



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1

Пусть $st_p(n)$ - степень вхождения p в разложение n на простые. Заметим, что $st_p(nm) = st_p(n) + st_p(m)$

Пусть $st_2(a) = a_2, st_3(a) = a_3, st_5(a) = a_5, st_2(b) = b_2, st_3(b) = b_3, st_5(b) = b_5, st_2(c) = c_2, st_3(c) = c_3, st_5(c) = c_5$.

По условию $ab = 2^6 3^{15} 5^{11} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6, \text{ аксиоматично} \\ a_3 + b_3 \geq 13 \\ a_5 + b_5 \geq 11 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_2 + c_2 \geq 14 \\ b_3 + c_3 \geq 21 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + c_2 \geq 16 \\ a_3 + c_3 \geq 25 \\ a_5 + c_5 \geq 28 \end{cases}$$

Складывая первые, вторые и третьи неравенства соответственно из каждой системы, получаем:

$$\begin{cases} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 36 \\ 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59 \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} st_2(abc) \geq 18 \\ st_3(abc) \geq 30 \\ st_5(abc) \geq 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc : 2^{18} \\ abc : 3^{30} \\ abc : 5^{28} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m, k, l) = (18, 30, 28) \\ (2^{18}, 3^{30}, 5^{28}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow abc : 2^{18} 3^{30} 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} 3^{30} 5^{28}$$

Пример: пусть $a = 2^4 3^9 5^{15}, b = 2^2 3^4 5^0, c = 2^{12} 3^{17} 5^{13}$, тогда $ab = 2^6 3^{13} 5^{15} : 2^6 3^{15} 5^{11}, ac = 2^{16} 3^{26} 5^{28} : 2^{16} 3^{25} 5^{28}, bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13} : 2^{14} 3^{21} 5^{13}, abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$.

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3

Пусть $y = \arcsin(\sin x)$, $y \in [0; \pi] \Rightarrow 0 \leq 10y \leq 10\pi \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi \Leftrightarrow -9\pi \leq -2x \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$
 $-4\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi$. Заметим, что $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\cos y = \sin x \Rightarrow$
 $\Rightarrow y$ - такое число $\in [0; \pi]$, что $\cos y = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Рассмотрим все возможные случаи расположения $\frac{\pi}{2} - x$

I случай: $-4\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -3\pi$, тогда $y = \frac{\pi}{2} - x + 4\pi = \frac{9\pi}{2} - x$

$$\begin{cases} -4\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -3\pi \\ 10(\frac{9\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{7\pi}{2} \\ 10(9\pi - 2x) = 2(9\pi - 2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{9\pi}{2}$ - один из ответов

II случай: $-3\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -2\pi$, тогда $y = -(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi) = x - \frac{5\pi}{2}$

$$\begin{cases} -3\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -2\pi \\ 10(x - \frac{5\pi}{2}) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{5\pi}{2} \\ 10x - 25\pi = 9\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \\ x = \frac{17\pi}{6} \end{cases}$$

$\frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{15\pi}{6} \leq x \leq \frac{21\pi}{6}$ $x = \frac{17\pi}{6}$ - один из ответов

III случай: $-2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi$, тогда $y = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi = \frac{5\pi}{2} - x$

$$\begin{cases} -2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi \\ 10(\frac{5\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{3\pi}{2} \\ 25\pi - 10x = 9\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \\ x = 2\pi \end{cases}$$

$x = 2\pi$ - один из ответов ит. на след. листе

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 13 (продолжение)

~~III~~ ~~случай: $-2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi$, тогда $y = -(\frac{\pi}{2} - x + \pi)$~~
 ~~$-2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi$~~
 ~~$10(x - \frac{3\pi}{2}) = 9\pi - 2x$~~

IV случай: $-\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 0$, тогда $y = x - \frac{\pi}{2}$
$$\begin{cases} -\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 0 \\ 10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 10x - 5\pi = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{6} \leq x \leq \frac{9\pi}{6}$ $x = \frac{7\pi}{6}$ - один из ~~решений~~ ^{ответов}

V случай $0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi$, тогда $y = \frac{\pi}{2} - x$
$$\begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi \\ 10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2} \\ 5\pi - 10x = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$x = -\pi/2$ - один из ^{ответов}

Ответ: $x \in \{-\pi/2; 7\pi/6; 2\pi; 17\pi/6; 9\pi/2\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 14 (продолжение)

Допустим, что если $-\frac{5}{6a} \in [k_2; k_1]$, то прямая $-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ не может иметь 4 пересечения с ω_1 и ω_2 . Пусть l_3 - прямая с угл. коэф. $k_3 \in [k_2; k_1]$. Проведем прямую l_3 через точку $\Phi - l_3'$. Пусть B_1, B_2, C_1, C_2 - т. как на рисунке. т.к. $k_3 \in [k_2; k_1]$, то l_3' касается в углах $\angle B_2 \Phi C_1$ и $\angle B_1 \Phi C_2$, если \Rightarrow ~~прямая~~ \Rightarrow она не имеет не более 1 пересечения с катетами окр. , если l_3 лежит выше l_3' , то она не пересекает ω_2 , анал. жикн если ниже, то $\omega_1 \Rightarrow$ она не может иметь 4 т. пересеч. с ω_1 и ω_2 .

Если же $-\frac{5}{6a} \notin [k_2; k_1]$, то допустимо предположить, что прямая проходит через т. Φ и она пересечет ω_1 и ω_2 в 4 точках. \Rightarrow ~~не может~~

~~Далее~~ Заметим, что $k_2 = -k_1$,

найдем k_1 . Заметим, что Φ - центр инволюции с коэф. $-\frac{2}{5}$ переводящей ω_1 в $\omega_2 \Rightarrow \frac{\Phi O_1}{\Phi O_2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \Phi O_1 = \frac{45}{7}$, $O_1 B_1 = 5 \Rightarrow$ по Т. Пифагора в $\Delta \Phi O_1 B_1$: $\Phi B_1 = \frac{20\sqrt{2}}{7} \Rightarrow \text{tg} \angle = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow \Rightarrow k_1 = \text{tg}(90^\circ - \angle) = \frac{4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow k_2 = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$ см. на след. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4 (продолжение)

$$\begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{6a} + \frac{4\sqrt{2}}{7} < 0 \\ \frac{4\sqrt{2}}{7} - \frac{5}{6a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{35 + 24a\sqrt{2}}{42a} < 0 \\ \frac{24a\sqrt{2} - 35}{42a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0\right) \\ a \in \left(0, \frac{35\sqrt{2}}{48}\right) \end{cases}$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0\right) \cup \left(0, \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

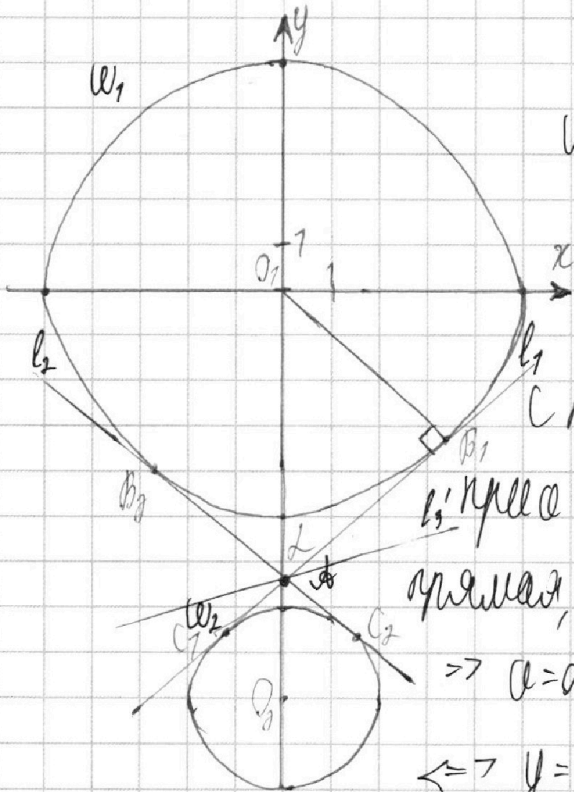
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$



Второе ур-е задает 2 окр ω_1 и ω_2 , изобразим их на рисунке, чтобы

стало видно, что решение уравн

ур-ия $5x + 6ay - b = 0$ может иметь

с ними 4 пересечения. Заметим, что

$l_3: \text{проект} = 0$, этот график - горизонтальная прямая, она не может иметь 4 т. пер. с ω_1 и ω_2

$\Rightarrow a = 0$, тогда ур-е $5x + 6ay - b = 0$

$\Leftrightarrow y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ - ур-е прямой, за-

метим, что при увеличении b ур. коэф. прямой не меняется \Rightarrow

\Rightarrow она просто поднимается или опускается, причем линия b не

может достигать любого значения $\frac{b}{6a} \Rightarrow$ надо найти при каких

указан коэфф. прямая имеет 4 пересечения с ω_1 и ω_2

Проведем к ω_1 и ω_2 2 общие касательные l_1 и l_2 как

на рисунке. Пусть $A = l_1 \cap l_2$, пусть K_1 - ур. коэф. l_1 ,

K_2 - ур. коэф. l_2

и. на след. шаге



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5.

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

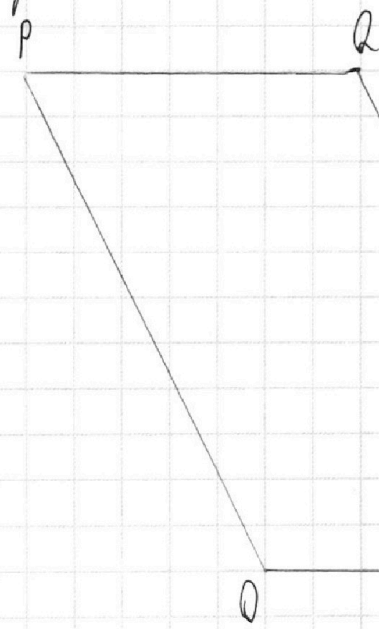
Пусть целая точка-точка с целыми координатами

Пусть $6x_1 + y_1 = k$, тогда

$$\begin{cases} 6x_1 + y_1 = k \\ 6x_2 + y_2 - k = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -6x_1 + k - \text{прямая } l_1 \\ y_2 = -6x_2 + k + 48 - \text{прямая } l_2 \end{cases}$$

Заметим, что если $\alpha \in l_1, \beta \in l_2$, то условие для них выполняется. Также заметим что

прямая l_1 имеет уравнение $y = -6x + 102$, а прямая PO уравнение $y = -6x + k \in \mathbb{Z}$



Значит для катеты $k \in [0; 54]$ прямые l_1 и l_2 будут пересекаться в точке $PQ \cap l_1$

Заметим что на прямой PO (внутри отрезка) лежит 16 точек с целыми координатами $(0 - (-15) + 1)$, также на катете прямой $y = -6x + t$, где $t \in [0; 54]$ лежит по 16 целых точек, (т.к. эти прямые - сдвиги прямой $y = -6x$ на целые расстояния) на прямой $y = -6x + t$, где $t \in [0; 54]$ внутри отрезка $PQ \cap l_1$ лежит по 15 целых точек

или на след. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6. (продолжение)

Назовем парой прямых 2 прямые вида $y_x = -6x + k$ и $y = -6x + k + 48$, где $k \in [0; 54]$, $k \in \mathbb{Z}$

Заметим, что А и В удобн. условием только если А летит на первой прямой из пары, а В на второй. Также, заметим, что на прямых в одной паре существует кол-во целых точек внутри $P \& K O$, т.к. если $k \in \mathbb{Z}$, то $k : 6 \Leftrightarrow k + 48 : 6$. Если на пря-

мых из пары по n точек, то пар (A, B) удобств. условием n^2 . Заметим, что всего пар прямых 55 из них ~~10~~ ¹⁰ пар на каждой прямой по 16 ^{целых} ~~16~~ ^{внутри P&K O} точек, а в остальных 45 пар на каждой прямой по 15 целых точек внутри $P \& K O \Rightarrow$ всего указанных кол-во пар точек равно

$$10 \cdot 16^2 + 45 \cdot 15^2 = 2560 + 10125 = 12685$$

Ответ: 12685