МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{15}7^{11}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{18}$, $ac$ делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на $m$?

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности, которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot n$
$bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot m$
$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot k$

$(abc)^2 = 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+39+18} \cdot mnk = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot mnk$

$abc = 7^{34} \cdot \sqrt{2^{55} mnk}$

$abc_{min}$, когда $\sqrt{2^{55}mnk}$ - минимален и равен натуральному числу, (т.к. $abc$ - натуральное)

$7^{18} \cdot 7^{11} = 7^{29} < 7^{39} \Rightarrow acb^2 \geq ac$
$2^{15} \cdot 2^{17} = 2^{32} < 2^{23}$ $\quad m \cdot n \geq 7^{10} \cdot 2k$

~~$abc \geq 7^{34} \cdot 2^{28} \sqrt{7^{10} \frac{k^2}{b^2}} \geq ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot k$~~

~~$abc_{min}$, если $k=1$ $abc_{min} =$~~

$mn \geq 7^{10} \cdot 2k \Rightarrow abc \geq 7^{34} \cdot 2^{28} \cdot \sqrt{7^{10} \cdot k^2}$

$abc_{min}$, когда $k=1$ $\quad abc_{min} = 7^{39} \cdot 2^{28}$

Пример: $a = 7^{11} \cdot 2^{10}$
$b = 2^{6}$
$c = 7^{28} \cdot 2^{12}$

Ответ: $7^{39} \cdot 2^{28}$

№2.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = k = \frac{a+b}{(a-b)^2-5ab}$$

~~$\frac{1}{k} = a+b - \frac{9ab}{a+b}$~~

a ~~и b~~ $\frac{a}{b}$ - несократима => a и b - взаимнопростые

~~$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} \vdots b$~~

~~$\frac{n+1}{a\cdot a-7a+b}$~~

~~$(a+b) : m$, $((a+b)^2-9ab) : m$~~

~~$\Rightarrow 9ab : m$~~

~~$a \not{\vdots}\, m$, $b \not{\vdots}\, m$ (т.к. a и b взаимн. прост)~~

~~$9ab : m \Rightarrow 9 : m \Rightarrow m_{max} = 9$.~~

~~Ответ: $m = 9$~~

$a+b : m$
$((a+b)^2-9ab) : m$ } по усл. $a \not{\vdots}\, m$, $b \not{\vdots}\, m$ (т.к. a и b взаимн. прост)

$((a+b)^2-9ab) : m \Rightarrow 9ab : m \Rightarrow 9 : m \Rightarrow$

$\Rightarrow m_{max} = 9$

Ответ: $m = 9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

$\cancel{\sqrt{3x}}\ \sqrt{(x^2-2x+1)\cdot 3-1} - \sqrt{(x^2-2x+1)\cdot 3+9x-2} = 1-9x$

$1-9x = z$

$(x^2-2x+1)\cdot 3-1 = t$

$\sqrt{t} - \sqrt{t-z} = z$

$\cancel{t - 2\sqrt{t^2-tz} + t + z = z^2}$

$\cancel{t^2 - tz \geq 0}$

$\cancel{z^2 - z + 2\sqrt{t^2-tz} = 0}$

$\cancel{z^2(z-1)^2 = 4t^2-4tz}$

$\cancel{z^4 - 2z^3 + z^2 = 4t^2 - 4tz}$

$\cancel{\sqrt{3(x-1)^2-1} - \sqrt{(x-1)^2\cdot 3 - 1 + (9x-1)} = 1-9x}$

$1-9x = -(x-1)\cdot 9 - 8$

$\sqrt{t} - z = \sqrt{t-z}$

$t-z = t+z^2-2z\sqrt{t}$

$-z^2-z = -2z\sqrt{t}$

$z^2+z = 2z\sqrt{t}$

$\cancel{2\sqrt{t} = 1-z}$

$z^2+2z+1 = 4t$

$\cancel{4t = 1-2z+z^2}$

Подставим $z$ и $t$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1-9x)^2+2(1-9x)+1=12(x-1)^2-4$$

$$1+81x^2-18x+2-18x+1=12x^2-24x+12-4$$

$$69x^2-12x-4=0$$

$$x_{12}=\frac{12\pm\sqrt{144+69\cdot16}}{138}=\frac{12\pm\sqrt{1248}}{138}=\cancel{12\pm8\sqrt{33}}$$

$$=\frac{12\pm4\sqrt{78}}{138}=\frac{6\pm2\sqrt{78}}{69}$$

Ответ: $x_1=\frac{6+2\sqrt{78}}{69}$ $\quad x_2=\frac{6-2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Для I ~~неравенства~~ ур-я:

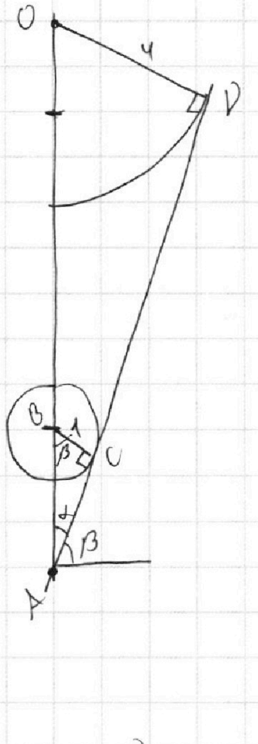
$ax + y - 8b = 0$

$y = -ax + 8b$ — ур-е прямой с угловым коэф. $-a$
$8b$ по условию — любое число

На графике с окружностями может быть только 4 прямые, имеющие 2 решения — касательные к окружностям.

В силу симметрии относительно $Oy$, наклоны прямых $k_1$ и $k_3$, $k_2$ и $k_4$ равны по модулю и разны отличаются знаком.

1.




$\triangle AOD \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{OD}{BC} = \dfrac{AO}{AB} = \dfrac{AB+BO}{AB}$

$4 = \dfrac{AB+12}{AB}$

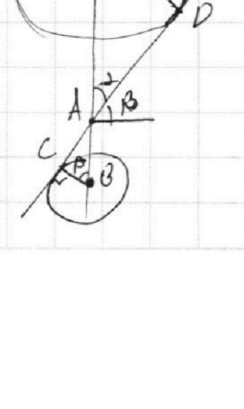
$3AB = 12$

$AB = 4$

$tg\,\beta = -a = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{16-1}}{1} = \sqrt{15}$

Наклон $k_2 = \sqrt{15}$, $k_4 = -\sqrt{15}$

2.




$\triangle ABC \sim \triangle AOD \Rightarrow \dfrac{OD}{CB} = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{12-AB}{AB}$

$5AB = 12$, $AB = 2{,}4$

$tg\,\beta = -a = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 1}}{1} = \dfrac{\sqrt{119}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6.

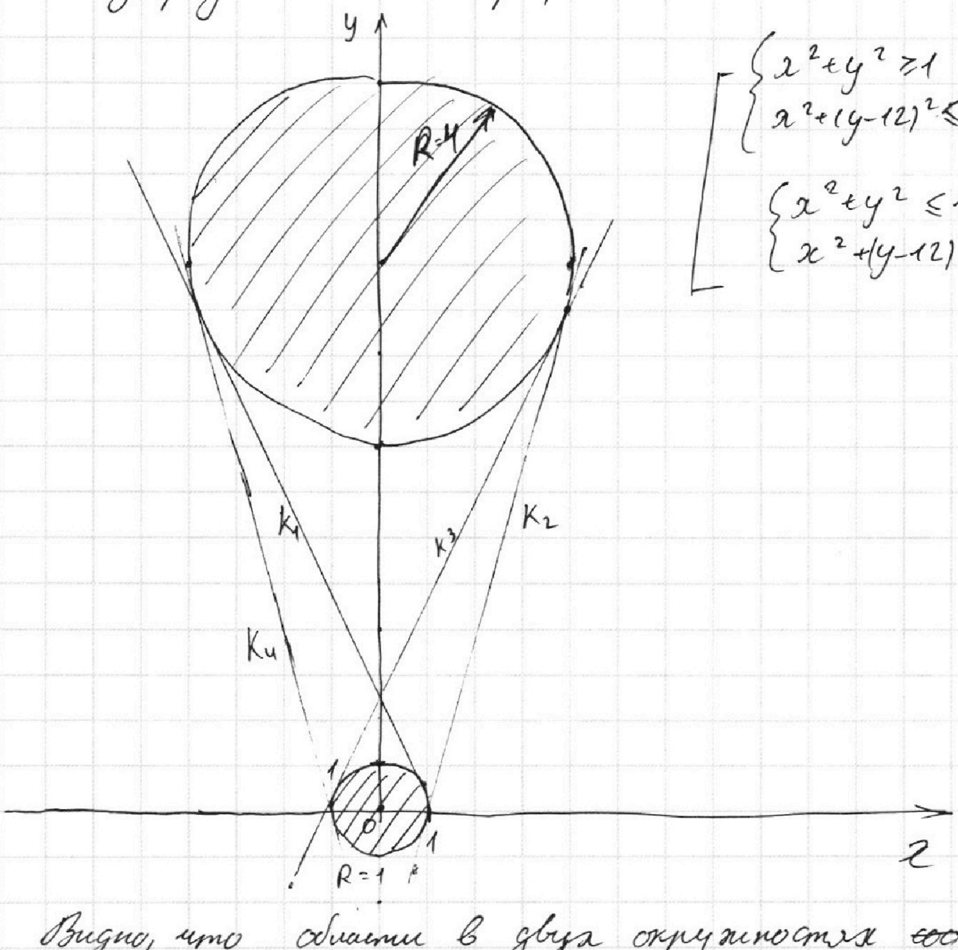
Для II неравенства:

$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0$, если

$x^2+y^2-1 \geq 0$ и $x^2+(y-12)^2-16 \leq 0$ или:

$x^2+y^2-1 \leq 0$ и $x^2+(y-12)^2-16 \geq 0$

Изобразим это на графике:




$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2 \geq 1\\ x^2+(y-12)^2 \leq 4^2\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y^2 \leq 1\\ x^2+(y-12)^2 \geq 4^2\end{cases}\end{array}\right. \quad (II)$$

Видно, что области в двух окружностях ~~сот~~ и точки на самих окружностях соответствуют решениям системы (I)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Нач.~~ Коэф. наклона $k_3 = \frac{\sqrt{119}}{5}$, $k_4 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$

Ответ: $a_1 = -\sqrt{15}$, $a_2 = +\sqrt{15}$, $a_3 = \frac{\sqrt{119}}{5}$, $a_4 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$

Прямые с другими коэф. наклона будут иметь либо 0, либо 1, либо $\infty$ много решений.

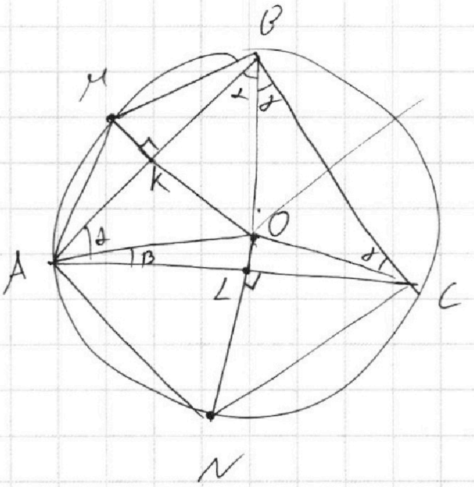
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 7




Дано: $MK = 5$, $ML = 2{,}5$

Реш-е:

$\smile AN = \smile NC \Rightarrow AN = NC$

$CN = AN$
$LN$ общ
$\angle CLN = \angle ALN = 90°$ $\Big| \Rightarrow \triangle AON = \triangle CON \Rightarrow$

$\Rightarrow AL = LC \Rightarrow L$ лежит на $ON \Rightarrow LO$ - сер пер $\triangle ABC$.

$\smile AM = \smile MB \Rightarrow AM = MB$

$MK$ общ
$AM = MB$
$\angle MKA = \angle MKB = 90°$ $\Big| \Rightarrow \triangle AKM = \triangle BKM \Rightarrow AK = KB \Rightarrow$

$\Rightarrow K$ лежит на $MO \Rightarrow K$ сер пер $\triangle ABC$

$AO = R = MO = ON$

$\sin\alpha = \frac{KO}{AO} = \frac{R-5}{R}$ $\qquad$ $\sin\beta = \frac{LO}{AO} = \frac{R-2{,}5}{R}$

По т.о синусов $\cancel{\frac{\sin\alpha}{AL} = \frac{\sin 90}{AB}}$ $\frac{\sin\alpha}{R-5} = \frac{\sin 90}{R}$

Si

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times\ 24 \\ \hline 276 \\ 138\ \\ \hline 1104 \\ 144 \\ \hline 1248 \end{array}$$

23·3

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times\ 16 \\ \hline 414 \\ 69\ \\ \hline 1104 \\ 144 \\ \hline 1248 \end{array}$$

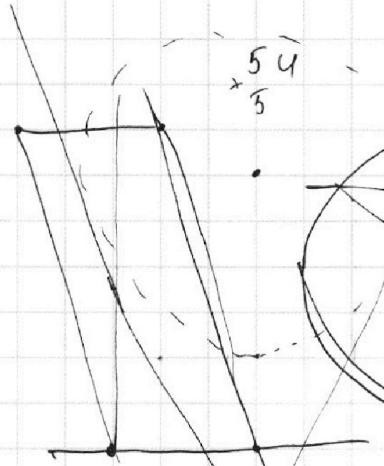
| | |
|---|---|
| 1248 | 2 |
| 624 | 2 |
| 312 | 2 |
| 156 | 2 |
| 78 | 2 |
| 39 | 3 |
| 13 | 13 |

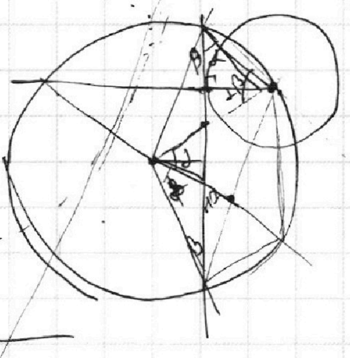
$\sqrt{13^2-7^2}=$

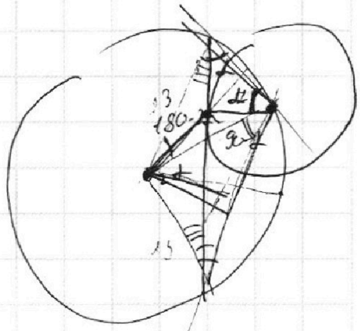
$169-49 = 120$

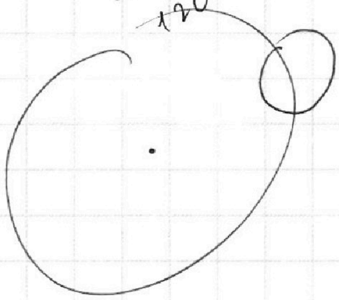
$+24$
$24$

$\times 54$
$5$





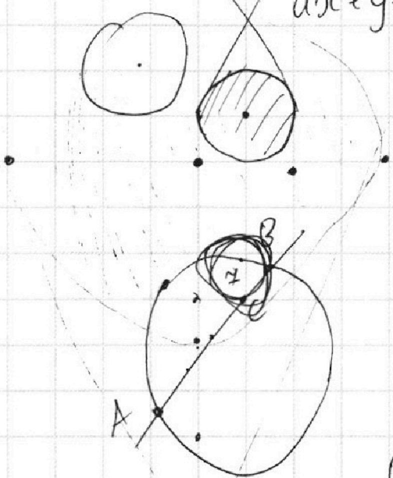
$ax+y=n$

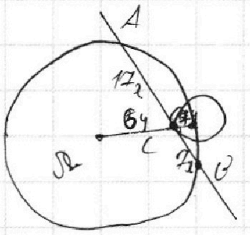
138 | 2
69

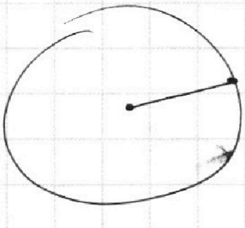
69
$y=-ax+b$

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times\ 16 \\ \hline 468 \\ 78\ \\ \hline 1248 \end{array}$$

$144-25 = 119$



$\frac{AB}{\sin} = 2R$