



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a_p, b_p, c_p - степени вхождения в разложение на прост. множители чисел a, b и c соотв.

чет. простого числа p , тогда:

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ a_7 + b_7 \geq 11 \end{cases}$$

Аналогично для bc и ac ; получаем:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ a_7 + b_7 \geq 11 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ b_7 + c_7 \geq 18 \\ a_2 + c_2 \geq 23 \\ a_7 + c_7 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 15 + 17 + 23 = 55 \\ 2a_7 + 2b_7 + 2c_7 \geq 11 + 18 + 39 = 68 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 28 \\ a_7 + b_7 + c_7 \geq 39 \quad (\text{поск. к. } a_7 + c_7 \geq 39, \text{ то } a_7 + b_7 + c_7 \geq 39) \end{cases}$$

\Rightarrow Сумма вхождения двойки в разл. $abc \geq 28$,

а семёрки ≥ 39 . Заметим, что при $abc =$

$$= 2^{28} \cdot 7^{39} \quad (\text{т.е. мин. возм. при таких условиях})$$

существует подходящая тройка a, b, c :

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}, \quad b = 2^5, \quad c = 2^{13} \cdot 7^{28} \quad \text{и}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}; \quad 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc = 2^{18} \cdot 7^{28}; \quad 2^{18} \cdot 7^{28} \quad \text{и}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}; \quad 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

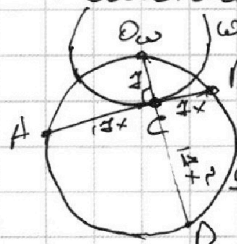
№ 3

Дано: ω, Ω - окр., центр ω лежит на Ω , $A, B \in \Omega$,

$$AB \cap \omega = C, \frac{AC}{CB} = \frac{17}{4}$$

Найти: AB - ?

Решение: Пусть O_ω - центр ω , D - пересечение



продолжения $O_\omega C$ за точку C и Ω ,

Ω тогда $AC \cdot CB = O_\omega C \cdot CD$. Положим

$$AC = 17x, \text{ а } CB = 4x, \text{ тогда: } 17 \cdot 4x^2 = 4 \cdot CD$$

$$\Rightarrow CD = 17x^2. \text{ Т.е. прямоугол. треугольники}$$

$\triangle O_\omega CB$ и $\triangle ACD$ подобны (по двум катетам), то

их площади тоже подобны с коэфф. $\frac{17^2}{4^2} \Rightarrow$

$$S_{ACD} = \frac{17^2}{4^2} S_{O_\omega CB} \Leftrightarrow 17^2 x^3 = 17^2 \cdot \frac{4^2}{2} x = 17^2 x \Rightarrow x = 1$$

$$(x > 0), \text{ с.е. } AB = 17x + 4x = 17 + 4 = 24$$

Ответ: ~~AB~~ 24

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 4

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$$

① ~~возможны~~ Пусть $3x^2 - 6x + 2 = a$ и $3x^2 + 3x + 1 = b$, тогда заметим, что $a - b = 1 - 9x$ и $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1 - 9x \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} - 9x \Leftrightarrow 9x = 2\sqrt{b} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{ОДЗ: } x \in [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 1248$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

ОДЗ
 $\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} < \frac{6 + 2 \cdot 8}{69} < 1$
 $\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < \frac{6 - 2 \cdot 8}{69} < 0$
 $\notin \text{ОДЗ}$

\Rightarrow корней нет

Ответ: \emptyset

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ищем, т.е. $ax+y-8b=0$ - кас., \forall θ :

$$\begin{cases} \frac{|a \cdot 0 + 0 - 8b|}{\sqrt{a^2+1}} = 1 \\ \frac{|a \cdot 0 + 12 - 8b|}{\sqrt{a^2+1}} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64b^2 = a^2 + 1 \\ 144 - 192b + 64b^2 = 4(a^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 64b^2 = a^2 + 1 \\ (2b+1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \pm\sqrt{15} \\ b = -\frac{3}{2} \\ a = \pm\sqrt{47} \end{cases}$$

\Rightarrow Все подходящие значения пар-ра a $\Rightarrow \pm\sqrt{15}$ и $\pm\sqrt{47}$

Ответ: $-\sqrt{47}, -\sqrt{15}, \sqrt{15}, \sqrt{47}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 6

Заметим, что нер-во $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$

эквивалентно системе нер-в:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

- решаем и обе системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{— два круга с центрами в } (0; 0) \text{ и } (0; 12) \\ \text{радиусы } 1 \text{ и } 4 \text{ соотв.} \end{array}$$

Пр-е $ax + y - 8b = 0$ при разл. пар-ах a и b

задает всевозможные прямые.

либо ~~ни~~ ноль,

либо ∞ прямой и круга либо одна

(касание), либо бесконечно много

(прямая проходит через круг) точек пере-

сечения. Поэтому для того чтобы

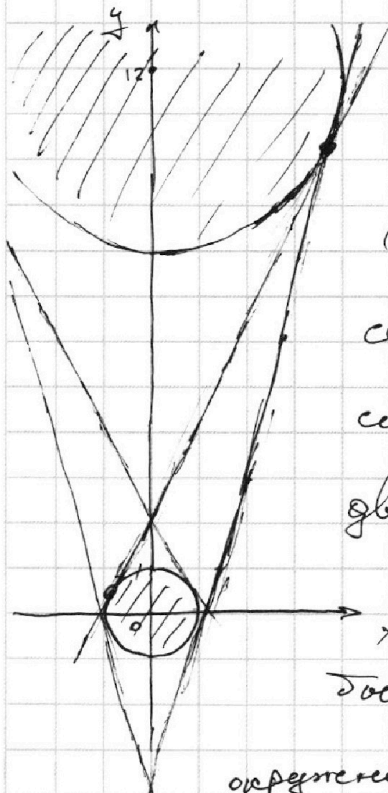
система из условия имела ровно

два решения, нужно необходимо и

достаточно, чтобы прямая $ax + y - 8b = 0$

была общей касательной границных

окрестностей кругов.





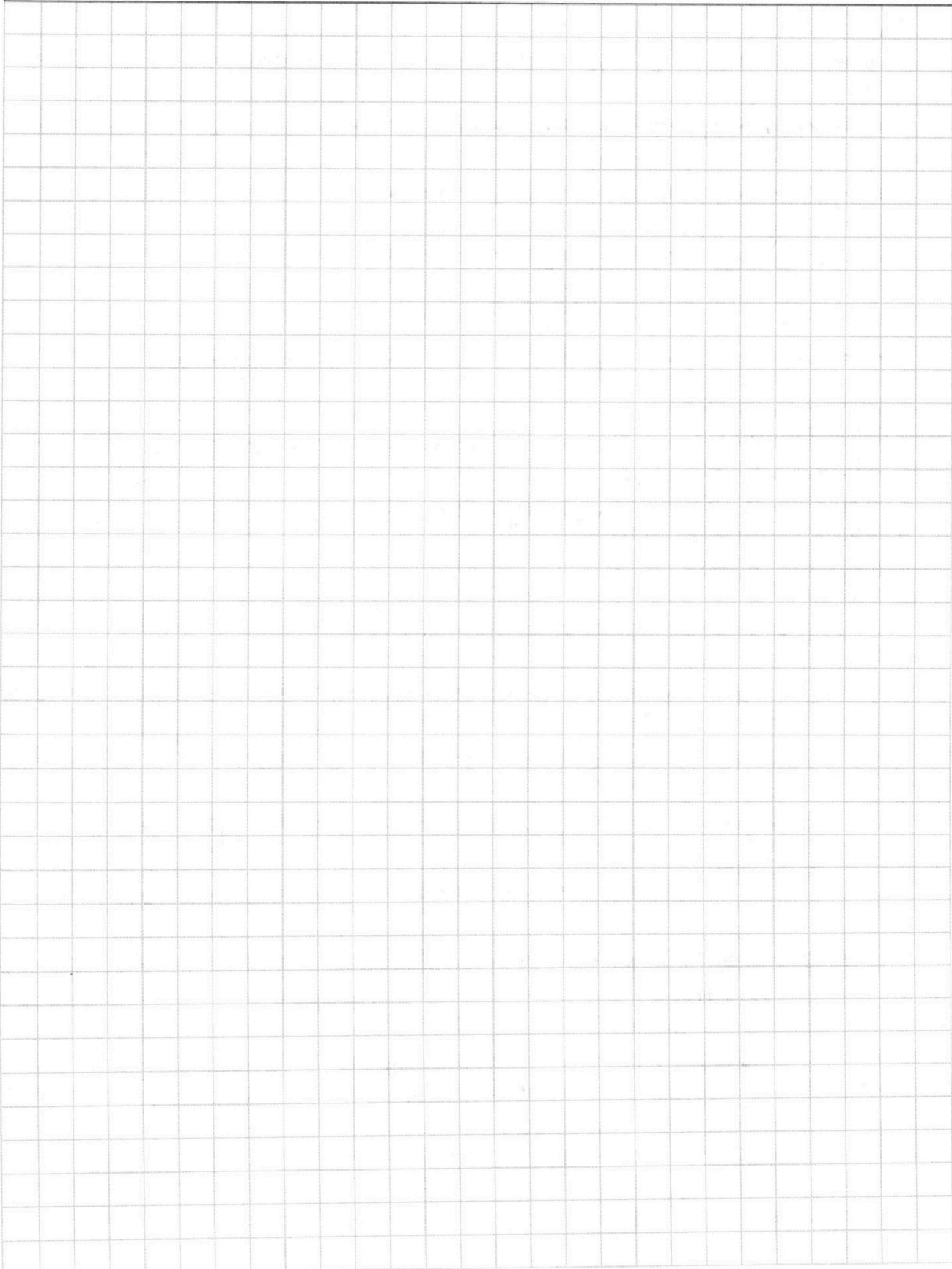
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$ab = n \cdot 2^{15} \cdot 4^1$~~
 ~~$bc = m \cdot 2^{17} \cdot 4^8$~~
 ~~$ac = k \cdot 2^{23} \cdot 4^{39}$~~
 ~~$abc = 2^{15+17+18} \cdot 4^{11+18+39} = 2^{50} \cdot 4^{68}$~~

~~$a = 2^8 \cdot 4^6$~~
 ~~$ab = n \cdot 2^{15} \cdot 4^1$~~
 ~~$abc = \sqrt{nmk} \cdot 2^{25} \cdot 4^{34}$~~
 ~~$c = \sqrt{\frac{mk}{n}} \cdot 2^{10} \cdot 4^{23}$~~
 ~~$a = \sqrt{\frac{nk}{m}} \cdot 2^{18} \cdot 4^{16}$~~
 ~~$b = \sqrt{\frac{nm}{k}} \cdot 2^{10}$~~

~~$bc : ab \Rightarrow c : a$~~
 ~~$ac : bc \Rightarrow a : b$~~
 ~~$ab = a^2 b^2 = n \cdot 2^{15} \cdot 4^1$~~
 ~~$bc = c^2 b^2 = m \cdot 2^{17} \cdot 4^8$~~
 ~~$ac = a^2 c^2 = k \cdot 2^{23} \cdot 4^{39}$~~

~~$abc = r \cdot 2^{23} \cdot 4^{39} \Rightarrow r : b, \text{ и } kb = r$~~

~~$abc = kb \cdot 2^{23} \cdot 4^{39}$~~

~~$ab = 2^5 \cdot 4^{16}$~~

~~$bc = 2^{17} \cdot 4^{18}$~~

~~$ac = 2^{23} \cdot 4^{39}$~~

$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 = 16 \\ a_4 + b_4 = 16 \end{cases}$

~~$a = 2^{10} \cdot 4^{11}$~~

~~$b = 2^5$~~

~~$c = 2^{13} \cdot 4^{28}$~~

~~$b_4 + c_4 = 17$~~

~~$b_4 + c_4 = 18$~~

~~$a_2 + c_2 = 23$~~

~~$a_4 + c_4 = 39$~~

$\begin{cases} c_2 - a_2 = 1 \\ c_2 + a_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 12 \\ a_2 = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} c_4 - a_4 = 4 \\ c_4 + a_4 = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_4 = 23 \\ a_4 = 16 \end{cases}$

~~$ab = kb$~~
 ~~$abc = nb$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ a_2 + b_2 \geq 11 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_2 + c_2 \geq 23 \\ a_2 + c_2 \geq 28 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3 + 2 = 5 \\ 9 - 2 \cdot 6 + 4 \\ 13 - 4 \cdot 2 \\ 17 - 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 2 + 2 \\ 3 \cdot 2 + 2 \\ 15 \cdot 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_2 + 2b_2 + c_2 \geq 32 \\ 2b_2 \geq 9 \\ b_2 \geq 5 \Rightarrow a_2 \geq 10 \\ b_2 \geq 9 \\ a_2 \geq 10 \\ 28 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq (32 + 23) : 2 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 34 \\ 2 + 1 = \frac{3}{5} \end{array}$$

$2^{28} = abc$

$c = 2^{18} \Rightarrow b = 24 \Rightarrow a = 2^5$

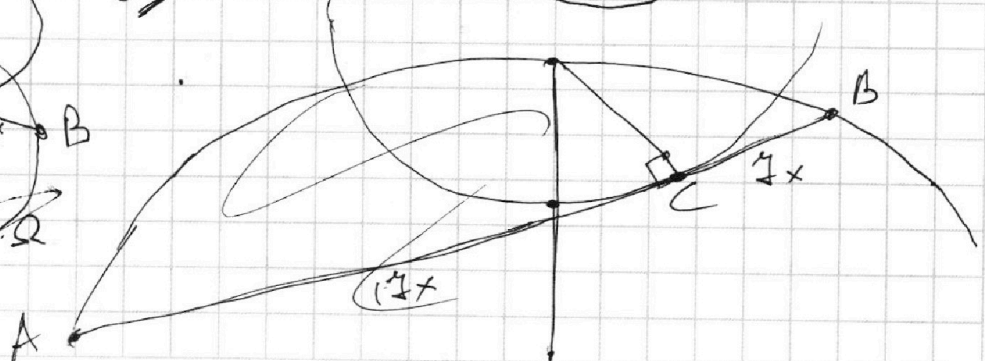
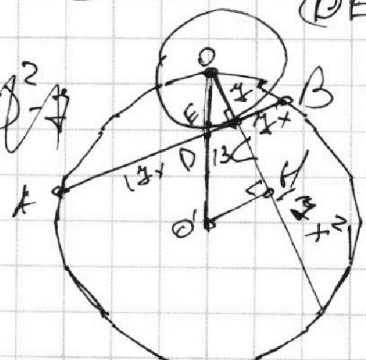
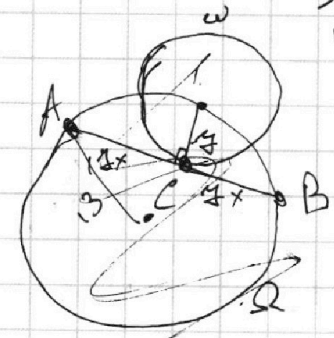
$gcd(a, b) = 1$
 $gcd(a - 5ab + b^2, a + b) \Rightarrow x = 1$

$= gcd(5ab, a + b)$

$DE^2 + 2DE \cdot EQ = DE^2 + 2DE \cdot EQ + EQ^2 - EQ^2$
 $\Rightarrow EQ = \dots$

$DC = DE \cdot (DE + 14) = (DE + 7)^2 - 49$

$OH = \sqrt{169 - \frac{17x^2}{2}}$



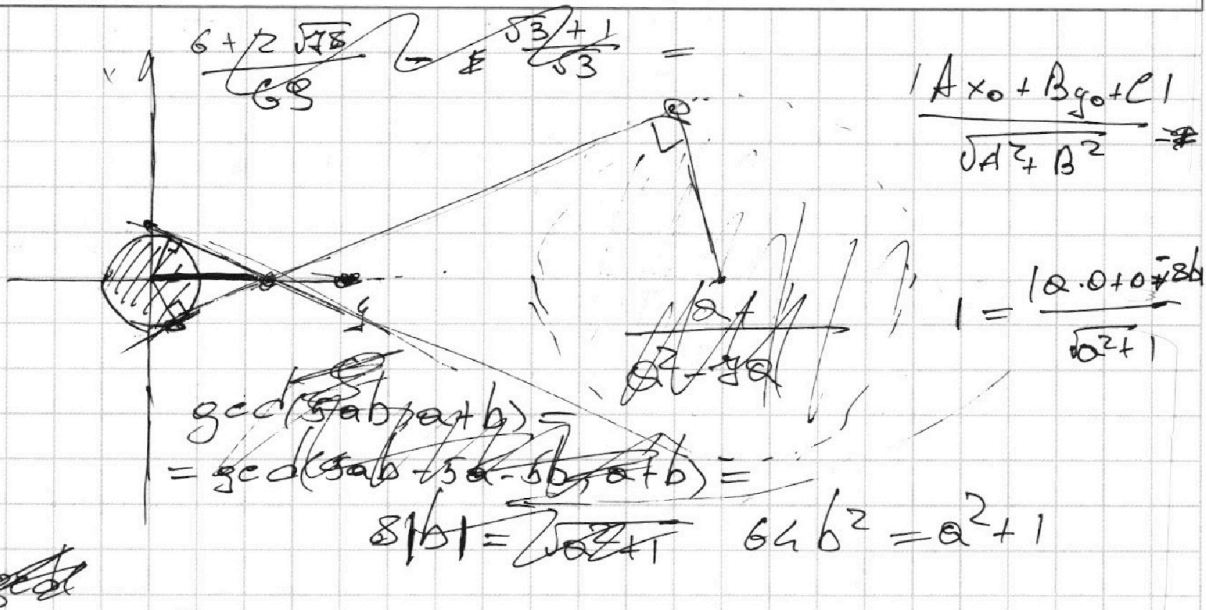
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (12 - 8b)^2 = 4a^2 + 4 \\ 64b^2 = a^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 144 - 192b + 64b^2 - 4a^2 = 4 \\ 64b^2 = a^2 + 1 \end{cases}$$

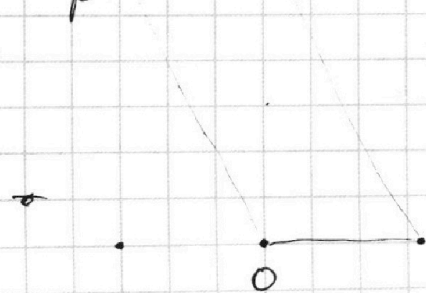
$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^2 - 144 + 192b - 3 \cdot 64b^2 + 192b - 144 = 0 \\ 64b^2 = a^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4b^2 + 3b - \frac{3}{4} = 0 \\ 64b^2 = a^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2b+1)^2 = 4 \\ 64b^2 \neq a^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a^2 = \pm \sqrt{15} \\ b = -\frac{3}{2} \\ a = \pm \sqrt{27} \end{cases}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14 - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 2$$

$$= \frac{14}{x_2 - x_1} - 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 3 - \sqrt{3}] \cup [3 + \sqrt{3}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; 3 - \sqrt{3}] \cup [3 + \sqrt{3}; +\infty)$$

$$6 \pm \sqrt{36 - 24}$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} - \sqrt{3(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = 1 - 9x$$

$$t = x - \frac{1}{4}$$

$$(3x^2 + (6x - 2))(3x^2 + (3x + 1))$$

$$\sqrt{3(t - \frac{3}{4})^2 - 10} - \sqrt{3(t + \frac{3}{4})^2 + \frac{3}{4}} = 8x^4 + 3x^2(3 + 3x) +$$

$$+ (3x + 1)(2 - 6x) =$$

$$6x^2 - 9x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1 - 9x$$

$$a - b = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 1$$

$$x - 9x = x - 2\sqrt{b} \Rightarrow x \geq 0$$

$$4b = 8x$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 8x$$

$$12x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{69 \pm \sqrt{69^2 - 16 \cdot 12}}{24} = \frac{69 \pm \sqrt{4569}}{24}$$

$$\begin{array}{r} 4569 \overline{) 3} \\ 823 \end{array}$$

$$24x^2 + 24x + 8 = 0$$

$$144 + 1104 = 1248$$

$$2 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 23$$

$$2 \cdot 3 (2 \cdot 3 - 23)$$