



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача №1

Пусть  $x_a$  - степень в к-ой 2 входит в разложение  $a$  на множителях

$x_b$  - степень в к-ой 2 входит в разложение  $b$  на множителях

Аналогично  $x_c$

$y_a$  - степень в к-ой 3 входит в разложение  $a$  на множителях

Аналогично  $y_b, y_c$

$z_a$  - степень в к-ой 5 входит в разложение  $a$  на множителях  $\Rightarrow$

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \Rightarrow x_a + x_b \geq 9 \quad bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x_b + x_c \geq 14 \\ y_a + y_b \geq 23 \\ z_a + z_b \geq 23 \end{array} \quad \begin{array}{l} y_b + y_c \geq 13 \\ z_b + z_c \geq 13 \end{array}$$

$$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow \begin{array}{l} x_a + x_c \geq 19 \\ y_a + y_c \geq 18 \\ z_a + z_c \geq 30 \end{array} \Rightarrow$$

$$2(x_a + y_b + y_c) \quad 2(x_a + x_b + x_c) \geq 28 + 14 = 42$$
$$\Rightarrow x_a + x_b + x_c \geq 21$$

$$2(y_a + y_b + y_c) \geq 23 + 18 = 41 \Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 20,5 \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$y_a + y_b + y_c \geq 21$ , т.к.  $y_a \in \mathbb{N}, y_b \in \mathbb{N}, y_c \in \mathbb{N}$~~

~~$y_a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$~~

~~$y_b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$~~

~~$y_c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$~~

~~Аналогично  $2a + 2b + 2c \geq \frac{23+30}{2} \Rightarrow \geq 26,5$~~

~~$2a + 2b + 2c \geq 27$~~

~~$a, b \in \mathbb{N} \quad 2 \quad x_a + x_b + x_c \quad y_a + y_b + y_c \quad 2a + 2b + 2c \geq$~~

~~$2 \quad 21 \quad 21 \quad 27$  (Доказывается при:)~~

~~Ответ: При  $20,5$   
Пусть  $y_a + y_b + y_c = A \Rightarrow$~~

~~$A \geq y_c \geq 10,5$~~

~~$y_b \geq 7,5$~~

~~$y_a \geq 7,5$~~

~~Удобно  $y_c + y_a + y_b \in \mathbb{N}$ , а также~~

~~$y_a \geq 2$  т.к.  $y_a + y_b + y_c \geq 20,5$~~

~~(1)  $\begin{cases} y_a + y_b \geq 10 \\ y_b + y_c \geq 13 \\ y_a + y_c \geq 18 \end{cases} \Rightarrow$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(2) \begin{cases} z_a + z_b + z_c \geq 27 & z_a + z_b + z_c \geq 26,5 \Rightarrow \\ z_a + z_b \geq 10 \\ z_b + z_c \geq 13 \\ z_c + z_a \geq 30 \Rightarrow z_a \\ z_a \geq 0 \\ z_b \geq 0 \Rightarrow \\ z_c \geq 0 \end{cases}$$

$z_b + z_a + z_c \geq 30$ . При  $z_a = z_c = 15, z_b = 0$   
система (2) верна  $\Rightarrow$

$$abc: 2^{21} 3^{21} 5^{30} \Rightarrow$$
$$abc \geq 2^{21} 3^{21} 5^{30}, \text{ что}$$

достигается при

$$a = 2^7 3^8 5^{15}$$
$$b = 2^2 3^3 5^0$$
$$c = 2^{12} 3^{10} 5^{15}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } (abc)_{\min} = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При  $y_a + y_b + y_c = 21$  нельзя подобрать  
такие  $y_a, y_b, y_c$ , что  $y_a, y_b, y_c \in \mathbb{N}_{>0}$

и выполняются (1), т.к. тогда  
у систем

$$\begin{cases} y_a + y_b = 11 \\ y_b + y_c = 13 \\ y_a + y_c = 18 \end{cases}, \begin{cases} x \\ y \end{cases}$$

$$y_a + y_b + y_c \geq \frac{10 + 13 + 18}{2} = 20,5$$

$$y_a, y_b, y_c \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 21$$

Аналогично

$$z_a + z_b + z_c \geq \frac{27}{3} \Rightarrow z_a + z_b + z_c \geq 30, \text{ т.к. } z_a + z_b + z_c \geq 27$$

$$abc: \quad \begin{array}{ccc} x_a + x_b + x_c & y_a + y_b + y_c & z_a + z_b + z_c \\ 2 & 3 & 5 \end{array} \geq$$

$$2^{21} \quad 3^{21} \quad 5^{30}, \text{ что достигается}$$

$$\text{при } a = 2^{21} 3^8 5^5$$

$$b = 2^2 3^3 5^5$$

$$c = 2^{12} 3^{10} 5^5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

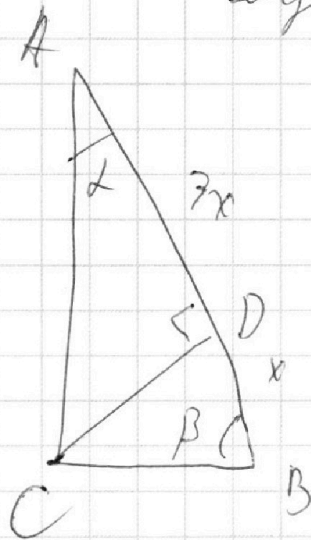
6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача 2



$$AB:DB = 3x:x = 3:1$$

$$\triangle ADC \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\triangle BCD \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow$$

$$BC^2 = BD \cdot AB = 4x^2 \Rightarrow$$

$$BC = 2x \Rightarrow$$

$$\angle C = \alpha = 30^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$\text{arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\text{arcsin}(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = t$$

$$\text{arcsin}(\sin t) = t$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq \text{arcsin}(\sin t) \leq \frac{5\pi}{2}$$

Пусть  $t \in [-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}] \Rightarrow \text{arcsin}(\sin t) =$   
 $t + 2\pi \Rightarrow$

$$\cancel{t = t + 2\pi}$$

$$t + 10\pi = t$$

$$\cancel{t = \frac{\pi}{2}}$$

$$4t = -10\pi$$

$$t = -\frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = -3\pi$$

Аналогично  $t \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow t = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = 2\pi$

всему промежутку  $\varphi$ -й  $f(t) = t$  и

$$g(t) = \text{arcsin}(\sin t)$$

Пусть  $t \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] \Rightarrow$

$$\text{arcsin}(\sin t) = -\pi - t \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-5\pi - 5t = t$$

$$6t = -5\pi$$

$$t = -\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{3}$$

Аналогично  $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$$t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Пусть  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$$\cos(5t) = t \Rightarrow$$

$$5t = t \Rightarrow t = 0 \Rightarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

~~Ответ:  $x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; 0; -\frac{\pi}{2}\right\}$~~

~~Ответ:  $x \in \left\{-3\pi; 2\pi; -\frac{\pi}{2}\right\}$~~

Ответ:  $x \in \left\{-3\pi; 2\pi; -\frac{\pi}{2}; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



окружности в 2 точках не пересекается не  
будет

$\Delta OQR \sim \Delta OO_1Q \Rightarrow O_1$  делит  $OO_2$  в  
отношении  $3:2 \Rightarrow$

$$O_1 \left( \frac{18}{5}; 0 \right)$$

любая прямая, ~~такая что ее~~ <sup>выра  $y=kx+b$ , проходящая</sup> ~~через  $O$ ,~~ <sup>кривая</sup>

$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha_2 \geq k \\ \operatorname{tg} \alpha_1 \leq k \end{cases}$  не пересекает окружно-  
сти в 2 точках

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{2}{6 \cdot \frac{18}{5}} = \arcsin \frac{10}{12} =$$

$$\arcsin \frac{5}{6} = \alpha, \quad \alpha \in \left[ \alpha; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{11}{35}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{\frac{25}{11}}$$

$$\alpha_2 = \pi - \arcsin \frac{3}{18} = \pi - \arcsin \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\sqrt{\frac{25}{11}} \Rightarrow$  угловой коэф.  
прямой вида  $ax+by-3b=0$

$k$

$$k = -\frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } a \in \left( -2\sqrt{\frac{25}{11}}; 2\sqrt{\frac{25}{11}} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

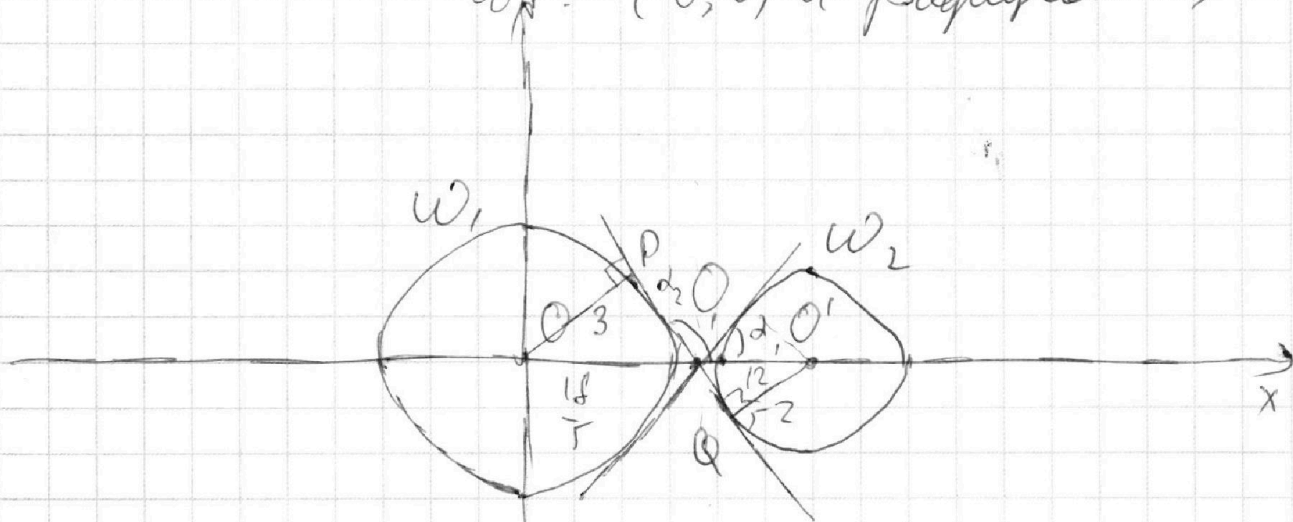


Задача №4

график уравнение  $(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$

~~Определить~~ - 2 окружности:

Окружность  $\omega_1$  - с центром в  $O_1(0;0)$   
и радиусом 3, другая - с центром  
в  $O_2(6;0)$  и радиусом 2  $\Rightarrow$



Прямая  $l$  - точка пере-  
сечения обеих касательных  
к окружностям  $\omega_1$  и  $\omega_2$

Заметим, что если прямая проходит  
через  $O_1$  и не пересекает обе  
окружности в 2 точках, то и касательная  
прямая, ей параллельная, не



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 2743 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3'' - 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Пусть  $u = \log_3 x$   
 $v = \log_3 5y \Rightarrow$

$$(2) \begin{cases} u^4 + \frac{3,5}{u} + 8 = 0 \\ v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(4) \begin{cases} u^5 + 3,5 + 8u = 0 & f(u) = u^5 + 3,5 + 8u \\ v^5 - 3,5 + 8v = 0 & g(v) = v^5 - 3,5 + 8v \end{cases}$$

$$f'(u) = 5u^4 + 8 > 0 \quad (\forall u \in \mathbb{R})$$

$$g'(v) = 5v^4 + 8 > 0 \quad (\forall v \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$f(u), g(v)$  - возрастают на  $\mathbb{R} \Rightarrow$   
 система имеет единственное  
 решение. заметим, что  
 если еще  $u = c, v = -c$ , при-  
 чем  $c^5 + 3,5 + 8c = 0$ , то

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пара  $(c; -c)$  - решение системы

Расс- и ф-ю  $f(t) = t^5 - 3,5 + 8t$

$f(t)$  - непрерывна на  $\mathbb{R}$

$f(0) = -3,5$   
 $f(4) = 65 \Rightarrow$  на  $[0; 4]$  ур-ние

$f(t) = 0$  имеет хотя бы 1 корень  
(теорема Больцано-Вейерштрасса)  $\Rightarrow$   
этот корень - единичный, т.к.

$\forall t \in \mathbb{R} f'(t) > 0 \Rightarrow$

Уравно-корень ур-ние  $f(t) =$   
 $t^5 - 3,5 + 8t = 0 \Rightarrow$

пара  $(c_0; -c_0)$  - ед. решение  
системы (1) - фактически решение  
системы (2) ( $c_0 \neq 0$ , т.к.  $f(0) \neq 0$ )  $\Rightarrow$

$$\log_3(-c_0) = 0 = \log_3 1 \Rightarrow$$

$$-c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = -1 \Rightarrow$$

Ответ:  $xy = \frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x_a$	$x_b$	$x_c$
$y_a$	$y_b$	$y_c$
$z_a$	$z_b$	$z_c$

$$x_a + x_b = 9$$

$$x_b + x_c = 14$$

$$x_a + x_c = 19$$

$$x_a + x_b + x_c = 21$$

$$\Rightarrow 2(x_a + x_b + x_c) = 21 \cdot 2$$

$$x_a + x_b + x_c = 21$$

$$x_c = 12$$

$$x_b = 2$$

$$x_a = 7$$

$$2(y_a + y_b + y_c) \geq 10 + 13 + 14 = 28 + 13$$

$$y_a + y_b + y_c \geq \frac{28 + 14}{2} = 21$$

$$7z_a + 7z_b + 7z_c \geq \frac{10 + 13 + 30}{2} = 20 + 6,5 \geq 27$$

$$(abc)_{\min} = 2^{21} 3^{24} 5^{27}$$

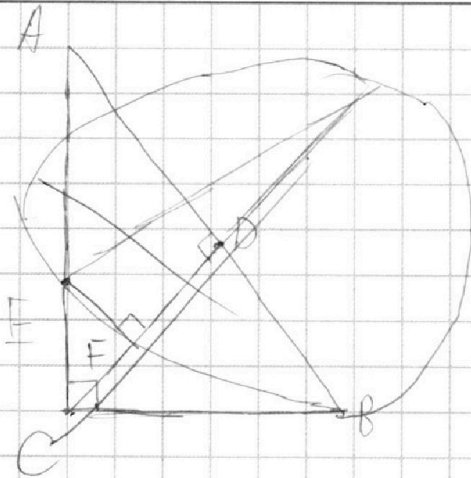
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 =$$

$$\frac{1}{2} \log_x 243 - 8$$

$$\log_{3^2}^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = -8$$

$$t^4 + \frac{7}{2t} + 8 = 0$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$t = 1 \quad t = 1$$

$$t = -1$$

$$2 + t$$

$$-2 - 16 + 7 = 0$$

$$f'(t) = 10t^4 + 16 =$$

$$f''(t) - \text{возр.} \rightarrow$$

↑ возраст

$$2(5t^4 +$$

$$f(t) - \text{возрастает}$$



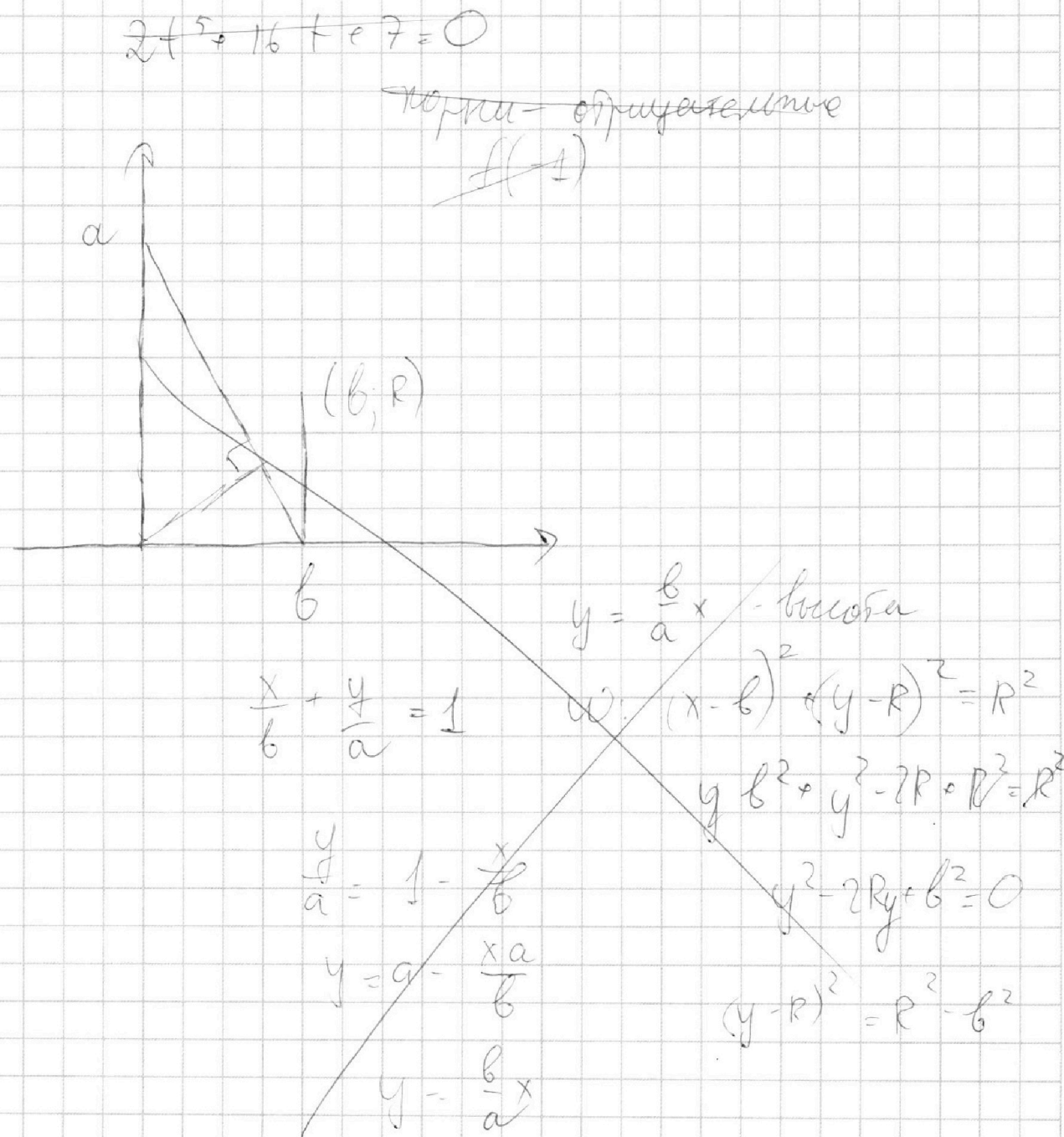
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 3^5 - 8 \\ \log_3^4 \sqrt[5]{y} + 2 \log_{\sqrt[5]{y}} 3 = \log_{\sqrt[5]{y}}^2 3^5 - 8 \end{cases} \Rightarrow xy$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = -8$$

$$\log_3^4 \sqrt[5]{y} - 3,5 \log_{\sqrt[5]{y}} 3 = -8$$

$$\log_3^4 \begin{cases} u^4 - v^4 + 3,5 \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right) = 0 \\ (u+v) \end{cases}$$

$$u^4 + 3,5 u + 8 = 0$$

$$v^4 - 3,5 v + 8 = 0$$

$$u^4 + \frac{3,5}{u} + 8 = 0$$

$$u^5 + 3,5 + 8u = 0$$

$$v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0$$

$$v^5 - 3,5 + 8v = 0$$

$$u^5 + v^5 + 8(u+v) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

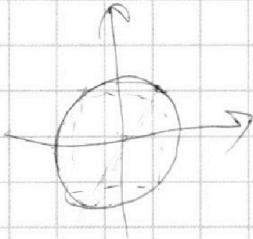
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$5 \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$\frac{5\pi}{2} - 5 \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4\pi}{2} - x$$

$$7\pi - 5 \arccos(\cos x) = x$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \Rightarrow$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = t$$

$$5 \arcsin(\sin t) = t$$

$$\arcsin(\sin t) =$$

$$\arcsin(\sin t) =$$

$$7\pi + 2k\pi - x$$

$$2\pi k + x$$

$$5(7\pi + 2k\pi) = t$$

$$10\pi k = t$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5 \arcsin(\sin t) = t$   
 $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow -\frac{5}{2}\pi \leq t \leq \frac{5}{2}\pi$

$\arcsin(\sin t) = t \Rightarrow 5t = t \Rightarrow t = 0$   
 $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\sin t) = \frac{\pi}{2} - t$ , г.к.  
 $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t \Rightarrow$   
 $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$5(\frac{\pi}{2} - t) = t$   
 $\frac{5\pi}{2} - 5t = t$   
 $5\pi = 6t$   
 $t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$t \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow$   
 $\arcsin(\sin t) = t - 2\pi$   
 $5(t - 2\pi) = t$   
 $5t - 10\pi = t$   
 $4t = 10\pi$   
 $t = \frac{5}{2}\pi \Rightarrow x = 2\pi$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(u+v) - u$$

$$7a + 27b + 7c \geq 26 \geq 30$$

$$26 > 30$$

$$u^5 + v^5 + f(u+v) = 0$$

$$f(u) = u^5 + 3,5 + fu = 0$$

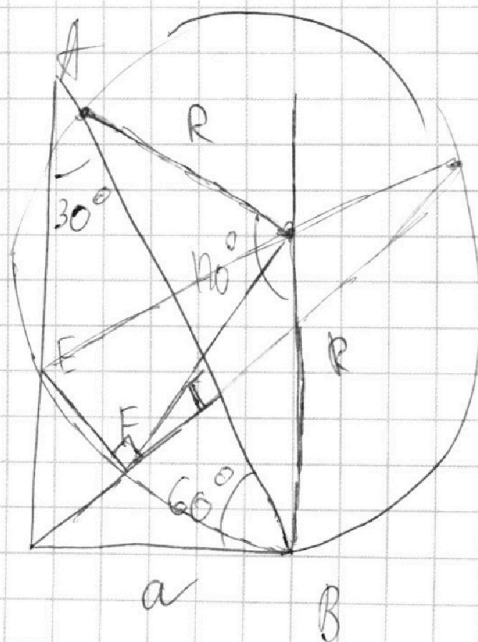
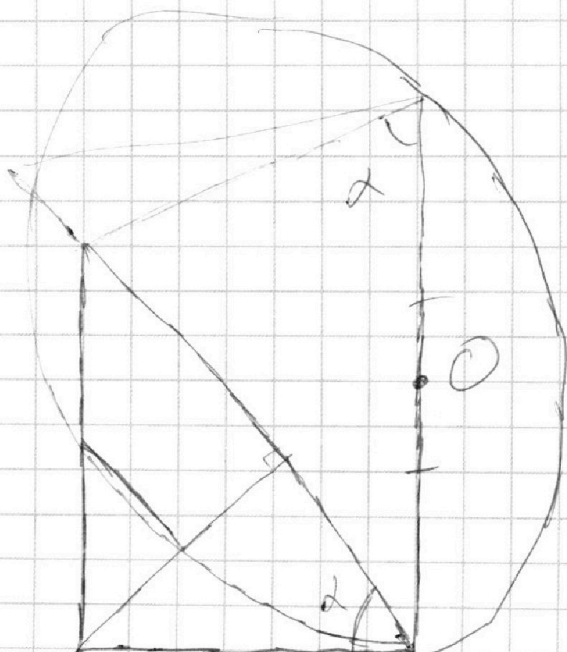
$$g(v) = v^5 - 3,5 + fv = 0$$

$$f(u) > 0$$

$$f'g'(v) > 0 \Rightarrow \text{из знаков } (u, v) \Rightarrow$$

$$u+v=0 - \text{невозможно} \Rightarrow$$

$$u+v=0 \Rightarrow \frac{1}{5}$$





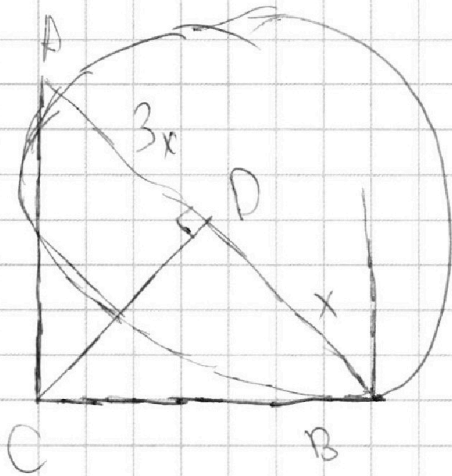
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*4x = 2x + 2x*

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$3x \cdot 4x = AC^2$$

$$x\sqrt{12} = AC$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

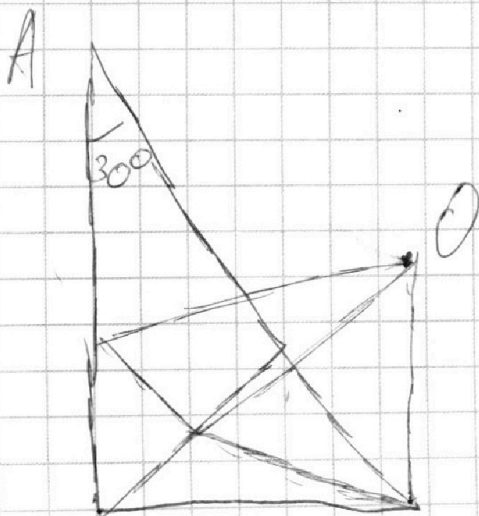
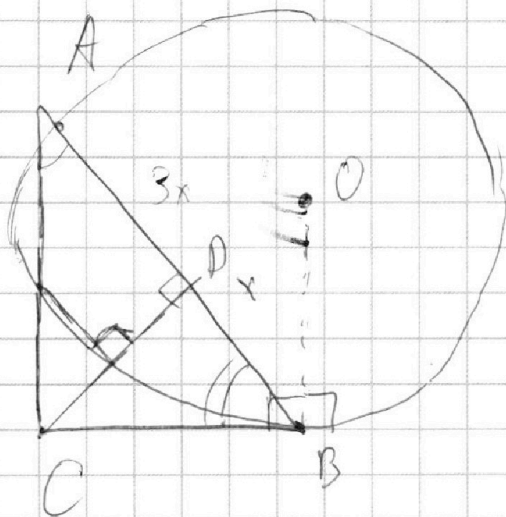
$$BC^2 = BD \cdot AB \Rightarrow$$

$$BC^2 = 4x^2$$

$$BC = 2x$$

$$\angle ABC = 60^\circ$$

$$\angle BAC = 30^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$11 \cdot 3 = 793$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 23^5 - 8$$

$$x > 0 \\ x \neq 1$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{12}{2 \log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2 \log_3 x} = -8$$

$$\log_3 x = A$$

$$2 \log_3^5 x + 7 = -16 \log_3 x$$

$$2A^5 + 7 = -16A$$

$$2A^5 + 16A + 7 = 0$$

$$\log_3^4(5y) + 7 \log_{5y} 3 = \log_{(5y)^2} (3^4) - 8$$

$$\log_3^4(5y) + \frac{7}{\log_3 5y} = \frac{11}{2 \log_3 5y} - 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

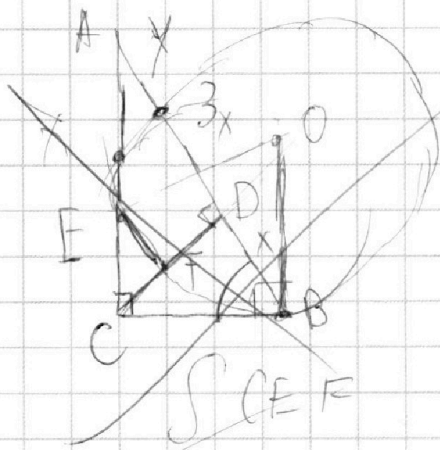
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



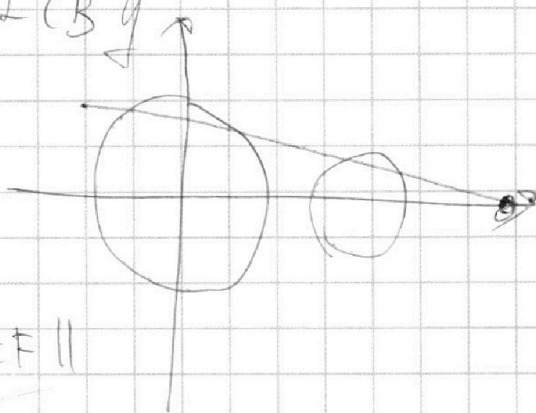
$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = 1 \log_x 2343 - 8$$



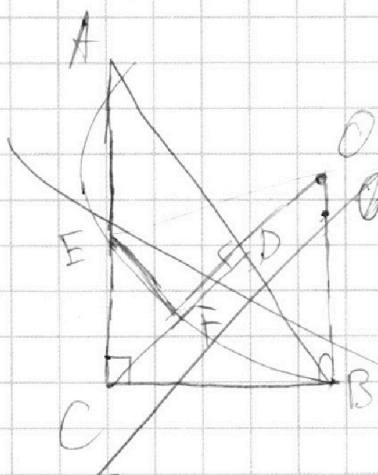
$OB \perp CB$

$OB \perp CB \parallel AC$

$OB \perp CB \perp y$



$\triangle CEF \sim \triangle ABC$

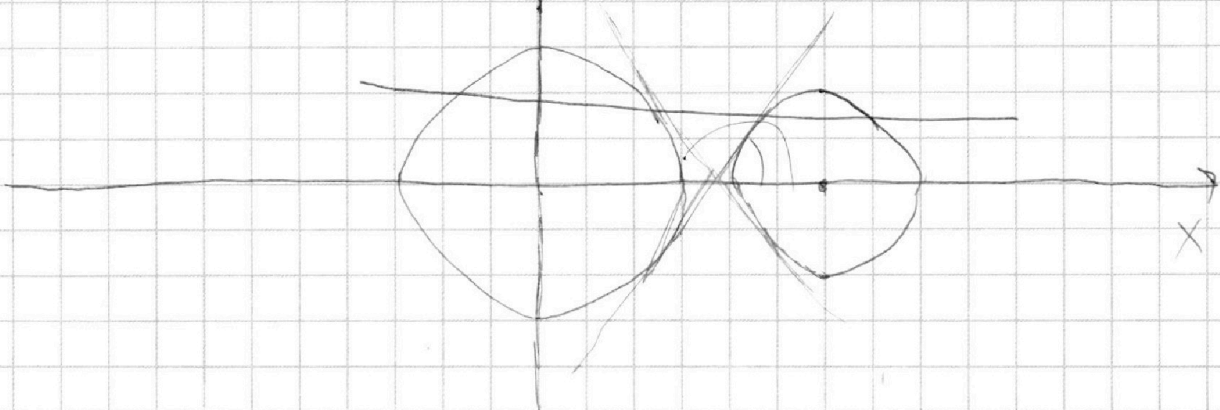


$EF \parallel$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 = 3^2 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$y = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}x$$



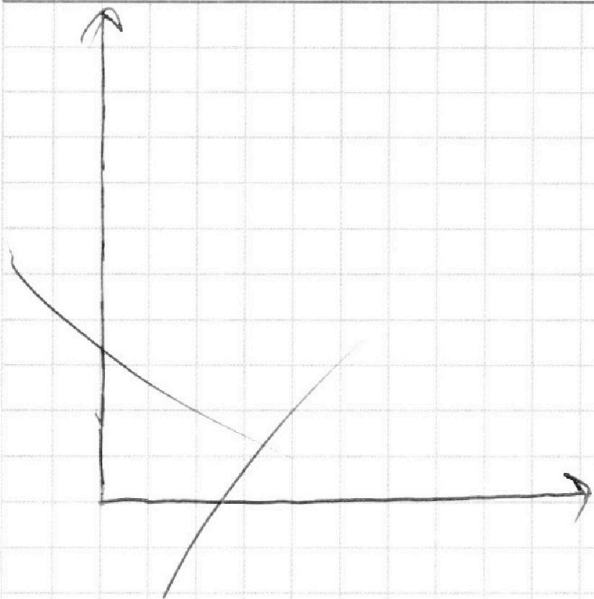
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$S_A = BC = 12$   
 $S_{ABC} = 90$

$AA_1 \perp BB_1 \perp CC_1$   
 $\sqrt{AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1}$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{AA_1}$   
 $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{AA_1}$   
 $\vec{b} + \vec{c} = 2\vec{AA_1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + 2y - 3b = 0 \Rightarrow$$

$$ax + 2y = 3b$$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$ax + 2y = 3b$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$4x^2 + 4y^2 = 36$$

$$4x^2 + (3b - ax)^2 = 36$$

$$4x^2 + a^2x^2 + 6abx + 9b^2 = 36$$

$$(a^2 + 4)x^2 + 6abx + 9b^2 - 36 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (3ab)^2 + (a^2 + 4)(36 - 9b^2) > 0$$

$$\frac{D}{4} = 9a^2b^2 + 36a^2 + 4 \cdot 36 - 9a^2b^2 - 36b^2$$

$$a^2 + b^2 > 4$$

$$a^2 > b^2 - 4$$

$$a^2 - b^2 + 4 > 0$$

$$a^2 - b^2$$

$$a^2 > 4 - b^2$$

$$b^2 - 4 > -a^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + 2y = 36$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$2(x-6)^2 = 4$$

$$4(x-6)^2 + 4y^2 = 16$$

$$4(x-6)^2 + (36-ax)^2 = 16$$

$$4(x^2 - 2x)$$

$$4(x-6)^2 + 4y^2 = 16$$

$$2x-6$$

$$4(x^2 - 12x + 36) + (36-ax)^2 = 16$$

$$4x^2 - 48x + 4 \cdot 36 + 96^2 - 6abx + a^2x^2 = 16$$

$$x^2(a^2 + 4)$$

$$x^2(a^2 + 4) - x(48 + 6ab) + 96^2 + 4 \cdot 32$$

$$x^2(a^2 + 4) - 2x(24 + 3ab) + 96^2 + 4 \cdot 32$$

$$D = (24 + 3ab)^2 - (a^2 + 4)(96^2 + 4 \cdot 32)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 24^2 + 24 \cdot 6ab + 9a^2 b^2 - (a^2 + 4)(9b^2 + 4) = 32$$

$$x_a + x_b + x_c = 21$$

$$x_a = 7$$

$$x_a = 7$$

$$\cancel{x_b = 2}$$

$$x_b = 2$$

$$\cancel{x_c = 12}$$

$$x_c = 12$$

$$y_a + y_b + y_c = 21$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

