МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$ab \vdots 2^{15} \cdot 7^{11}$; $bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{18}$; $ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39}$.

Представим числа a, b, c в виде произведения 2 и 7 в некоторой степени:

$$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$$
$$b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$$
$$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$$

Конечно, числа a, b, c могут содержать другие простые множители, но тогда пр-ие abc точно не будет минимальным. Из ус-ия делимости произведений чисел следует:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 15; \\ a_2 + b_2 \geq 11; \\ b_1 + c_1 \geq 17; \\ b_2 + c_2 \geq 18; \\ a_1 + c_1 \geq 23; \\ a_2 + c_2 \geq 39; \end{cases}$$

Сложим нер-ва (они однозначные) соответственно по индексам:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq \frac{55}{2}; \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 34; \end{cases}$$

Т.к. числа натуральные то и a_1, b_1, c_1 - натуральные:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq 28; \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 34; \end{cases}$$

Т.к. $a_2 + c_2 \geq 39$, то и $a_2 + b_2 + c_2 \geq 39$:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq 28 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 39 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Осталось привести пример с такими степенями:

$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$
$b = 2^{5}$
$c = 2^{13} \cdot 7^{19}$

Такой пример существует. Минимальное произведение abc:

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

1) ОДЗ: $\begin{cases}3x^2-6x+2\geq 0;\\ 3x^2+3x+1\geq 0;\end{cases}$

Решим 1-е нер-во: $3x^2-6x+2\geq 0$

$$x_1=\frac{6+\sqrt{36-24}}{6}=1+\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$x_2=1-\frac{\sqrt{3}}{3}.\quad x\in\left(-\infty;1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[1+\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$$

~~$x\in\left(-\infty;1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$~~

Решим 2-е нер-во:

$3x^2+3x+1\geq 0$

$D=9-12<0\Rightarrow 3x^2+3x+1>0\quad\forall x.$

В итоге: ОДЗ: $x\in\left(-\infty;1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[1+\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$

2) Домножим обе части ур-ия на $\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$. Эта скобка всегда >0, т.к. $3x^2+3x+1>0$. В левой части разность квадратов:

$$\left(3x^2-6x+2-3x^2-3x-1\right)=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right);$$

$$1-9x=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right);$$

Первый корень: $x=\frac{1}{9}$.

$$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases}3x^2-6x+2\leq 1;\\ 3x^2+3x+1\leq 1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-6x+1\leq 0;\\ 3x(x+1)\leq 0;\end{cases}$$

2.1 $3x^2-6x+1\leq 0$

$$x_1=\frac{6+\sqrt{36-12}}{6}=1+\frac{2\sqrt{6}}{6}=1+\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$x_2=1-\frac{\sqrt{6}}{3}>0\qquad\{\sqrt{6}<\sqrt{9}\}\Rightarrow\frac{\sqrt{6}}{3}<1$$

2.2 $3x(x+1)\leq 0$

$x\in[-1;0]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Получаем систему:

$$\begin{cases} 1-\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq 1+\frac{\sqrt{6}}{3}; \\ -1 \leq x \leq 0; \end{cases}$$

Множества не пересекаются. Значит ~~нет~~ корней ~~по~~ ур-ния точно нет. Значит, корень у ур-ия только один $x = \frac{1}{9}$.

Ответ: $x = \frac{1}{9}$.

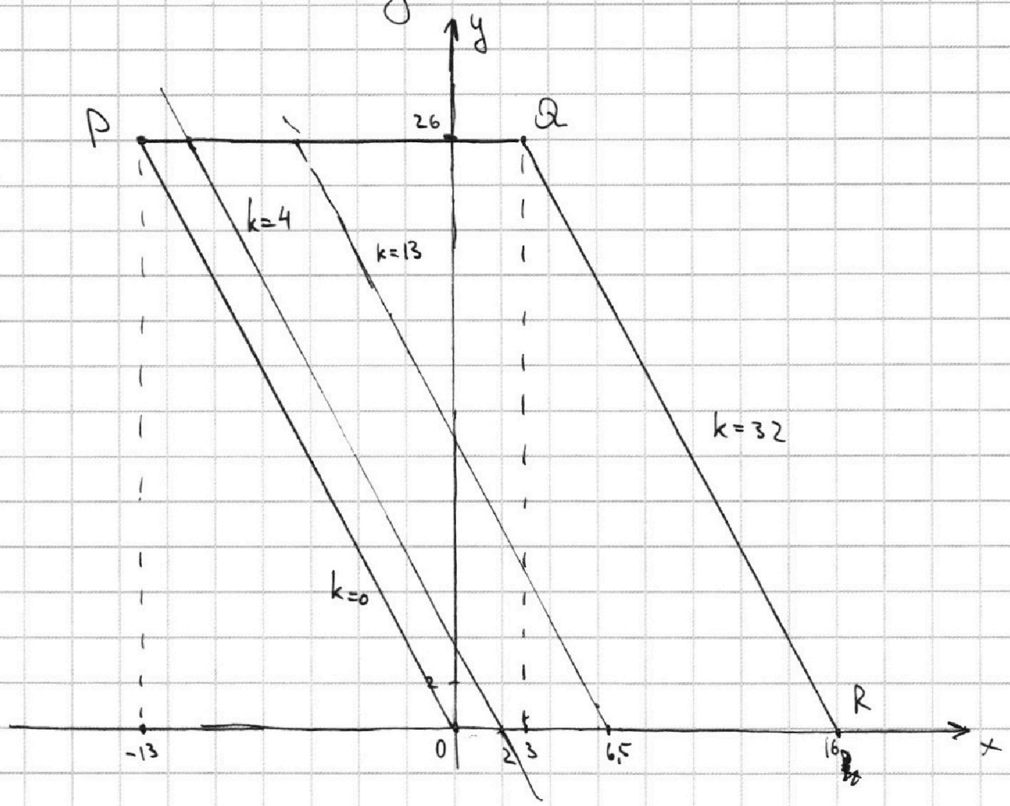
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5

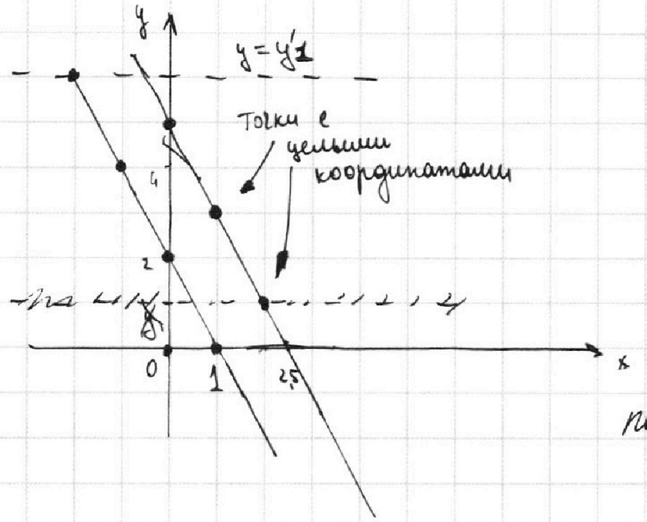


1) Заметим, что точки, для которых $2x+y=const$ лежат на одной прямой $y=k-2x$ ($k=const$, некоторое число). А также эти ~~линии на к~~ прямые параллельны сторонам параллелограмма. Это заметно упрощает задачу. Всего таких прямых, для которых $2x+y=k=const$ ~~...~~ 33 (от 0 до 32) ~~всего~~ (так чтобы на этой прямой была бы хотя бы одна точка с целыми коэффициентами).

2) Посчитаем ~~то~~ кол-во точек с целыми ~~коэффициентами~~ координатами на этих прямых. ~~Прямые, которые выходят пересекают ось Ox в точке с целым значением~~

Подробней рассмотрим эти прямые (рис.1 на след. стр.)
На прямых, которые выходят из целого x ~~точек~~ кол-во точек:

$$N_1 = \frac{y_i}{2}+1$$



Кол-во точек на прямых с нецелыми коэффициентами

$$N_2 = \frac{y_1'}{2}$$

Округлять в меньшую сторону. То есть, возвращаясь к параллелограмму, На прямых с нечётным номером, начиная с OP точек:

$$N_1 = \frac{26}{2} + 1 = 14$$

На прямых с чётным номером:

$$N_2 = \frac{26}{2} = 13.$$

~~Для каждой прям~~ Всего пар прямых коэффициенты k, для которых отличаются на 14, 19. (от 0 до 8)'. Из которых 10 прямых с ~~четны~~ нечётным номером, а 9 с чётным. Для каждой точки из такой пары на одной прямой подойдут все точки на другой. Всего вариантов:

$$N = 10 \cdot 14^2 + 9 \cdot 13^2 = 1440 + 1690 - 169 = 2961$$

Ответ: 2961

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №6

$$\begin{cases} ax+y-8b=0; \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0; \end{cases}$$

1) Начнём со 2-го нер-ва. Заметим, что $x^2+y^2=1$ - ур-ие ~~круга~~ окр-ти радиуса 1 в точке $(0;0)$, а $x^2+(y-12)^2=16$ - ур-ие окр-ти радиуса 4 в точке $(0;12)$. ~~Также x^2~~

Значит, $x^2+y^2-1\ge 0$ - это все точки вне окр-ти и ~~на ней~~ сама окр-ть; $x^2+y^2-1\le 0$ - это точки внутри окр-ти и сама окр-ть. Аналогично и с $(x^2+(y-12)^2-16)$. ~~Систе~~ Равносильная система:

$$\begin{cases} ax+y-8b=0; \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-1\ge 0; \\ x^2+(y-12)^2-16\le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-1\le 0; \\ x^2+(y-12)^2-16\ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Из этих соображений следует 1-я система совокупности это ~~точки~~ все точки внутри окр-ти радиуса 4 и сама окр-ть радиуса 4. А 2-я система совокупности это все точки внутри окр-ти радиуса 1 и сама окр-ть радиуса 1. Рисунок на другой странице.

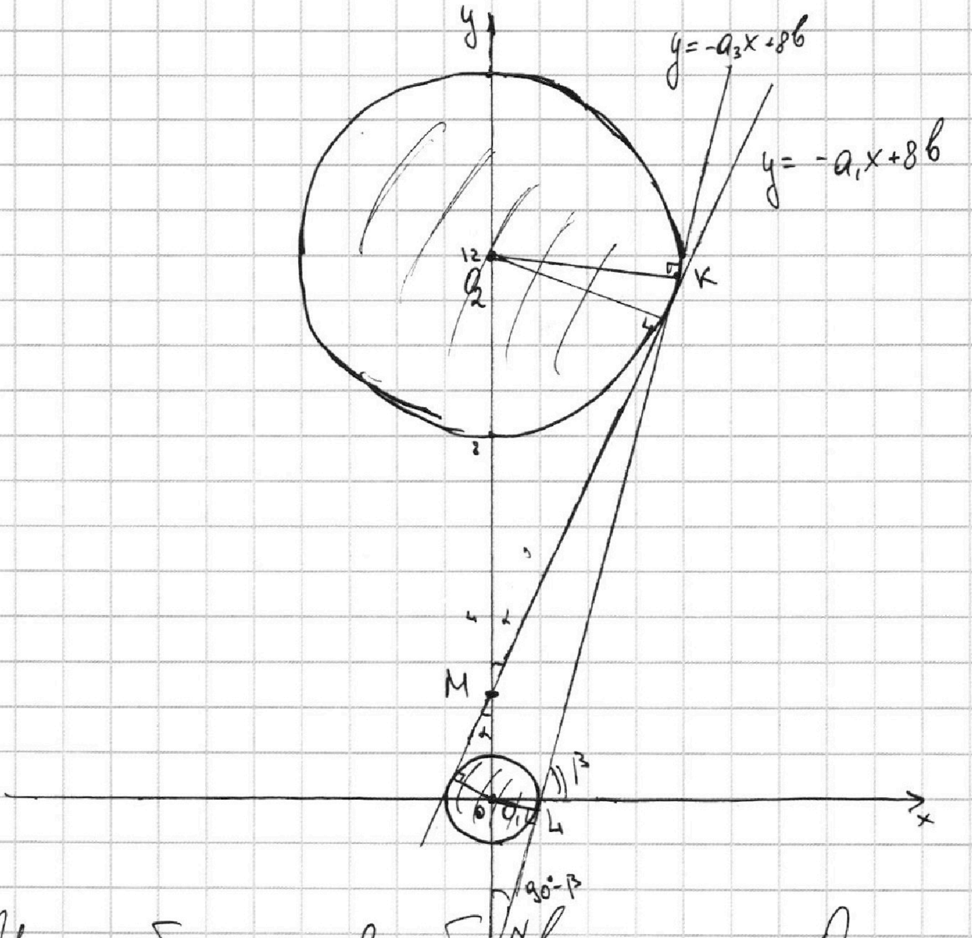
2) $ax+y-8b=0$ - ур-ие прямой. Эта прямая должна касаться и той и другой окр-ти. Всего возможно 4 прямых ~~две~~. Причём две пары симметричных $\Rightarrow a_1=-a_2$; $a_3=-a_4$.

Найдем a_1 и a_3. Эти прямые схематично изображены на след. стр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Из подобия тр-ков образованных осью Oy, прямой $y=-ax+8b$, и радиусов окр-тей проведённых к точкам касания:

$$\frac{1}{O_1M}=\frac{4}{MO_2}$$

$$\frac{MO_2}{MO_1}=4; \quad MO_1+MO_2=O_1O_2=12 \Rightarrow MO_1=2{,}4$$
$$MO_2=9{,}6$$

$$a_1=tg(90°-\alpha)=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=$$

$$\left\{\sin\alpha=\frac{4}{O_2M}=\frac{4}{9{,}6}\right.$$

$$=\frac{\sqrt{9{,}6^2-4^2}}{4}=\frac{\sqrt{5{,}6\cdot13{,}6}}{4}=\frac{\sqrt{7\cdot8\cdot4\cdot39}}{40}=$$

$$=\frac{\sqrt{17\cdot7}}{5}=\frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$a_2=-\frac{\sqrt{119}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Теперь найдём a_3. Из подобия $\triangle NO_1L \sim \triangle NO_2K$:

$$\frac{1}{NO_1} = \frac{4}{NO_2}$$

$$\begin{cases} NO_2 = 4NO_1; \\ NO_1 + 12 = NO_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} NO_1 = 4 \\ NO_2 = 16 \end{matrix}$$

$$a_3 = tg\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos\beta} = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = -\sqrt{15}.$$

Ответ: $a_1 = \frac{\sqrt{119}}{5}$; $a_2 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$; $a_3 = \sqrt{15}$; $a_4 = -\sqrt{15}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 |Черновик|

$ab \vdots 2^{15}7^{11}$; $bc \vdots 2^{17}7^{18}$; $ac \vdots 2^{23}7^{39}$

$ab \cdot bc \cdot ac$ $\quad b = 2^{15}\cdot 7^{a}$ $\quad (abc)^2 \vdots 2^{45}7^{68}$

$a = 1$ $\quad abc_{min} = 2^{23}7^{34}$

$c = 2^{17}\cdot 7^{18}$ $\quad abc = 7^{39}\cdot 2^{30}$

$a = 2^{a_1}7^{a_2}$ $\quad c = 7^{39}$ $\quad > 23$

$b = 2^{b_1}7^{b_2}$ $\quad a = 2^{23}$

$c = 2^{c_1}7^{c_2}$

$a_1 + b_1 + c_1 = \min$ $\quad a_1 + b_1 \geq 15$ $\quad a_1 + c_1 \geq 23$

$a_2 + b_2 + c_2 = \min$ $\quad a_2 + b_2 \geq 11$ $\quad a_2 + c_2 \geq 39$

$b_1 + c_1 \geq 17$

$b_2 + c_2 \geq 18$ $\quad a_1 + b_1 + c_1 \geq 28$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 34$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 39$

№2 $\frac{a}{b}$, $a \in N$ $\; b \in N$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{b\left(\frac{a}{b}+1\right)}{b^2\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\frac{a}{b} + 1\right)} = \frac{\frac{a}{b}+1}{b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\frac{a}{b}+1\right)}$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{1}{a+b-\frac{9ab}{a+b}}$

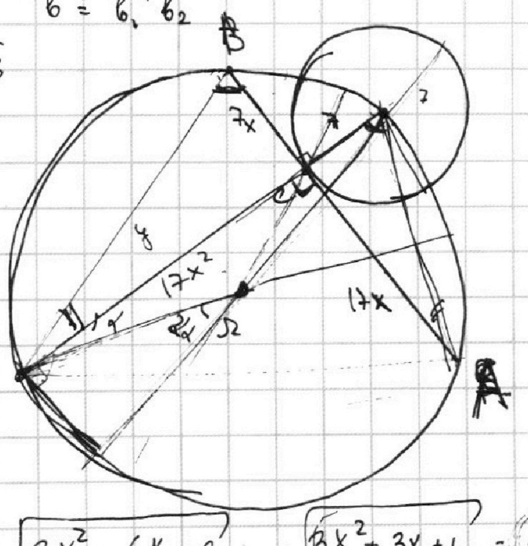
a b
$7+4 = 11$ $\quad 13$
14 $\quad 19$

$c = 2^{13}\cdot 7^{19}$
$a = 2^{10}\cdot 7^{20}$
$b = 2^{5}$

$a = p_1^2 q_2^2 \ldots$
$b = b_1^2 b_2^2$

$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 1$

№3



$7y = 7\cdot 17x^2$
$y = 17x^2$

$(23\cdot 2\sin\alpha)^2 + (17x^2+7)^2 = 26^2$

$1 - 9x > 0$ $\quad \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1$

$\frac{3-6+4}{4} = \frac{1}{4}$

№4 $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$3x^2 - 6x + 2$ $\quad >$ $\quad -3 + \sqrt{9-12}$

$\frac{6 + \sqrt{36-24}}{12}$

$-6x + 2 \vee 3x + 1$

$1 \vee 9x$

$1 - 9x \vee 0$

$$\begin{array}{r} 1440 \\ +1690 \\ \hline 3130 \\ -169 \\ \hline 2961 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

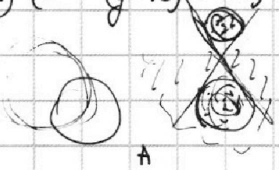
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

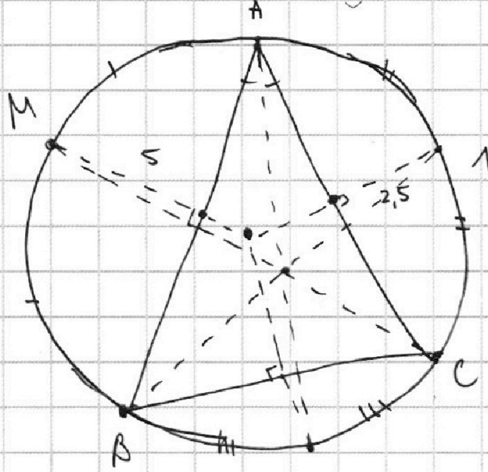
№6 Черновик

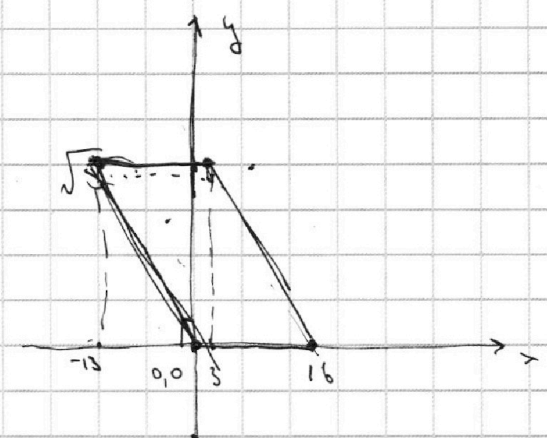
$x = y$

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \le 0 \end{cases}$$



№7





$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$

$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 14$

№3 $6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{\cdots} = 1$

$3x(x+1) < 0$

$3x^2 - 6x + 2 < 1$

$- \quad - \quad +$

$-1 \quad 0$

$3x^2 - 6x + 1 < 0$

$\frac{6 + \sqrt{36 - 12}}{6} = 1$

$\frac{6 - 2\sqrt{6}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$