



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a_r, b_r, c_r$  - степени вхождения в разложение на прост. множители чисел  $a, b$  и  $c$  соотв.

чет. простого числа  $p$ , тогда:

$$ab : 2^{15} \cdot 11^1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ a_{11} + b_{11} \geq 11 \end{cases}$$

Аналогично для  $bc$  и  $ac$ ; получаем:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ a_{11} + b_{11} \geq 11 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ b_{11} + c_{11} \geq 18 \\ a_2 + c_2 \geq 23 \\ a_{11} + c_{11} \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 15 + 17 + 23 = 55 \\ 2a_{11} + 2b_{11} + 2c_{11} \geq 11 + 18 + 39 = 68 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 28 \\ a_{11} + b_{11} + c_{11} \geq 34 \quad (\text{но т.к. } a_{11} + c_{11} \geq 39, \text{ то } a_{11} + b_{11} + c_{11} \geq 39) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Сумма вхождений двойки в разл.  $abc \geq 28$ ,

а семёрки  $\geq 39$ . Заметим, что при  $abc =$

$$= 2^{28} \cdot 7^{39} \quad (\text{т.е. мин. возм. при таких условиях})$$

существует подходящая тройка  $a, b, c$ :

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}, \quad b = 2^5, \quad c = 2^{13} \cdot 7^{28} \quad \text{и}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}; 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc = 2^{18} \cdot 7^{28}; 2^{18} \cdot 7^{28} \quad \text{и}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}; 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

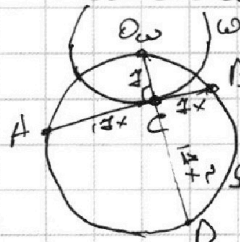
№ 3

Дано:  $\omega, \Omega$  - окр., центр  $\omega$  лежит на  $\Omega$ ,  $A, B \in \Omega$ ,

$$AB \cap \omega = C, \frac{AC}{CB} = \frac{17}{4}$$

Найти:  $AB$  - ?

Решение: Пусть  $O_\omega$  - центр  $\omega$ ,  $D$  - пересечение



продолжения  $O_\omega C$  за точку  $C$  и  $\Omega$ ,

тогда  $AC \cdot CB = O_\omega C \cdot CD$ . Положим

$$AC = 17x, \text{ а } CB = 4x, \text{ тогда: } 17 \cdot 4x^2 = 4 \cdot CD$$

$$\Rightarrow CD = 17x^2. \text{ Т.е. прямоугол. треугольники}$$

$\triangle O_\omega C B$  и  $\triangle A C D$  подобны (по двум катетам), то

их площади тоже подобны с коэфф.  $\frac{17^2}{4^2} \Rightarrow$

$$S_{ACD} = \frac{17^2}{4^2} S_{O_\omega C B} \Leftrightarrow 17^2 x^3 = 17^2 \cdot \frac{4^2}{2} x = 17^2 x \Rightarrow x = 1$$

$$(x > 0), \text{ с.е. } AB = 17x + 4x = 17 + 4 = 24$$

Ответ: ~~AB~~ 24



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 4

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$$

① ~~возможны~~ Пусть  $3x^2 - 6x + 2 = a$  и

$$3x^2 + 3x + 1 = b, \text{ тогда заметим, что } a - b =$$

$$= 1 - 9x \text{ и } \sqrt{a} - \sqrt{b} = 1 - 9x \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} - 9x \Leftrightarrow 9x = 2\sqrt{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ОДЗ: } x \in [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 1248$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{48}}{69} \begin{cases} \frac{6 + 2\sqrt{48}}{69} < \frac{6 + 2 \cdot 8}{69} < 1 \\ \frac{6 - 2\sqrt{48}}{69} < \frac{6 - 2 \cdot 8}{69} < 0 \end{cases}$$

② ОДЗ  
∉ ОДЗ

⇒ корней нет

Ответ:  $\emptyset$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Итого, т.к.  $ax+y-8b=0$  - кас., то:

$$\begin{cases} \frac{|a \cdot 0 + 0 - 8b|}{\sqrt{a^2+1}} = 1 \\ \frac{|a \cdot 0 + 12 - 8b|}{\sqrt{a^2+1}} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64b^2 = a^2 + 1 \\ 144 - 192b + 64b^2 = 4(a^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 64b^2 = a^2 + 1 \\ (2b+1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \pm\sqrt{15} \\ b = -\frac{3}{2} \\ a = \pm\sqrt{47} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Все подходящие значения пар-ра  $a$  это  $\pm\sqrt{15}$  и  $\pm\sqrt{47}$

Ответ:  $-\sqrt{47}, -\sqrt{15}, \sqrt{15}, \sqrt{47}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 6

Заметим, что нер-во  $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$

эквивалентно системе нер-в:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

- решаем и все системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{— два круга с центрами в } (0; 0) \text{ и } (0; 12) \\ \text{радиусы } 1 \text{ и } 4 \text{ соотв.} \end{array}$$

Пр-е  $ax + y - 8b = 0$  при разл. пар-ах  $a$  и  $b$

задает всевозможные прямые.

либо ~~ни~~ ноль,

либо  $\infty$  прямой и круга либо одна

(касание), либо бесконечно много

(прямая проходит через круг) точек пере-

сечения. Поэтому для того чтобы

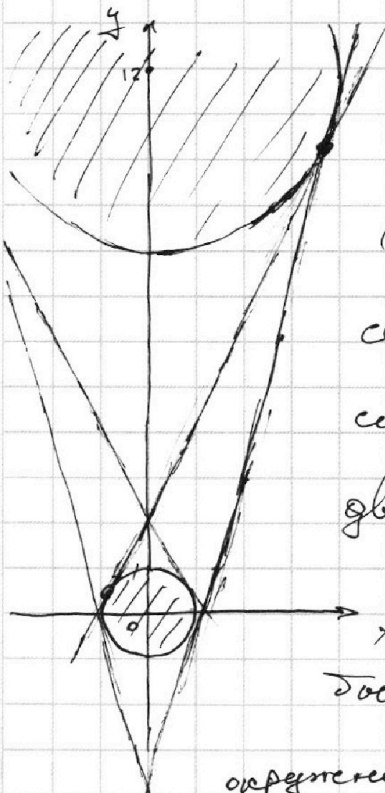
система из условия имела ровно

два решения, нужно необходимо и

достаточно, чтобы прямая  $ax + y - 8b = 0$

была общей касательной границных

окрестностей кругов.





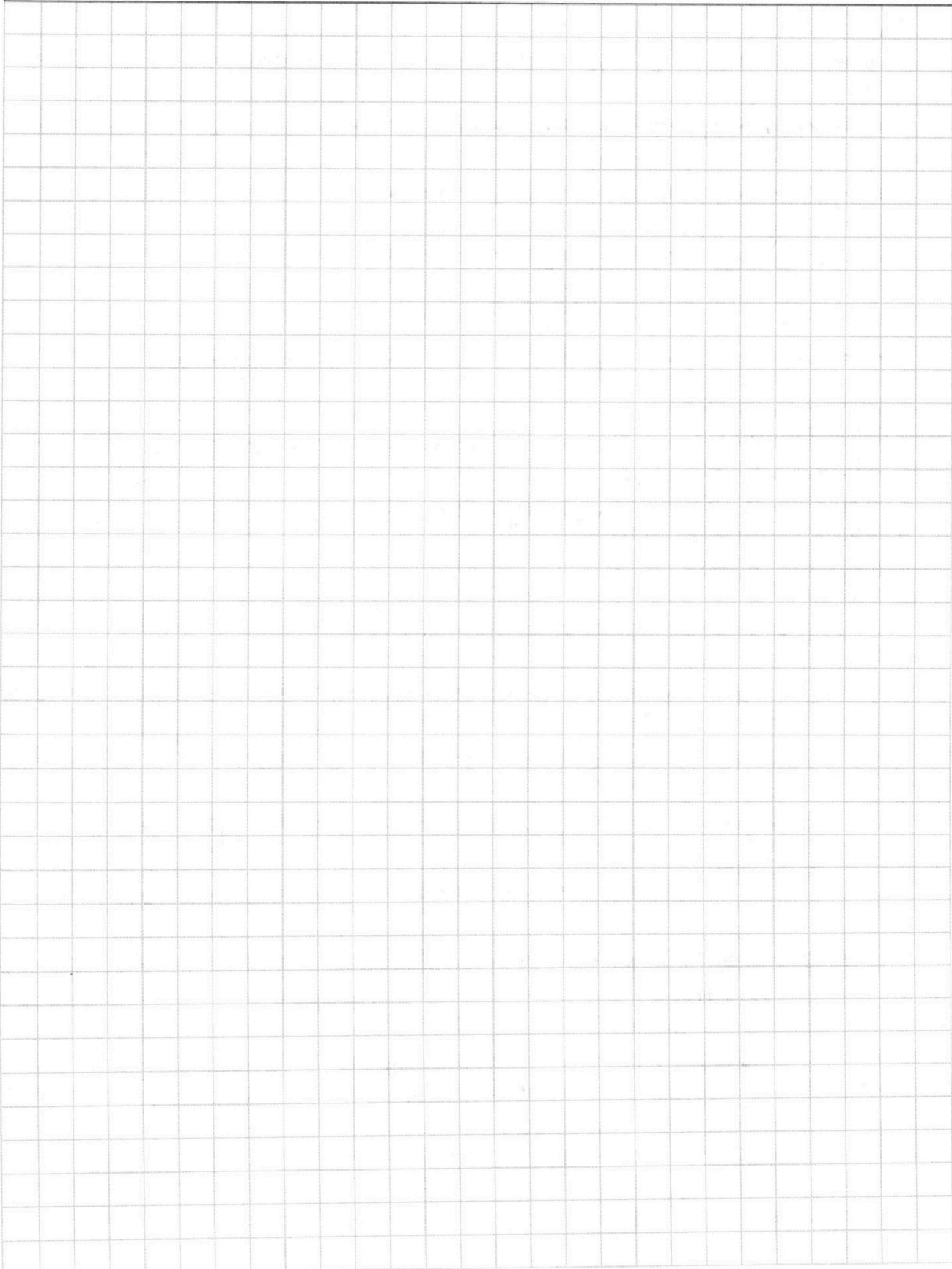
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$ab = n \cdot 2^{15} \cdot 4^1$~~      $ab = n \cdot 2^{15} \cdot 4^1$   
 ~~$bc = m \cdot 2^{17} \cdot 4^8$~~      $bc = m \cdot 2^{17} \cdot 4^8$   
 ~~$ac = k \cdot 2^{23} \cdot 4^{39}$~~      $ac = k \cdot 2^{23} \cdot 4^{39}$   
 ~~$abc = 2^{15+17+18} \cdot 4^{11+18+39} = 2^{50} \cdot 4^{68}$~~

~~$a = 2^8 \cdot 4^6$~~      $ab = n \cdot 2^{15} \cdot 4^1$      $na + mb = 1$   
 ~~$abc = \sqrt{nmk} \cdot 2^{25} \cdot 4^{34}$~~      $na + mb = 1$   
 ~~$c = \sqrt{\frac{mk}{n}} \cdot 2^{10} \cdot 4^{23}$~~   
 ~~$a = \sqrt{\frac{nk}{m}} \cdot 2^8 \cdot 4^{16}$~~      $b = \sqrt{\frac{nm}{k}} \cdot 2^2 \cdot 4^{10}$

~~$bc : ab \Rightarrow c : a$~~   
 ~~$ac : bc \Rightarrow a : b$~~   
 ~~$c : a : b$~~

~~$abc = r \cdot 2^{23} \cdot 4^{39} \Rightarrow r : b, \text{ и } kb = r$~~   
 ~~$abc = kb \cdot 2^{23} \cdot 4^{39}$~~      ~~$a = 2^{11} \cdot 4^{16}$~~

~~$ab = 2^5 \cdot 4^{16}$~~      $\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 = 16 \\ a_4 + b_4 = 16 \end{cases}$      $a = 2^{10} \cdot 4^{11}$   
 ~~$bc = 2^{17} \cdot 4^{18}$~~      $b = 2^5$   
 ~~$ac = 2^{23} \cdot 4^{39}$~~      $c = 2^{13} \cdot 4^{28}$

$\begin{cases} c_2 - a_2 = 1 \\ c_2 + a_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 12 \\ a_2 = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} c_4 - a_4 = 4 \\ c_4 + a_4 = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_4 = 23 \\ a_4 = 16 \end{cases}$

~~$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$~~   
 ~~$(a+b)^2 - \frac{4ab}{a+b} = \frac{a^2+b^2-2ab}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{a+b}$~~

~~$ab = kb$~~   
 ~~$a = k$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases}
 a_2 + b_2 \geq 15 \\
 a_2 + b_2 \geq 11 \\
 b_2 + c_2 \geq 14 \\
 b_2 + c_2 \geq 18 \\
 a_2 + c_2 \geq 23 \\
 a_2 + c_2 \geq 28
 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r}
 a_2 + 2b_2 + c_2 \geq 32 \\
 3 + 2 = 5 \\
 \hline
 2b_2 \geq 9 \\
 b_2 \geq 5 \Rightarrow a_2 \geq 10 \\
 \hline
 13 - 4 = 9 \\
 17 - 8 = 9 \\
 \hline
 6242 \\
 3122 \\
 1562 \\
 782 \\
 393 \\
 1313
 \end{array}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 34 \Rightarrow a_2 \geq 10$$

$2^{28} = abc$

$c = 2^{18} \Rightarrow b = 24 \Rightarrow a = 2^5$

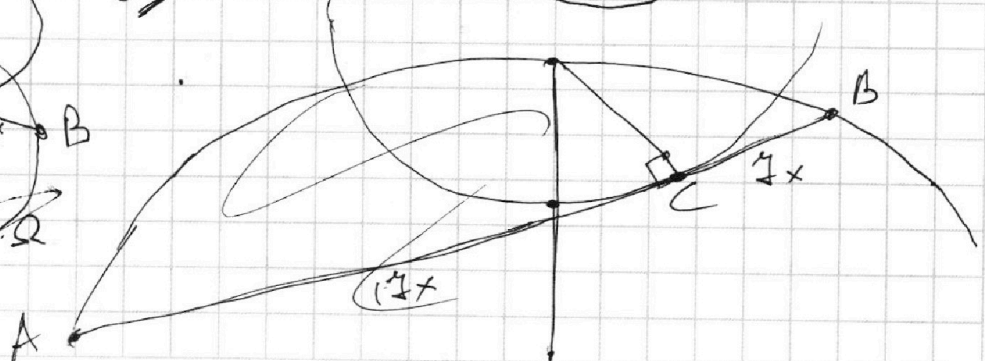
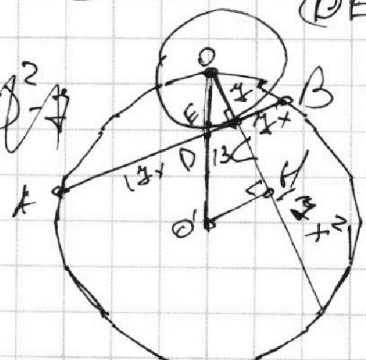
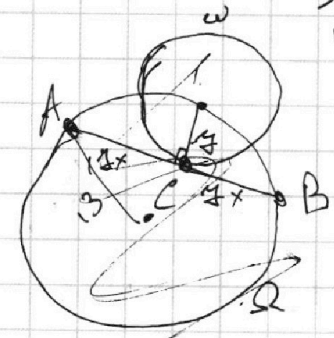
$gcd(a, b) = 1$   
 $gcd(a - 5ab + b^2, a + b) \Rightarrow x = 1$

$= gcd(5ab, a + b)$

$DE^2 + 2DE \cdot EQ = DE^2 + 2DE \cdot EQ + EQ^2 - EQ^2$   
 $\Rightarrow EQ = \dots$

$DC = DE \cdot (DE + 14) = (DE + 7)^2 - 49$

$OH = \sqrt{169 - \frac{17x^2}{2}}$



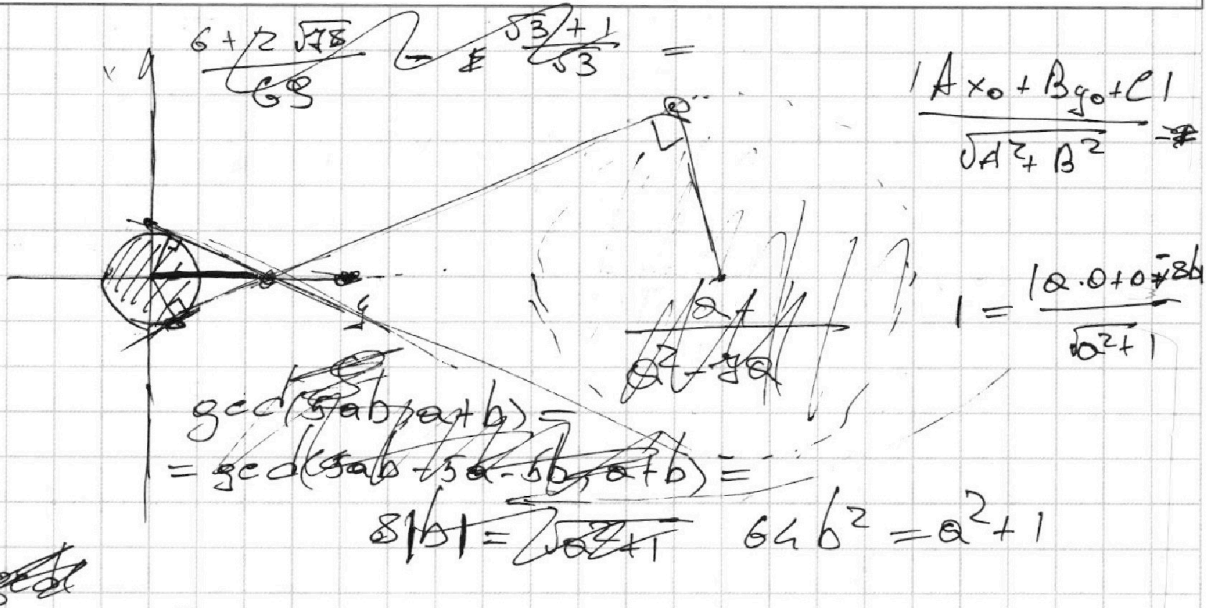
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (12 - 8b)^2 = 4a^2 + 4 \\ 64b^2 = a^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 144 - 192b + 64b^2 - 4a^2 = 4 \\ 64b^2 = a^2 + 1 \end{cases}$$

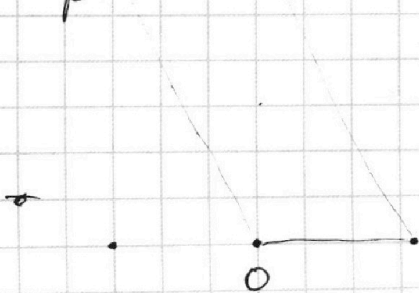
$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^2 - 144 + 192b - 3 \cdot 64b^2 + 192b - 144 = 0 \\ 64b^2 = a^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4b^2 + 3b - \frac{3}{4} = 0 \\ 64b^2 = a^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2b+1)^2 = 4 \\ 64b^2 \neq a^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a^2 = \pm \sqrt{15} \\ b = -\frac{3}{2} \\ a = \pm \sqrt{27} \end{cases}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14 - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 2$$

$$= \frac{14}{x_2 - x_1} - 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 3 - \sqrt{3}] \cup [3 + \sqrt{3}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; 3 - \sqrt{3}] \cup [3 + \sqrt{3}; +\infty)$$

$$6 \pm \sqrt{36 - 24}$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} - \sqrt{3(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = 1 - 9x$$

$$t = x - \frac{1}{4} \quad (3x^2 + (6x - 2))(3x^2 + (3x + 1))$$

$$\sqrt{3(t-\frac{3}{4})^2 - 10} - \sqrt{3(t+\frac{3}{4})^2 + \frac{3}{4}} = 8x^4 + 3x^2(3+3x) + (3x+1)(2-6x) =$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1 - 9x \quad \sqrt{a} = 1 - 9x + \sqrt{b}$$

$$a - b = 1 - 9x + 2\sqrt{b} - 9x + \sqrt{b} = 1 - 18x + 3\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \quad a = 1 - 2\sqrt{b} + b$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 1 \quad a = b = 1 - 2\sqrt{b}$$

$$x - 9x = x - 2\sqrt{b} \Rightarrow x \geq 0$$

$$4b = 8x$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 8x$$

$$12x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{69 \pm \sqrt{69^2 - 16 \cdot 12}}{24} = \frac{69 \pm \sqrt{4569}}{24}$$

$$4569 \mid 3$$

$$12x^2 + 24x + 8 = 0$$

$$144 + 1104 = 1248$$

$$2 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 23$$

$$2 \cdot 3 (32 \cdot 3 - 23)$$