МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №1: Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot x_1$, где $x_1 \not\vdots 2;\ x_1 \not\vdots 3;\ x_1 \not\vdots 5$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot x_2$, где $x_2 \not\vdots 2;\ x_2 \not\vdots 3;\ x_2 \not\vdots 5$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot x_3$, где $x_3 \not\vdots 2;\ x_3 \not\vdots 3;\ x_3 \not\vdots 5$

По условию:
$$\left.\begin{aligned} ab &\vdots 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc &\vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac &\vdots 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\begin{aligned} &2^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2} \cdot x_1 \cdot x_2 \vdots 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ &2^{\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_2+\gamma_3} \cdot x_2 \cdot x_3 \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ &2^{\alpha_1+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_3} \cdot x_1 \cdot x_3 \vdots 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 6 \\ \beta_1+\beta_2 \geq 15 \\ \gamma_1+\gamma_2 \geq 11 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geq 14 \\ \beta_2+\beta_3 \geq 21 \\ \gamma_2+\gamma_3 \geq 13 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geq 16 \\ \beta_1+\beta_3 \geq 25 \\ \gamma_1+\gamma_3 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) &\geq 6+14+16 = 36 \\ 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) &\geq 15+21+25 = 61 \\ 2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) &\geq 11+13+28 = 52 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\wedge$ это выполнение условия для делимости

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 18 \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 31 \\ \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq 26 \end{cases}$$ (в силу того что $a; b$ и $c \in \mathbb{N}$ => сумма степеней целая) =>

$$\Rightarrow abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \geq 2^{18} \cdot 3^{31} \cdot 5^{26} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ответ: $2^{18} \cdot 3^{31} \cdot 5^{26}$

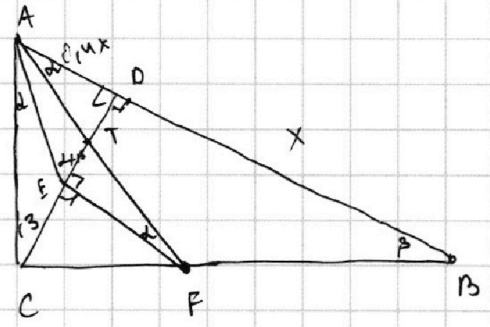
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №2



CA – касательная к описанной окружности $\triangle AEF$ =>

=> По теореме о хорде и касательной

$\angle EAC = \angle AFE = \alpha$

Пусть $\angle B = \beta$

CD – высота в $\triangle ABC$ => $\angle CDA = 90$

$\angle B = \beta$, $\angle C = 90^\circ$ } => $\angle CAD = 90 - \beta$ } =>

=> $\angle ACD = \beta$

EF $\parallel$ AB (по условию), BD $\perp$ CD } => EF $\perp$ CD

$\angle AED = \angle EAC + \angle ECA$ (как внешний в $\triangle ACE$) =>

=> $\angle AED = \alpha + \beta$

CD – высота => $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle ACD = \beta$ (по док.) } => $\angle CAD = 90 - \beta$

$\angle AED = \alpha + \beta$, $\angle CDA = 90^\circ$ } => $\angle DAE = 90 - \alpha - \beta$ (по сумме углов $\triangle ADE$)

$\angle CAE = \alpha$ (по док.)

$\angle CAB = 90 - \beta$ (по док.)

EF $\perp$ CD => $\angle DEF = 90^\circ$, $\angle TFE = \alpha$ (по док.) } => $\angle ETF = 90 - \alpha$ (по сумме углов $\triangle TEF$)

$\angle ETF = 90 - \alpha$ => $\angle ATD$ (как вертикальный к $\angle ETF$) $= \angle ETF = 90 - \alpha$

$\angle ADT = 90^\circ$ (по док.) } => $\angle TAD = \alpha$ (по сумме углов $\triangle ATD$)

$\angle TAD = \alpha = \angle EAC = \alpha$, $\angle ACE = \beta = \angle ABF = \beta$ (по док.) => $\triangle AEC \sim \triangle AFB$ (по двум углам)

-> смотр. след. лист

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №2 (продолжение)

$\triangle AEC \sim \triangle AFB \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$

пусть $DB = x$

по условию $\left.\begin{array}{l} AB : BD = 1{,}4 \\ DB = x \end{array}\right\} \Rightarrow AB = 1{,}4x \Rightarrow AD = 0{,}4x$

$\left.\begin{array}{l} DB = x \\ AD = 0{,}4x \\ CD \text{ - высота в прямоугольном } \triangle CAB \end{array}\right\} \Rightarrow CD = \sqrt{0{,}4x \cdot x} = x\sqrt{0{,}4}$

$\left.\begin{array}{l} AD = 0{,}4x \\ CD = x\sqrt{0{,}4} \end{array}\right\} \Rightarrow$ по т. Пифагора $AC = \sqrt{0{,}4^2x^2 + 0{,}4x^2} = x\sqrt{0{,}16+0{,}4} = x\sqrt{0{,}56}$

$\left.\begin{array}{l} DB = x \\ CD = x\sqrt{0{,}4} \end{array}\right\} \Rightarrow$ по т. Пифагора $CB = \sqrt{0{,}4x^2 + x^2} = x\sqrt{1{,}4}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$ (подоб.) $\Rightarrow \frac{\sqrt{0{,}56}}{1{,}4} = \frac{EC}{FB}$

$\left.\begin{array}{l} \angle FEC = 90^\circ \text{ (так как } FE \perp CD) \\ \angle BDC = 90^\circ \text{ (по усл.)} \\ \angle C \text{ - общий для } \triangle CEF \text{ и } \triangle CDB \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDB$ (по 2 углам) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CE}{x\sqrt{0{,}4}} = \frac{CB - FB}{CB} = \frac{x\sqrt{1{,}4} - FB}{x\sqrt{1{,}4}}$

пусть $\left.\begin{array}{l} CE = a \\ FB = b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{a}{x\sqrt{0{,}4}} = \frac{x\sqrt{1{,}4} - b}{x\sqrt{1{,}4}} \\ \frac{\sqrt{0{,}56}}{1{,}4} = \frac{a}{b} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{1{,}4}\,a = x\sqrt{1{,}4 \cdot 0{,}4} - \sqrt{0{,}4}\,b \\ \sqrt{0{,}56}\,b = 1{,}4a \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow b\,\frac{\sqrt{0{,}56 \cdot 1{,}4}}{1{,}4} = x\sqrt{1{,}4 \cdot 0{,}4} - \sqrt{0{,}4}\,b \Rightarrow b\left(\sqrt{\frac{0{,}56}{1{,}4}} + \sqrt{0{,}4}\right) = x\sqrt{1{,}4 \cdot 0{,}4}$

→ смотрите обратную сторону листа

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 (продолжение)

$b\left(\sqrt{\frac{0{,}56}{1{,}4}}+\sqrt{0{,}4}\right)=x\sqrt{1{,}4\cdot 0{,}4} \Rightarrow b\left(2\sqrt{0{,}4}\right)=x\sqrt{1{,}4\cdot0{,}4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2b=x\sqrt{1{,}4} \Rightarrow b=x\frac{\sqrt{1{,}4}}{2} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{0{,}56}}{1{,}4}\cdot\frac{\sqrt{1{,}4}}{2}x=x\frac{\sqrt{0{,}4}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow CF=x\frac{\sqrt{0{,}4}}{2}$

$FB=x\frac{\sqrt{1{,}4}}{2} \Rightarrow CF=CB-FB=x\sqrt{1{,}4}-x\frac{\sqrt{1{,}4}}{2}=\frac{x\sqrt{1{,}4}}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ По т. Пифагора $EF=\sqrt{CF^2-CE^2}=x\sqrt{\frac{1{,}4}{4}-\frac{0{,}4}{4}}=x\cdot\frac{1}{2}=\frac{x}{2}$ $\Rightarrow$

$CE=x\cdot\frac{\sqrt{0{,}4}}{2}$

$\Rightarrow S_{\triangle CEF}=EF\cdot CE\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot x\frac{\sqrt{0{,}4}}{2}\cdot\frac{x}{2}=x^2\cdot\frac{\sqrt{0{,}4}}{8}$ $\Rightarrow$

$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot 0{,}4x\cdot \cancel{\sqrt{0{,}4}}\ \sqrt{0{,}4}\cdot x=x^2\cdot\frac{0{,}4\cdot\sqrt{0{,}4}}{2}$

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}}=\frac{\frac{0{,}4}{2}}{\frac{1}{8}}=\frac{0{,}4}{2}\cdot 8=4\cdot 0{,}4=1{,}6$

Ответ: 1,6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 3

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Rightarrow \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \frac{9\pi-2x}{10}$

$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) \in [0;\pi]$ тогда пусть $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \in [0;\pi] \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \in [0;\pi] \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \cos\alpha = 0 \quad (1) \end{cases}$

(1): $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \cos\alpha = 0 \Rightarrow -2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x-\alpha}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\frac{\pi}{2}-x+\alpha}{2} = \pi n, n\in\mathbb{Z} \\ \frac{\frac{\pi}{2}-x-\alpha}{2} = \pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}+\alpha-2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2}-\alpha-2\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

При этом из исходного получаем $\alpha = \frac{9\pi-2x}{10}$.

Разберем 2 случая:

1) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}+\alpha-2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{9\pi-2x}{10} \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}+\alpha-2\pi n = \frac{9\pi-10\alpha}{2}, n\in\mathbb{Z} \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \pi+2\alpha-4\pi n = 9\pi-10\alpha, n\in\mathbb{Z} \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12\alpha = 8\pi+4\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi+\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z} \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi+\pi n}{3} \geq 0 \\ \frac{2\pi+\pi n}{3} \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+n \geq 0 \\ 2+n \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \geq -2 \\ n \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow n\in\{-2;-1;0;1\} \Rightarrow \alpha\in\{0;\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\pi\} \Rightarrow x\in\{4\pi+\frac{\pi}{2};\ 2\pi+\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3};\ -\frac{\pi}{2}\}$

2) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}-\alpha-2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{9\pi-2x}{10} \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}-\alpha-2\pi k = \frac{9\pi-10\alpha}{2}, k\in\mathbb{Z} \\ \alpha\in[0;\pi] \end{cases} \Rightarrow$ → смотр. след. лист

Задача №3 (продолжение)

$$\Rightarrow \pi - 2\alpha - 4\pi k = 9\pi - 10\alpha, \quad \alpha \in [0;\pi];\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8\pi + 4\pi k}{8} = \frac{2\pi + \pi k}{2} = \pi + \frac{\pi k}{2} \in [0;\pi];\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi + \frac{\pi k}{2} \geq 0 \\ \pi + \frac{\pi k}{2} \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{k}{2} \geq 0 \\ 1 + \frac{k}{2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + k \geq 0 \\ 2 + k \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq \cancel{0} - 2 \\ k \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \in \{-2; -1; 0\} \Rightarrow \alpha \in \{0; \tfrac{\pi}{2}; \pi\} \Rightarrow x \in \{\tfrac{\pi}{2} + 4\pi;\ 2\pi;\ -\tfrac{\pi}{2}\}$$

В итоге получаем решения:

$$\left[\begin{array}{l} x = 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2} \\ x = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi + 4\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \\ x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2\pi \end{array}\right. \Rightarrow \text{Ответ: } \frac{9\pi}{2};\ \frac{13\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6};\ -\frac{\pi}{2};\ 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

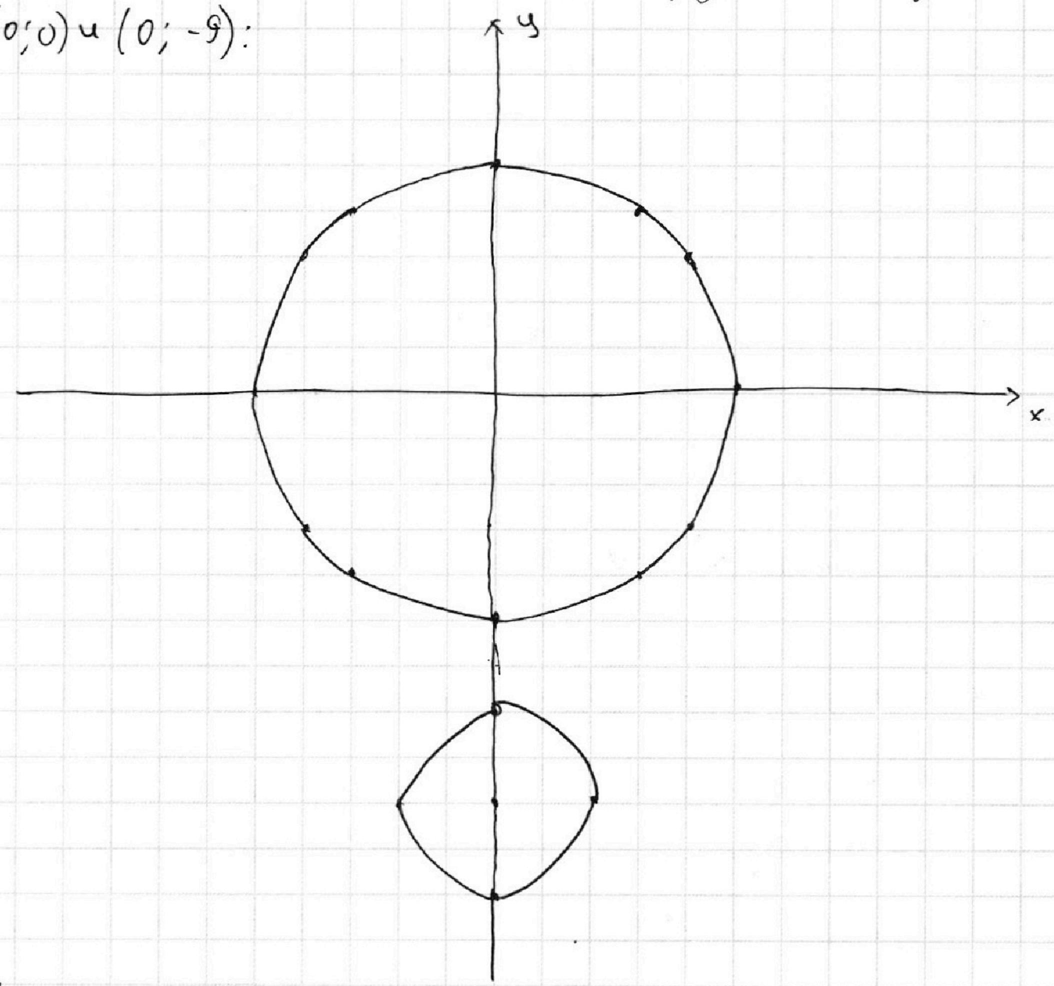
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+6ay-b=0 \quad (1) \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{array}\right. \quad (2) \end{cases}$$

Изображение (2) на графике – это две окружности с центрами $(0;0)$ и $(0;-9)$:



При этом $5x+6ay-b=0$ – это линия.

Рассмотрим два случая $a=0$ и $a\neq 0$:

1) $a=0 \Rightarrow 5x=b$

$x=\frac{b}{5}$, очевидно, что найдётся b такое, что прямая будет пересекать обе окружности по 2 раза: пример $b=0$.

$\rightarrow$ смотрите обратно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4 (продолжение)

2) $a \neq 0$ ~~при~~

$$y = \frac{b+5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$$

Заметим, что выбирая а мы фиксируем наклон прямой, а после этого, выбирая b, определяем точку пересечения с осью Y =>

=> выбирая b мы можем получить все прямые с наклоном $-\frac{5}{6a}$.

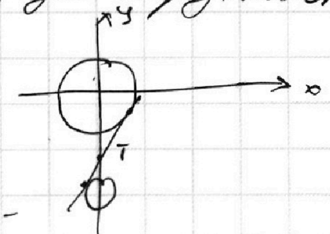
При этом $-\frac{5}{6a}$ принимает все значения на множестве действительных чисел кроме 0.

Заметим, что прямая имеет не более 2 точек пересечения с окружностью => Если решений 4, то прямая пересекает ~~окружности~~ каждую из 2 окружностей по 2 раза.

В силу симметричности картинки относительно прямой OY рассмотрим только прямые с положительным наклоном, так как в силу симметрии подходящие отрицательные наклоны будут совпадать по модулю с положительными наклонами.

Проведём общую внутреннюю касательную с положительным наклоном к двум окружностям:

Она пересекла ось OY в точке T, тогда заметим, что все прямые имеющие больший наклон и проходящие через T будут удовлетворять условию задачи.



=> смотри след. лист

Задача №4 (продолжение)

В прямые меньшие меньший наклон, чем общая касательная не будут удовлетворять условию не при каких b, так как в точке T они не имеют решений, а при ~~увеличении~~ ~~угла~~ перемещении прямой вверх она отдаляется от малой окружности => с ней решений не будет, и аналогично перемещение вниз и отдаление от большой окружности. При этом сама касательная подходит тоже не точно => не подходит, так как имеет всего 2 решения в T, а при ~~увеличении~~ перемещении теряет одну у окружностей.

Найдём наклон касательной:

$y = kx + b$ - уравнение касательной

Она имеет одно пересечение с большой окружностью =>

$$\Rightarrow \begin{cases} y = kx+b \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \text{ имеет одно решение} \Rightarrow x^2 + (kx+b)^2 = 25$$

$$x^2 + k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 25 \Rightarrow x^2(k^2+1) + 2kbx + b^2 - 25 = 0$$

$$\begin{cases} D = 4k^2b^2 - 4(k^2+1)(b^2-25) \\ 1 \text{ решение} \end{cases} \Rightarrow 4(k^2b^2 - k^2b^2 + 25k^2 - b^2 + 25) = 0$$

$$25k^2 - b^2 + 25 = 0$$

Она имеет одно пересечение с малой окружностью:

$$\begin{cases} y = kx + b_1 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases} \text{ имеет 1 решение} \Rightarrow x^2 + k^2x^2 + b_1^2 + 81 + 2kxb_1 + 18kx + 18b_1 = 4$$

$$x^2(1+k^2) + x(2kb_1 + 18k) + b_1^2 + 18b_1 + 77 = 0$$

$$\begin{cases} D = (2kb_1 + 18k)^2 - 4(1+k^2)(b_1^2 + 18b_1 + 77) \\ 1 \text{ решение} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2b_1^2 + 81k^2 + 2kb_1 \cdot 9k - b_1^2 - 18b_1 - 77 - k^2b_1^2 - 18b_1k^2 - 77k^2 = 0$$

-> смотрите оборот листа

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (продолжение)

$$\begin{cases} 25k^2 - b_1^2 = -25 \\ 4k^2 - b_1^2 - 18b_1 - 77 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 = \dfrac{b_1^2 + 18b_1 + 77}{4} \\ 25k^2 = b_1^2 - 25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4}(b_1^2 + 18b_1 + 77) = b_1^2 - 25$$

$$25b_1^2 + 25\cdot 18b_1 + 25\cdot 77 = 4b_1^2 - 100 \Rightarrow 21b_1^2 + 25\cdot 18b_1 + 25\cdot 81 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7b_1^2 + 25\cdot 6b_1 + 25\cdot 27 = 0$$

$$D = 25^2\cdot 6^2 - 4\cdot 7\cdot 25\cdot 27 = 25(25\cdot 36 - 4\cdot 7\cdot 27) = 100(25\cdot 9 - 7\cdot 27) =$$

$$= 100\cdot 36 \Rightarrow b_1 = \frac{-25\cdot 6 \pm 60}{14} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b_1 = \dfrac{-150+60}{14} = \dfrac{-90}{14} = -\dfrac{45}{7} \\ b_1 = \dfrac{-210}{14} = -\dfrac{30}{2} = -15 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k^2 = \dfrac{15^2 - 25}{25} = \dfrac{15^2}{25} - 1 = 8 \\ k^2 = \dfrac{(\frac{45}{7})^2 - 25}{25} = \dfrac{45^2}{7^2\cdot 25} - 1 = \dfrac{81}{49} - 1 = \dfrac{81-49}{49} = \dfrac{81-50+1}{49} = \dfrac{32}{49} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = \pm\sqrt{8} \\ k = \pm\sqrt{\dfrac{32}{49}} \end{array}\right.$$

Но мы искали общую внутреннюю касательную с положительным наклоном $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ b_1 \in [-5; -7] \end{cases}$$

— это отрезок оси Oy между окружностями (не писали)

Касательная внутренняя она касается с разных сторон относительно линии центров $\Rightarrow$ она пересекает Oy именно на этом отрезке.

$$\left.\begin{array}{l} -15 \notin [-5; -7] \\ -\frac{45}{7} \in [-5; -7] \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 = -\frac{45}{7} \Rightarrow \begin{cases} k = \pm\sqrt{\frac{32}{49}} \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{32}}{7}$$

Значит нам подходят все прямые с данным наклоном, начиная у касательной по значению $\Rightarrow -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \Rightarrow$ $\rightarrow$ смотрите след. лист.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4 (продолжение)

$-\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7}$

$\Rightarrow a < 0$

$\begin{cases} \frac{-5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-5}{6} < \frac{a\sqrt{32}}{7} \Rightarrow a > \frac{-35}{6\sqrt{32}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \left(\frac{-35}{6\sqrt{32}}; 0\right)$

При этом как писалось выше, можно рассматривать изначально случай стороны от оси Oy и в силу симметрии наклоны вида $-\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$ также удовлетворяют условию $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \Rightarrow a < \frac{35}{6\sqrt{32}} \Rightarrow a \in \left(0; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

Получаем, что подходят $a = 0$; $a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; 0\right)$; $a \in \left(0; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $\left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{\frac{1}{8}y^3}\left(11^{-13}\right) - 5 \end{cases}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0,5y > 0 \Rightarrow y > 0 \\ 0,5y \neq 1 \Rightarrow y \neq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{-\frac{2}{3}}{\log_{11} x} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = \frac{-\frac{13}{3}}{\log_{11} 0,5y} - 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$a = \log_{11} x$

$b = \log_{11} 0,5y$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a} - 5 \\ 4b + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{b} - 5 \end{cases} \sim \begin{cases} 4a^2 - 6 = -\frac{2}{3} - 5a \ (1) \\ 4b^2 + 1 = -\frac{13}{3} - 5b \end{cases}$$

(1): $4a^2 + 5a - 5\frac{1}{3} = 0$

$12a^2 + 15a - 16 = 0 \Rightarrow D = 225 + 4\cdot 12\cdot 16 = 225 + 768 = 993$

$a = \frac{-15 \pm \sqrt{993}}{24} \Rightarrow \log_{11} x = \frac{-15 \pm \sqrt{993}}{24}$

(2): $4b^2 + 5b + 1 + \frac{13}{3} = 0$

$12b^2 + 15b + 16 = 0$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} = \frac{-\frac{2}{3}}{a} - 5 \quad (1) \\ b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-\frac{13}{3}}{b} - 5 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $a^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5a$

$a^5 + 5a - 6 + \frac{2}{3} = 0$

$3a^5 + 15a - 18 + 2 = 0$

$3a^5 + 15a - 16 = 0$

(2): $3b^5 + 15b + 16 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3(a^5 + b^5) + 15(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - ba^3 + b^2a^2 + b^4 - b^3a + 5) = 0$$

1) $\left[\begin{array}{l} a + b = 0 \quad (1) \\ a^4 - ba^3 + b^2a^2 + b^4 - b^3a + 5 = 0 \end{array}\right.$ —> смотрите сл. лист

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 (продолжение)

(1): $a+b=0$

$b=-a$

$\begin{cases} 3a^5+15a-16=0 \\ -3a^5-15a+16=0 \end{cases} \Rightarrow 3a^5+15a-16=0$

~~Оба~~ оба уравнения ~~...~~ сводятся к одному

Это уравнение имеет решения, так как

$3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{15}{2}-16<0$ и $3\cdot 1+15-16>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ На отрезке от $\frac{1}{2}$ до 1 есть корень.

$a+b=0 \Rightarrow \log_{11}x+\log_{11}0{,}5y=0 \Rightarrow \log_{11}\frac{1}{2}xy=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}xy=1$

$xy=2 \Rightarrow$ 2 - одно из искомых значений

(2): $a^4-ba^3+b^2a^2-b^3a+b^4+5=0$

Пусть $a+b=\alpha$

$\Rightarrow a^4-a^3(\alpha-a)+(\alpha-a)^2a^2-(\alpha-a)^3a+(\alpha-a)^4+5=$

$=a^4-a^3\alpha+a^4+a^2(\alpha^2+a^2-2\alpha a)-a(\alpha^3+a^3-3a^2\alpha-3\alpha^2a)+\alpha^4+a^4-\alpha^3a-a^3\alpha+\alpha^2a^2+5$

$a^4-\cancel{a^3\alpha}+a^4+a^2\alpha^2+a^4-\cancel{2\alpha a^3}-a\alpha^3-\cancel{a^4}+\cancel{3a^3\alpha}+3\alpha^2a^2+\alpha^4+\cancel{a^4}-\alpha^3a-\cancel{a^3\alpha}+\alpha^2a^2+5=3a^4-a^3\alpha+5a^2\alpha^2-2\alpha^3a+5\alpha^4$

Задача №6

Выведем уравнения прямых, ограничивающих ▱:

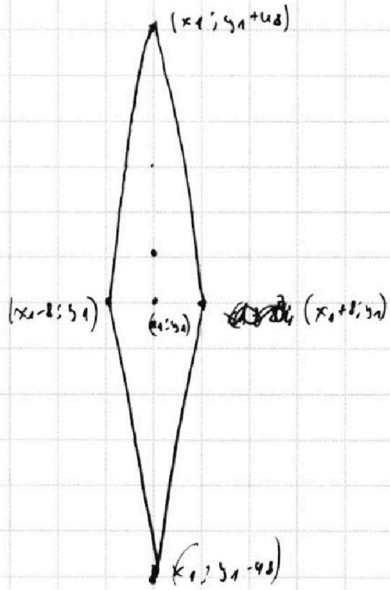
O и P образуют прямую: $y = -\frac{90}{15}x = -6x$

O и ~~R~~ Q образуют прямую: $y = 0$

P и ~~R~~ образуют: $y = 90$

Q и R образуют: $y - 6(x - 17) = -6x + 17 \cdot 6 = 102 - 6x$

Заметим, что если зафиксировать точку $x_1; y_1$, то точки $(x_2; y_2)$ будут ограничены вот такой областью:

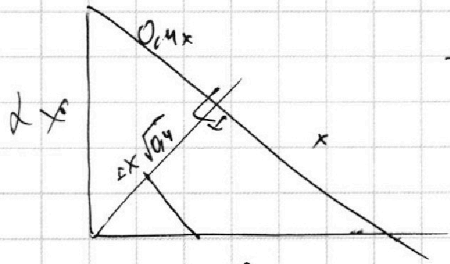


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{AC}{AB} = \frac{FC}{FB}$$

$80 - 15 - \alpha$

$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB} = \frac{CB - FB}{FB}$$

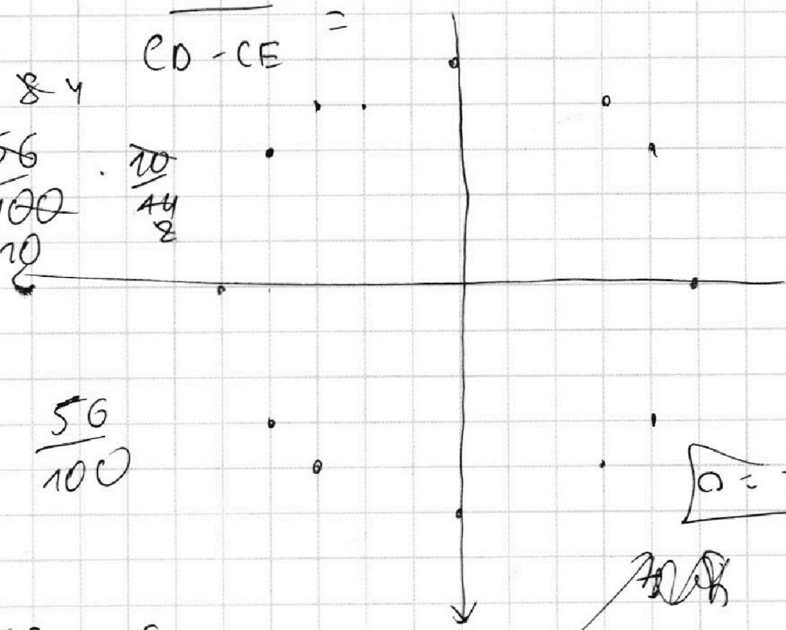
$$\frac{CE}{CD - CE} =$$

$8 - 4$

$$\frac{56}{100} \cdot \frac{10}{44}$$

8

10



$$\frac{56}{100}$$

$\boxed{a = 0}$

$$\begin{cases} 5x + 6ay + b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

$6ay = b - 5x$

$a \neq 0$

$$y = \frac{b - 5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

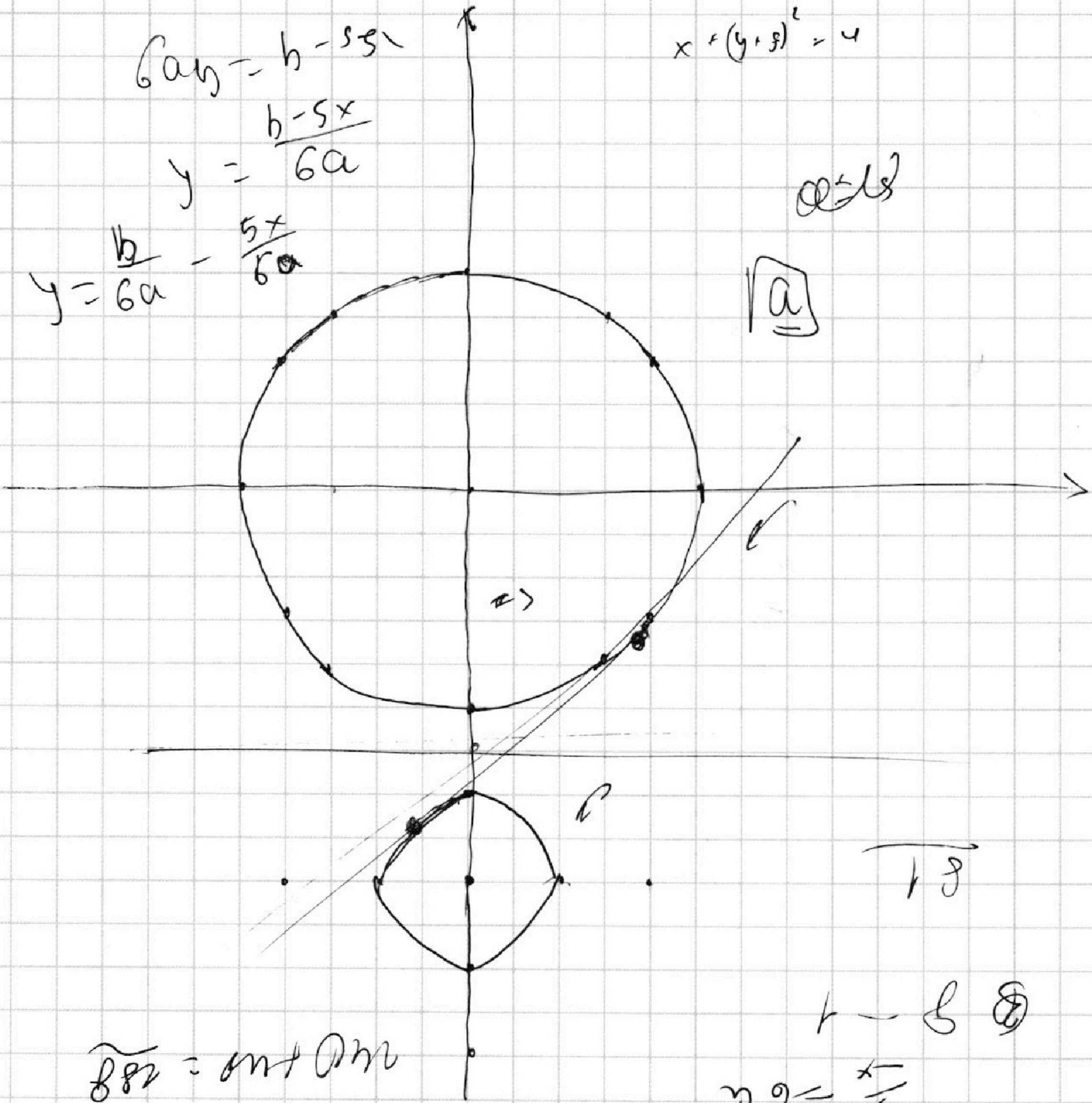
МФТИ

$6ay = b - 5x$

$y = \frac{b-5x}{6a}$

$y = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$

$x^2 + (y+8)^2 = 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab: 2^6 \cdot 3^{15} \cdot 5^{11}$

$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$abc_{min} = ?\ 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \to min$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

$\alpha_1+\alpha_2 \geq 6$ $\quad \alpha_2+\alpha_3 \geq 14$ $\quad \alpha_1+\alpha_3 \geq 16$

$\beta_1+\beta_2 \geq 15$ $\quad \beta_2+\beta_3 \geq 21$ $\quad \beta_1+\beta_3 \geq 25$

$\gamma_1+\gamma_2 \geq 11$ $\quad \gamma_2+\gamma_3 \geq 13$ $\quad \gamma_1+\gamma_3 \geq 28$

54

1

~ 54

"

0

$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geq 36$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 18$

$\frac{61}{2}$

30,5

51

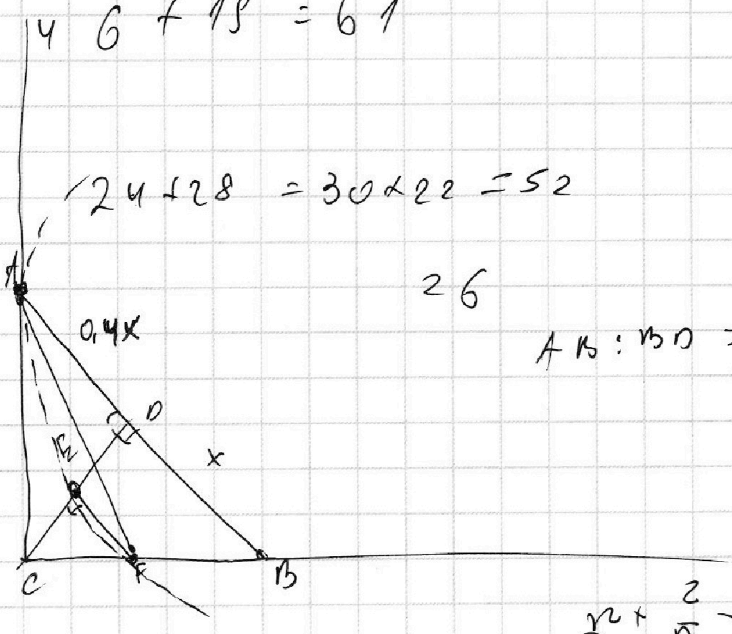
1

~ 54

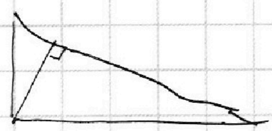
4 6 + 18 = 61

24 + 28 = 30 + 22 = 52

26



AB : BD = 1,4



$r^2 + \frac{2}{r} - \frac{2}{r}$

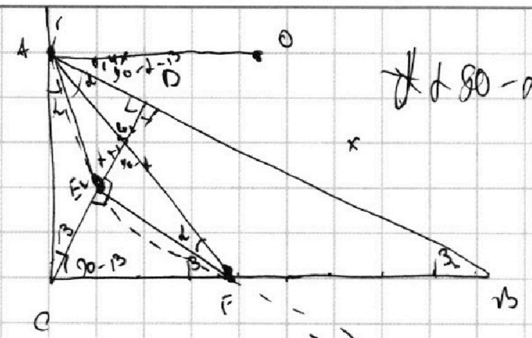
$r - \frac{2}{r}$

$r + 0 - \frac{2}{r}$

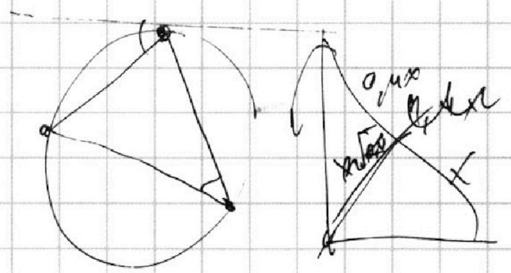
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

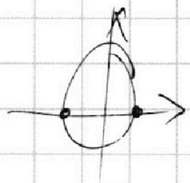


$\angle 180-\alpha-\beta$



$\cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$\arccos(\cancel{\sin x}) = \frac{9\pi-2x}{10}$



$h = \sqrt{0{,}4x \cdot x}$

$\frac{\pi}{2}-x \sim \alpha$

Если $\frac{\pi}{2}-x \in [0;\pi)$ $v = x\sqrt{0{,}4}$

$\alpha \in [0;\pi]$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \cos\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x) - \cos\alpha = 0 \Rightarrow$

$-2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x-\alpha}{2} = 0$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\left[\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x+\alpha}{2}\right)=0 \\ &\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x-\alpha}{2}\right)=0 \end{aligned}\right.$

$\left[\begin{aligned} &\frac{\frac{\pi}{2}-x+\alpha}{2} = \pi n, n\in\mathbb{Z} \\ &\frac{\frac{\pi}{2}-x-\alpha}{2} = \pi n, n\in\mathbb{Z} \end{aligned}\right.$

1) $x = \frac{\pi}{2}+\alpha-2\pi n$

2) $x = \frac{\pi}{2}-2\pi n-\alpha$

$\alpha = \frac{9\pi-2x}{10}$

$10\alpha = 9\pi-2x$

$2x = 9\pi-10\alpha$

$x = \frac{9\pi-10\alpha}{2}$

1) $\frac{\pi}{2}+\alpha-2\pi n = \frac{9\pi-10\alpha}{2}$

$\pi+2\alpha-4\pi n = 9\pi-10\alpha$

$12\alpha = 8\pi+4\pi n$

$\alpha = \frac{2\pi+\pi n}{3}$

$\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}$ $\frac{\quad}{6}$

$\frac{\pi}{2}+\pi-2\pi$

$\frac{\pi}{2}+0+4\pi$

$\frac{\pi}{2}-\pi$

$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

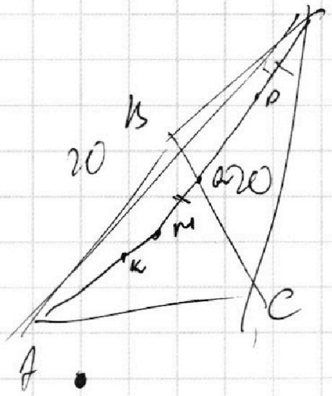
1 2 3 4 5 6 7

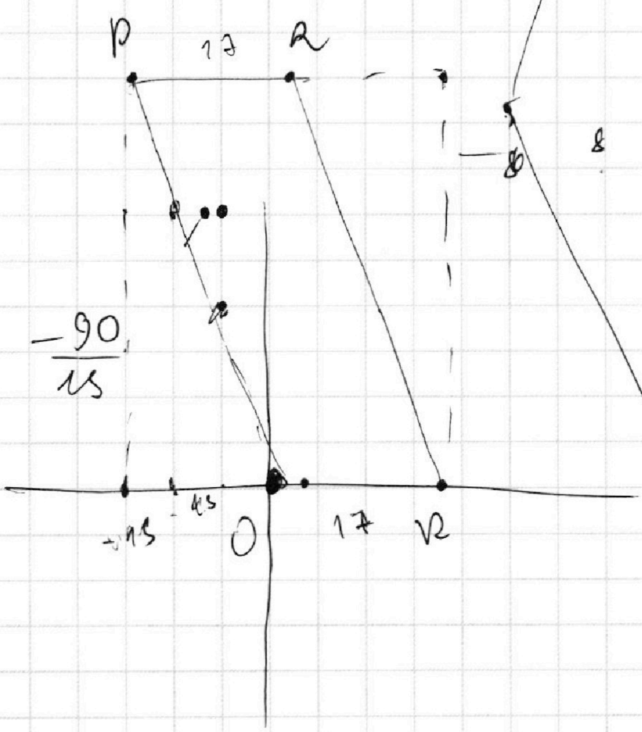
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

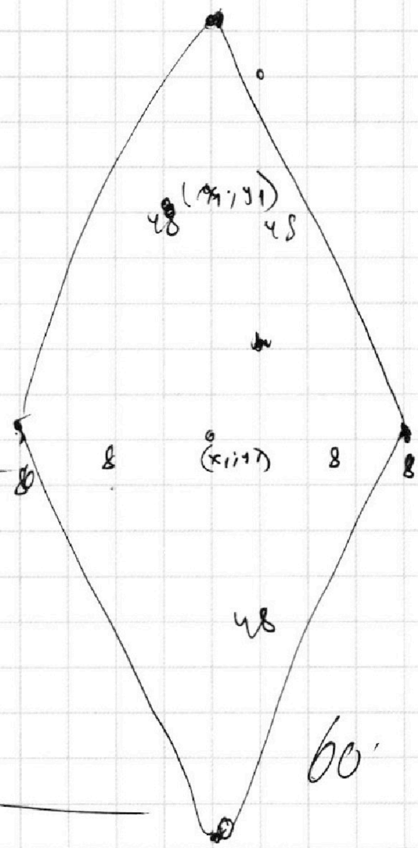
МФТИ

$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$







$a^4 - a^3\alpha + a^4 + a^2\alpha^2 + a^4 - 2\alpha a^3 - a\alpha^3 - a^4$

$y = -6(x-17) = 6x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = (\log_{x^3} \frac{1}{121}) - 5$

$\log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{\frac{1}{8}y^3}(11^{-13}) - 5$

$64 \cdot 12$

$640 + 128$

$64 \cdot 12 = 128 + 64 = 768$

$768 \cdot 225 = 893$

$1768 - 225 = 893$

235 ~~11~~ ~~13~~ 17 ~~19~~

331 + 11

331 + 13

260

331 + 7   71

280 + 51

300

$3 \cdot 331$

$3 \cdot \frac{1}{3} 5 + \frac{13}{3} - 16$

$225 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 16$

$a + b = \log_{11} x + \log$

$b^5 + 1 + \frac{13}{3} + 5 = 0$

$(a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4)(a+b) =$

$3b^5 + 15b + 16 = 0$

$= a^5 - ba^4 + b^2a^3 - b^3a^2 + \cancel{b^4a} + \cancel{ba^4} - b^2a^3 + b^3a^2 - \cancel{b^4a} + b^5$

$a^5 + b^5 \mid a + b$; $a^4 - ba^3 + b^2a^2 - ba^3 + b^4$

$a^5 + ba^4$

$b^5 - ba^4$

$-ba^4 - b^2a^3$

$b^5 + b^2a^3$

$(a+b)\ (a^4$

$\log_{11} x \cdot \log_{11} 0{,}5y = c$

$ab = c$

$\log_{11} x = \frac{c}{\log_{11} 0{,}5y}$

$a = \frac{c}{b}$

$(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 - ba(a^2 + b^2) + 5$

$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ba) - a^2b^2 + 5$