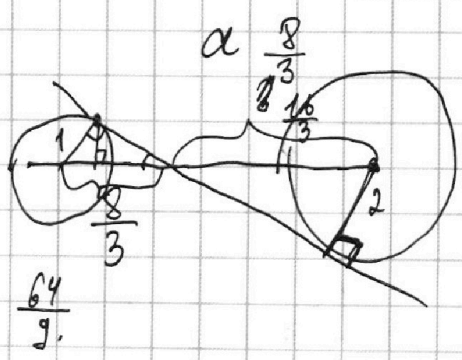
$$a = \frac{3\sqrt{7}}{63}$$

$$-\frac{65}{4}a + \frac{1}{4}a + 10b = 0$$

$$-16a + 10b = 0$$

$$10b = 16a$$

$$5b = 8a$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

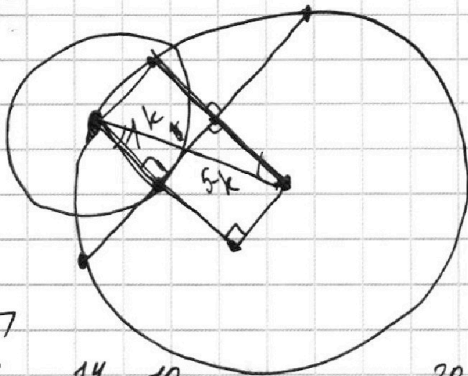
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

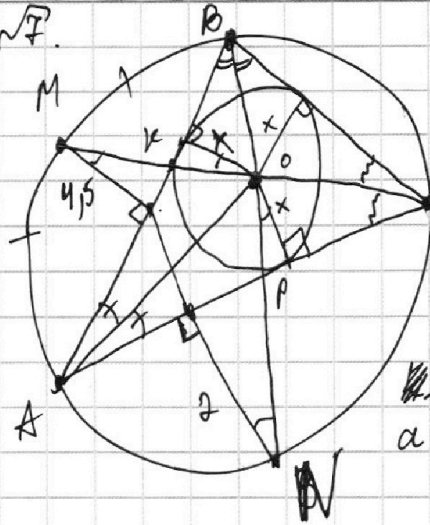
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№37



№7



$$\frac{2x}{5} = \frac{MK}{KO}$$

$$\frac{x}{4/5} = \frac{MK}{KO}$$

$$\frac{OP}{PN} = \frac{x}{2}$$

$$a(k-8b) + kb$$

$$8ab = k(a+b)$$

$$ka + kb - 8ab = 0$$

№7

$$ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$2^{21} \cdot 7^{37}$$

$$14 + 17 \leq 20 + k, b = 2$$

$$c \geq 2^{16} \cdot 7^{17}$$

ab  
bc

$$ac \geq 2$$

$$ac \geq 2^{20}$$

$$bc \geq 2^{17}$$

$$ab \geq 2^{14}$$

$$b = 2$$

$$ac = 7^{37}$$

$$1) b = 2$$

$$c \geq 2^{16} \leq 2^{20}$$

$$a \geq 2^{13}$$

$$2 \cdot 2^{(17-k)} \cdot 2^{(14-k)}$$

$$k = 8a - 1$$

$$ka \mid \frac{8a - k}{\frac{k}{8}}$$

$$b = 2$$

$$c = 15$$

$$z = 29$$

$$a$$

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| $b = 6$  | $b = 5$  | $b = 4$  |
| $c = 10$ | $c = 11$ | $c = 12$ |
| $a = 7$  | $a = 8$  | $a = 9$  |

$$abc \geq 2^{21} \cdot 7^{37}$$

$$b = 2$$

$$\frac{ka \mid 8a - k}{ka - 8a - a}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$a+b \mid k$$

$$a^2 - 6ab + b^2 \mid k$$

$$a^2 - 6ab + b^2 + a + b \mid k$$

$$a(a+1-3b) + b(b+1-3a)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \mid k$$

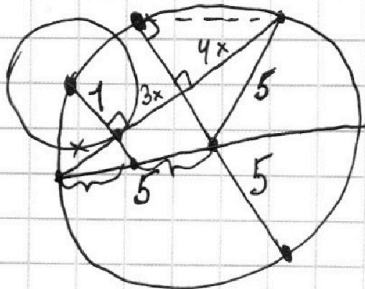
$$4ab \mid k$$

$$a+b \mid k$$

$$a \neq b$$

$$k \neq 2$$

№37



$$z \text{ и } k$$

$$k \text{ и } k$$

$$ab \mid k$$

$$a+b \mid k$$

$$a+b \mid 9ab$$

$$4ab \mid a+b$$

$$a+b \mid 8a-1$$

$$a^2 - 6ab + b^2 \mid 8a-1$$

$$4ab \mid k$$

$$a+b \mid k$$

$$a+b+2ab+2ab \mid k$$

$$a(2b+1)$$

$$a(1+b) + 1+b$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a+b:k$   
 $a^2-6ab+b^2:k$   
 №3.

$8ab:k$   
 $a+b:k$

$a^2-6ab+b^2:k$   
 $a^2-6ab+b^2-a-b:k$

$2a^2-4ab+2b^2:k$

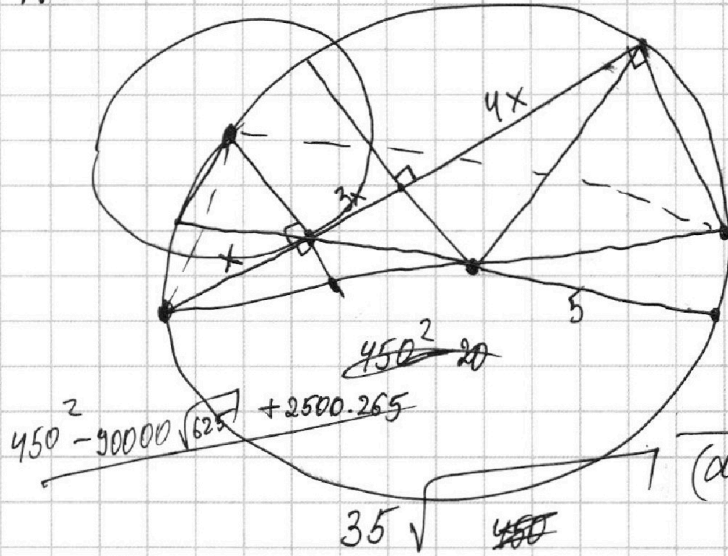
$2(a^2-ab+b^2):k$

$(a-b)^2:k$

$(a+b)^2:k$

$2b \cdot 2a:k$

$a = kp + d$      $b = d$   
 $kp$



$(a+b)$   
 $(a+b)^2 - 8ab$   
 $ab$      $a+b$

$8ab:a+b$

$8ab = k(a+b)$

$ka + kb = 8ab$

$ka = b(8a - k)$

$\frac{ka}{8a - k} = b$

~~$ka = b(8a - k)$~~      $k =$

~~$ka > 8a - k$~~

$a(k - 8) > -k$

$a > \frac{k}{8 - k}$

$\frac{5}{k} = \frac{x}{1}$

$x = \frac{5}{k}$

$25 - \frac{25}{k^2} = 25 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k^2 - 1}{k^2}$

$5 \sqrt{\frac{k^2 - 1}{k^2}} =$

$k^2 - 1$

$(k-1) \cdot (k+1) =$

$D = 450^2 + 2500 \cdot 184$

$CD = 5 - \frac{5}{k} = 5 \left(\frac{k-1}{k}\right)$

$\frac{16}{25}$   
 $\times 80$   
 $\frac{32}{400}$

$\times 625$   
 $\frac{4}{2500}$   
 $\frac{216}{184}$

$265 \overline{) 153}$

$\times 184$   
 $\times 45$   
 $\frac{225}{9200080}$   
 $\frac{1025}{460000}$

$6625 \overline{) 25}$   
 $\frac{50}{265}$   
 $\frac{150}{125}$

$202500 + 460000 =$   
 $= 662500$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

