



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- ✓ 3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

- ✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Найти: $\min(abc)$

Решение:

$$\text{м.к. } ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}, \quad \text{но}$$

$$\text{но ОТА: } abc : 2^A \cdot 7^B$$

$$\alpha \Rightarrow 2 \geq \max(17; 15; 23) = 23$$

$$\beta \Rightarrow \max(11; 18; 39) = 39$$

$$\alpha \quad abc \geq 2 \cdot 7, \quad \text{м.к. } abc \geq \text{НОК}(2^{15} \cdot 7^{11}; 2^{17} \cdot 7^{18}; 2^{23} \cdot 7^{39})$$

$$\Rightarrow \text{минимальное значение } abc = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{ОТВЕТ: } 2^{23} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a}{b} \sim 2, \quad a, b \in \mathbb{N}$$
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

Найти $\max(m)$, $\text{mod } m \begin{cases} (a+b) \\ (a^2-7ab+b^2) \end{cases} \equiv 0$

Решение:

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$\begin{cases} (a+b) \equiv 0 \pmod{m} & \textcircled{1} \\ ((a+b)^2-9ab) \equiv 0 \pmod{m} & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad a+b \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow (a+b)^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\textcircled{2} \quad (a+b)^2-9ab \equiv 0 \pmod{m} \quad \parallel$$
$$9ab \equiv (a+b)^2 \pmod{m} \quad \parallel$$
$$9ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0$$
$$a \equiv -b \Rightarrow 9ab \equiv -9b^2 \equiv 0; 9b^2 \equiv 0$$

аналогично: $9ab \equiv -9a^2 \equiv 0; 9a^2 \equiv 0$

a и b не имеют общих делителей

$$\Rightarrow \text{если } m > 9, \text{ то } \left(b^2, \frac{m}{9}\right) \geq 2$$

$$\left(a^2, \frac{m}{9}\right) \geq 2$$

$\Rightarrow a$ и b должны иметь общие делители

т.к. $9b^2 \equiv 0$ и $9a^2 \equiv 0$

$$\Rightarrow m \leq 9$$

\Rightarrow максимальное возможное $m = 9$

Пример:

$$a=4, b=5: \frac{4+5}{(4+5)^2-9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{81-180} = \frac{9}{-99}$$

можно сократить на 9.

Ответ: $m = 9$.

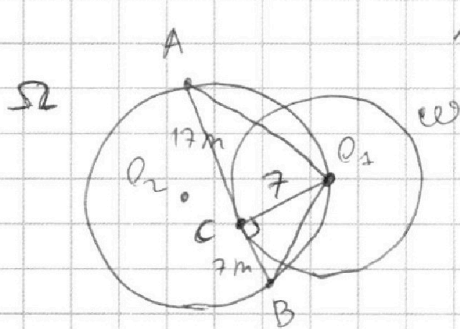
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3.

Доказано: окружности ω и Ω

$$R_{\omega} = 7; R_{\Omega} = 13,$$

$$AC : CB = 17 : 7,$$

AB касается ω в т. C

и Ω - хорда Ω

Найти: AB

Решение:

1) Пусть $AC = 17m$, тогда $CB = 7m \Rightarrow m > 0$
 $\Rightarrow AB = 24m$

2) $O_1C = 7$, т.к. O_1C - радиус ω

и $O_1C \perp AB$, т.к. радиус к касательной.

3) рассм. н/у ΔAO_1C :

по т. Пифагора:
 $AO_1^2 = AC^2 + O_1C^2$;

$$AO_1 = \sqrt{289m^2 + 49}; \sin \angle O_1AC = \frac{O_1C}{AO_1} = \frac{7}{\sqrt{289m^2 + 49}}$$

4) рассм. н/у ΔCO_1B :

по т. Пифагора:

$$O_1B^2 = O_1C^2 + CB^2$$

$$O_1B = \sqrt{49 + 49m^2} = 7\sqrt{m^2 + 1}$$

5) рассм. ΔAO_1B :

ок вписан в окр-ть Ω

\Rightarrow по т. синусов:

$$2 \cdot R_{\Omega} = \frac{O_1B}{\sin \angle O_1AB}$$

$$2 \cdot 13 = \frac{7 \cdot \sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{289m^2 + 49}}{\sqrt{(m^2 + 1)(289m^2 + 49)}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$26 = \sqrt{(m^2+1)(289m^2+49)}$$

Замечаем $t = m^2; t \geq 0$:

$$26 = \sqrt{(t+1)(289t+49)} \quad \uparrow^2$$

$$676 = 289t^2 + 49t + 289t + 49$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$D = 4 \cdot (28561 + 4 \cdot 627 \cdot 289 =$$

$$= 4 (28561 + 181203) = 4 \cdot 458^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-338 \pm 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} \quad (0 \rightarrow) \text{ не подходит}$$
$$t_2 = \frac{-338 + 2 \cdot 458}{2 \cdot 289} = \frac{916 - 338}{2 \cdot 289} = \frac{578}{578} = 1$$

Одн. замечаем:

$$m^2 = 1$$

т.к. $m > 0$, то $m = 1$

$$AB = 24m = 24 \cdot 1 = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

~~$$\frac{36 + 24 + 24\sqrt{78}}{69 + 69} = 6 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$~~

по ОЗЗ:

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \mid \cdot 69$$

$$6 + 2\sqrt{78} \vee 69 + 23\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{26} - 23) \vee 63$$

$< 0 \qquad > 0$

$$\text{м.к. } 2\sqrt{26} < 23 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot (2\sqrt{26} - 23) < 63$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} < \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \mid \cdot 69$$

$$6 + 2\sqrt{78} \vee 69 - 23\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{26} + 23) \vee 63 \quad \text{м.к. } 2\sqrt{26} + 23 > 0$$
$$3 \cdot (4\sqrt{26} + 529 + 4\sqrt{26}) \vee 3969 \quad | :3$$

$$633 + 4\sqrt{26} \vee 1323$$

$$4\sqrt{26} \vee 690 \quad | :2$$

$$2\sqrt{26} \vee 345$$

$$404 \vee 2\sqrt{26} < 2\sqrt{36} \Rightarrow 2 \cdot 6 \neq 12 < 345$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{26} < 345$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} < \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right] \vee \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

\Rightarrow является решением уравнения

Ответ: $\frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} X \geq 0 \\ 81x^2 = 12x^2 + 12x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X \geq 0 \\ 69x^2 - 12x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 144 + 1104 = 1248$$

$$x_{2,3} = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \begin{cases} \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \\ \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > 0$$

$$x_3 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69};$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0 \quad \vee 0 \quad | \cdot 69$$

$$6 - 2\sqrt{78} < 0 \quad | : 2$$

$$3\sqrt{78} > 6, \text{ т.к. обе части } > 0$$

$$9 > 78$$

$$9 < 78$$

$$\Rightarrow \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \text{ не угод. условию } x \geq 0$$

\Rightarrow не подходит.

Проверка:

$$x_1 = \frac{1}{9} : \sqrt{3 \cdot \frac{1}{27} - 6 \cdot \frac{1^3}{9} + 2} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{27} + 3 \cdot \frac{1^3}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{1 - 18 + 54}{27}} = \sqrt{\frac{1 + 9 + 27}{27}}$$

$$\sqrt{\frac{37}{27}} = \sqrt{\frac{37}{27}}$$

$0 = 0$ - верно

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{9} \text{ является решением ур-я.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МОФИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

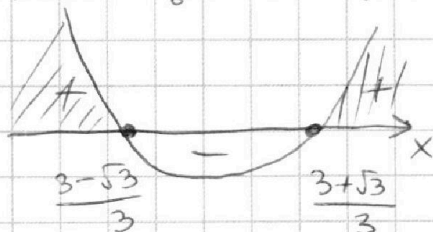
$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & (1) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

дискр:

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 36 - 24 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$



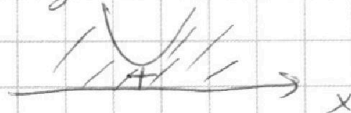
$$x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

$$(2) \quad 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

дискр:

$$D = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -3$$

\Rightarrow корней нет



\Rightarrow при всех x :

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$\text{Объединим (1) и (2): } x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \\ 3x^2 - 6x + 2 = 1 - 18x + 81x^2 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \end{cases}$$

$$-81x^2 + 9x = 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x(1 - 9x) - 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$(1 - 9x)(9x - 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0$$

$$1 - 9x = 0$$

$$9x = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{9}$$

$$\text{или } 9x - 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$9x = 2 \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 81x^2 = 4 \cdot (3x^2 + 3x + 1) \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

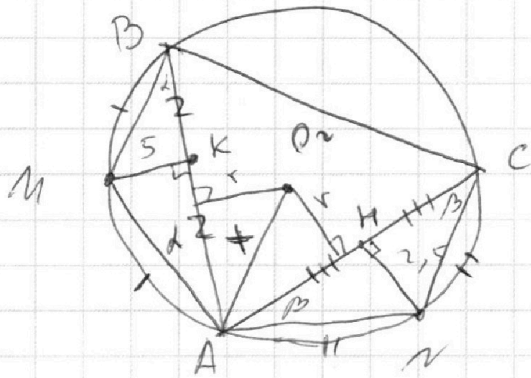
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 7.

Даны: $\triangle ABC$, $\rho(M; AC) = 2,5$; $\rho(M; AB) = 5$

Найти: AO_2 , где O_2 - центр
вписанной окружности.



Решение:

1) ~~Пусть~~ Пусть $AO_2 = x$.

2) Пусть $\angle MCA = \angle BCM = \alpha$, $\angle AMN = \angle MNC = \beta$

тогда $\angle MBA = \angle BAN = \alpha$, т.к. опущенные на
равные дуги и дуги те опущенные
 $\angle BCM$ и $\angle MCA$

аналогично: $\angle CAN = \angle ACN = \beta$

3) ~~Пусть~~ Пусть $\rho(M; AB) = MK$,

а $\rho(M; AC) = MN$

4) рассм. $\triangle CNK$:

$$\text{отн. } \angle \beta = \frac{MK}{KC}; \quad \frac{KN}{KC} = \frac{NC}{\sin \beta}$$

т.к. $\triangle ANC$ - $\triangle O$, т.к. $\angle AN = \angle CN \Rightarrow AN = CN$

$$\text{т.к. } K - \text{середина } AC \Rightarrow AC = 2 \cdot KC = \frac{2 \cdot MK}{\sin \beta} = \frac{5}{\sin \beta}$$

5) аналогично в $\triangle AMB$:

K - середина AB

$$\Rightarrow AB = 2 \cdot BK = 2 \cdot BK$$

рассм. $\triangle MBK$:

$$\angle \alpha = \frac{MK}{BK}; \quad BK = \frac{MK}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2 \cdot MK}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin \alpha}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) по т. Синусов:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

$$\frac{10}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin 2\beta} \quad | :5$$

$$\frac{2}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 2\beta}$$

$$2 \cdot \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha, \text{ так как } \alpha, \beta \in (0; \pi/2)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \beta$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$$

7) по т. Косинусов в $\triangle MKC$:

$$\sin \beta = \frac{KN}{CN}; \quad CN = \frac{KN}{\sin \beta}$$

8) по т. Косинусов в $\triangle MKA$:

$$\sin \alpha = \frac{MK}{AM}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{KN \cdot AM}{CN \cdot MK} = \frac{2,5 \cdot AM}{5 \cdot CN} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5 \cdot AM = 5\sqrt{2} \cdot CN$$

$$AM = \sqrt{2} \cdot CN$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$= 4(28561 + 101203) = 4 \cdot 129764 = 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19$$

$$\begin{array}{r} 114244 \overline{) 4} \\ \underline{4} \\ 34 \\ \underline{32} \\ 22 \\ \underline{20} \\ 74 \\ \underline{74} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 285 \\ \times 627 \\ \hline 2023 \\ + 578 \\ + 934 \\ \hline 107203 \\ + 28561 \\ \hline 129764 \end{array}$$

$$\sqrt{129764} = 352$$

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times 110 \\ \hline 000 \\ + 110 \\ + 110 \\ \hline 12100 \end{array}$$

$$500^2 = 250000$$

$$300^2 = 90000$$

$$350^2 = (300 + 50)^2 = 90000 + 2 \cdot 50 \cdot 300 + 2500 = 120000 + 1500 = 121500$$

$$= 90000 + 2 \cdot 50 \cdot 300 + 2500$$

$$+ 2500 = 120000 + 1500 =$$

$$= 121500$$

$$289 = 17^2$$

$$\begin{array}{r} 627 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 209 \\ \underline{209} \\ 0 \end{array} = 3 \cdot 209 = 3 \cdot 11 \cdot 19$$

$$\begin{array}{r} \times 19 \\ 11 \\ \hline 190 \\ + 190 \\ \hline 209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 352 \\ 352 \\ \hline 704 \\ + 1760 \\ + 1058 \\ \hline 123904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 360 \\ 360 \\ \hline 216 \\ + 108 \\ \hline 129600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 362 \\ 362 \\ \hline 724 \\ + 2172 \\ + 1086 \\ \hline 134044 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 13 \\ \underline{12} \\ 10 \end{array} = 13^2 = 169$$

$$m^2 = \frac{-338 + 2\sqrt{3 \cdot 11 \cdot 19}}{2 \cdot 17^2} = \frac{17\sqrt{3 \cdot 11 \cdot 19} - 13^2}{17^2}$$

$$m = \frac{\sqrt{17\sqrt{3 \cdot 11 \cdot 19} - 13^2}}{17}$$

$$\begin{array}{r} 28561 \\ \times 4 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 338 \\ 338 \\ \hline 2704 \\ + 1014 \\ + 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 149 \\ 149 \\ \hline 1391 \\ + 596 \\ + 149 \\ \hline 07 \end{array}$$

$$AN = 2C = 4$$

$$9 \cdot 20 = 180$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $ab : 2^{15} 7^{11}$, $bc : 2^{17} 7^{18}$, $ac : 2^{23} 7^{39}$
 $abc = 2^{\alpha} 7^{\beta} = 2^{23} 7^{39}$
 $\alpha = \max(15, 17, 23) = 23$
 $\beta = \max(11, 18, 39) = 39$

$\min(abc)$

НОД, м.к.

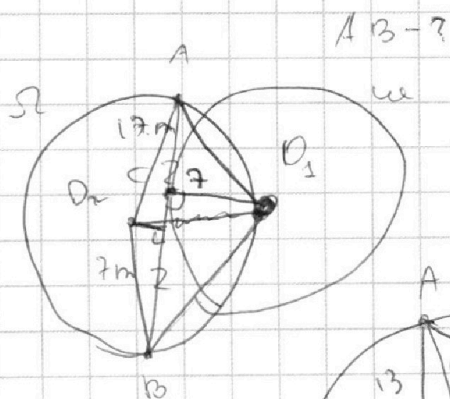
2) $\frac{a}{b}$ — несократима
 $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$
 $\log(a; b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$
 $(a-b)^2 + 5ab$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{(a+b)(a-b)}{ab}$
 $(a+b)^2 - 9ab$
 $\frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{a+b}{ab}$

$\frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$

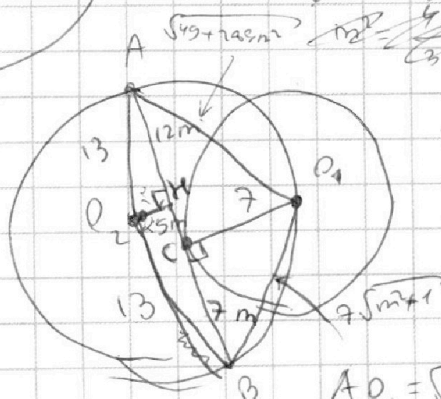
$\frac{ab}{a+b}$



$R_{\omega} = 7; R_{\Omega} = 13$

3)
$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 17 \\ \hline 2304 \\ + 1074 \\ \hline 5746 \\ + 1014 \\ \hline 174244 \end{array}$$

$626 - 49 = 677 \rightarrow 627$



$626 = 289m^2 + 49m^2 + 49$
 $626 - 49 = 289m^2 + 49m^2$
 $577 = 338m^2$
 $m = \frac{2}{\sqrt{338}}$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$\cos \angle O_1 O_2 B = \frac{577}{338}$

$A O_1 = \sqrt{49 + 289m^2}$
 $\Rightarrow \sin \angle O_1 A C = \frac{7}{\sqrt{49 + 289m^2}}$

$O_1 B = \sqrt{49m^2 + 49} = 7\sqrt{m^2 + 1}$

$26 = 2 \cdot 13 = \frac{7\sqrt{m^2+1} \cdot \sqrt{49+289m^2}}{7} = \sqrt{m^2+1} \cdot \sqrt{49+289m^2}$

$676 = (t+1)(49+289t) = 49t + 289t + 49 + 289t^2$

$289t^2 + 338t - 627 = 0$; $D = 114244 + 4 \cdot 289 \cdot 627 =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{4}{3}, \quad m = 1$$

$$a = 2, \quad b = 3, \quad m = 4$$

$$\frac{4}{5} = \frac{9}{81-9 \cdot 4 \cdot 5}, \quad m = 9$$

$$(a+b)^2 - 9ab = 0$$

$$a+b = 0$$

$$\Rightarrow -9ab = 0 \Rightarrow a+b$$

$$9ab = km$$

если $a: k, 70$
и $b: k \Rightarrow k=1$

$$-9b^2 = 0 \Rightarrow 9b^2 = m$$

$$9a^2 = 0 \Rightarrow 9a^2 = m$$

$$\Rightarrow a^2: \frac{m}{9}, b^2: \frac{m}{9}$$

$$9b^2 = km \Rightarrow 3b = \sqrt{mk}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + ab) = 2a(a+b) = 0$$

$$9ab = mp$$

$$9a^2 = pm$$

$$9b^2 = pm$$

$$9(a^2 + b^2) = 0 = km, \text{ если } mk > 0$$

$$9(a^2 + b^2) =$$

$$9ab = 9 = 0$$

$$\Rightarrow m = 9$$

$$\Rightarrow \max(m) = 9$$

$$m \cdot k(a; b) = 1, 70$$

$$a^2 = \frac{ml}{9}; b^2 = \frac{mg}{9}$$

если $(a^2; m) > 2$
 $(9; 9) = 1$
 $9 \cdot 9 = 81$
 $m: 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



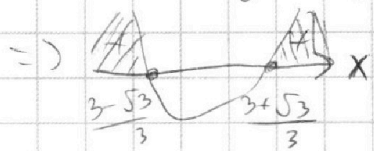
$$4) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$D_1 = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$D_2 = 9 - 4 \cdot 3(x^2 + x)$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$1 - 9x \geq 0 \Rightarrow 1 - 9x + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq 0$$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (1 - 9x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 1 - 18x + 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x) \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-81x^2 + 9x = 2 \cdot (1 - 9x) \cdot \sqrt{\dots}$$

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$9x(9x - 9) - 2 \cdot (9 - 9x) \cdot \sqrt{\dots} = 0$$

$$(1 - 9x) (9x - 2 \cdot \sqrt{\dots}) = 0$$

$$9x = 2 \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (x \geq 0)$$

$x = \frac{1}{9}$

$$81x^2 = 42x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 69 = 1248$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ 16 \\ \hline 494 \\ 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{6 \cdot 13}}{69 \cdot 2}$$

$$\begin{array}{r} 1248 | 4 \\ -12 \\ \hline 0 \\ 23 \\ \hline 44 \\ 52 \\ -37 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{array}{r} 345 \\ 1345 \\ \hline 935 \\ + 1725 \\ \hline 1380 \\ + 1035 \\ \hline 2415 \end{array}$$

$$12 - 4\sqrt{6 \cdot 13} \sqrt{0}$$

$$9\sqrt{6 \cdot 13}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69 \cdot 23} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}$$

$$78 | 2 \quad 78 : 2 = 39 = 13 \cdot 3$$

$$9 \pm 3\sqrt{3} \sqrt{1} \quad 2\sqrt{78} \sqrt{63} + 23\sqrt{3} \sqrt{1}$$

$$1248 = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 3 = 2 \sqrt{28} \sqrt{231} = 4 \cdot 26 \sqrt{23 \cdot 23} = 529$$

$$9 - 3\sqrt{3} \sqrt{1}$$

$$x = \frac{1}{9} : 3 \cdot \frac{1}{9} - 8 \cdot \frac{1}{9} + 2 = 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 4$$

$$8 \sqrt{3 \sqrt{3} 1^2}$$

$$2 \frac{28}{9} = 80 \frac{28}{9} = 104$$

$$64 \sqrt{9 \cdot 3} = 22$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{78} \\ \times 4 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$-81x^2 + 9x = 9x(1 - 9x)$$

$$\begin{array}{r} 109 \\ 73 \\ \hline 182 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 63 \\ \hline 189 \\ + 378 \\ \hline 3969 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 70 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 70 \\ \hline 10080 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$1120 - 16 = 1104$$

$$10080 - 144 = 9936$$

$$\begin{array}{r} 1248 | 16 \\ -112 \\ \hline 128 \\ -6 \\ \hline 122 \\ -128 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$78 = 26 \cdot 3 = 60 + 18 = 78$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ -6 \\ \hline 122 \\ -128 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$1248 = 4^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$1 - 18 = -17 + 54 = 37$$

$$54 - 17 = 44 - 7 = 37$$



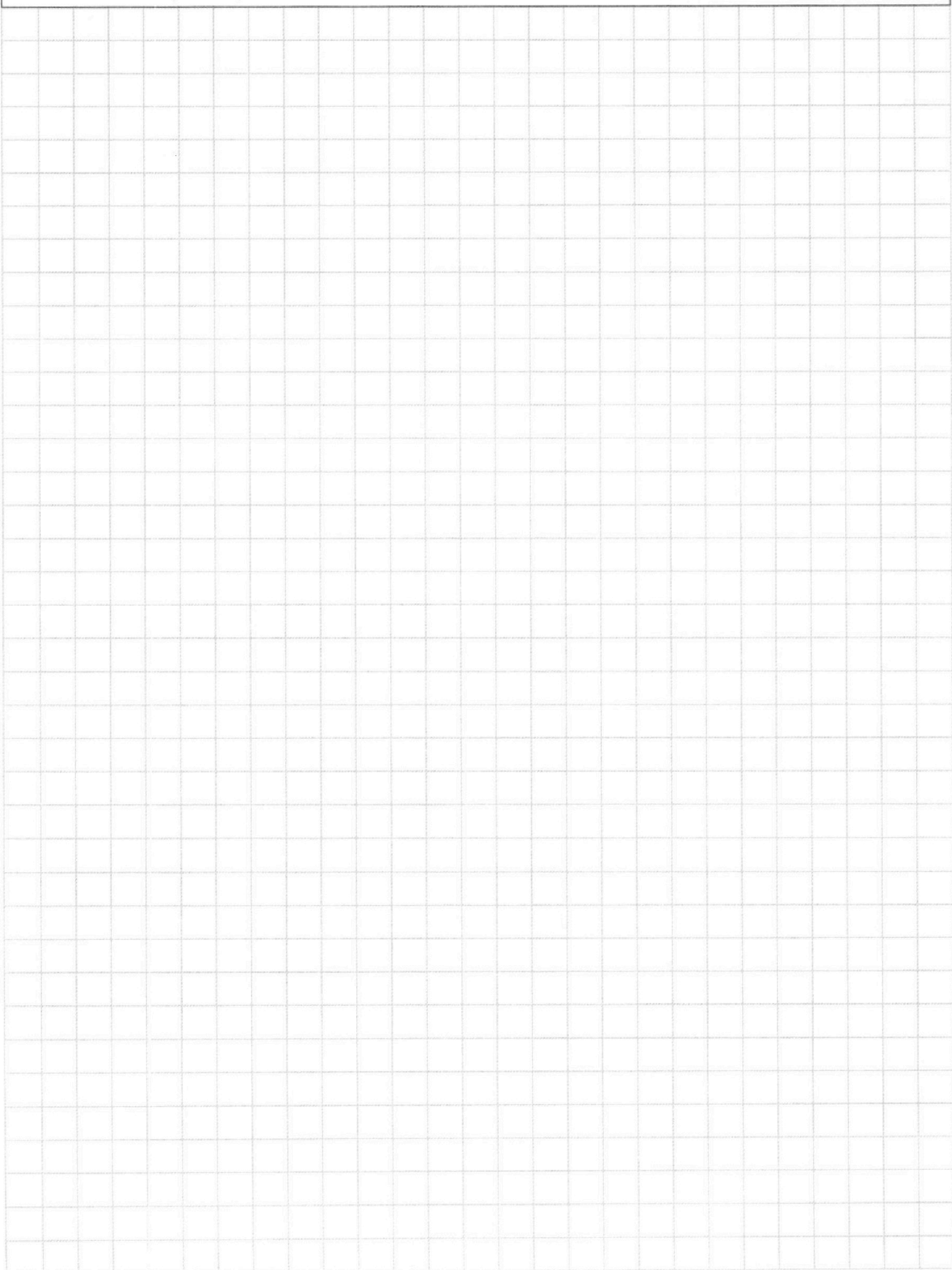
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



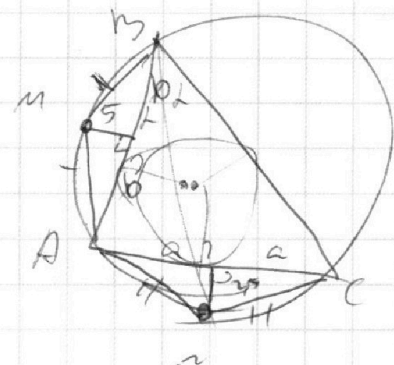
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



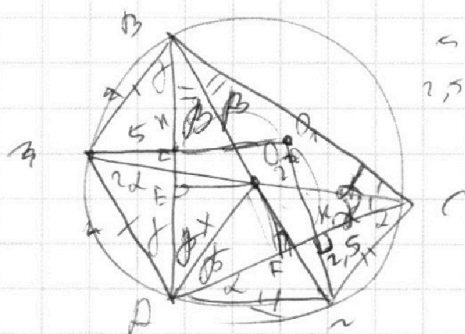
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



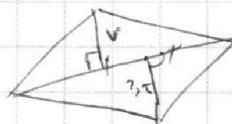
$AO_2 = 2$, O_2 - центр вписанной окр. или Γ_2

$\angle ABE = 2\alpha$

$\angle AN_2 \text{ и } \angle NC = 2\alpha$



$\angle KO_1 = \alpha, K \in \Gamma_1, \alpha$
 $\angle KO_1 = 2\alpha, K \in \Gamma_1, H$



$AC = 2 \cdot 2,5 \cdot \cos \alpha = 5 \cdot \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{KC}{HN}; KC = \cos \alpha \cdot HN$

$AB = 10 \cdot \cos \alpha$

$\frac{10 \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha} = \frac{5 \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

$\frac{FC}{BF} = \cos \alpha = \frac{AC}{5} = \frac{FC}{O_2F} = \frac{FC}{r}$

$FC = \frac{AC \cdot r}{5} \quad 10 \cdot \sin^2 \alpha = 5 \sin^2 \alpha$

$BE = \frac{AB \cdot r}{10}$

$AF = AC - \frac{AC \cdot r}{5} = AE = AB - \frac{AB \cdot r}{10}$

$AC \left(1 - \frac{r}{5}\right) = AB \left(1 - \frac{r}{10}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

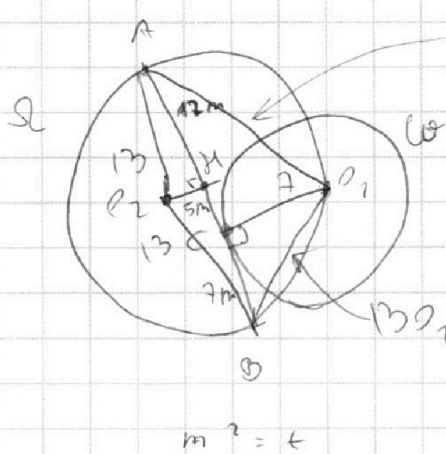
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO_1 = \sqrt{209m^2 + 49}$$

$$\sin \angle O_1 A B = \frac{7}{\sqrt{209m^2 + 49}}$$

$$24m - 2$$

$$BO_1 = 7\sqrt{m^2 + 1}$$

$$26 = \frac{7\sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{209m^2 + 49}}{7}$$

$$m^2 = t$$

$$676 = 209t^2 + 209t + 49t + 49$$

$$209t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$D = 4 \cdot 169^2 + 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 17 = 4(13^4 + 3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 17)$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 3} \\ \underline{2} \\ 13 \\ \underline{12} \\ 16 \\ \underline{15} \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 13 \\ \underline{12} \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 627 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 209 \overline{) 19} \\ \underline{19} \\ 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ + 1094 \\ + 169 \\ \hline 28561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 150 \\ \times 150 \\ \hline 22500 - 200 = 22204 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 627 \\ \times 289 \\ \hline 5843 \\ + 5096 \\ + 1254 \\ \hline 181203 \\ \times 45 \\ \times 45 \\ \hline 725 \\ + 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 289 \\ \times 627 \\ \hline 2023 \\ + 578 \\ \hline 1734 \\ + 181203 \\ \hline 28561 \\ + 209764 \\ \hline 289 \\ \times 2 \\ \hline 578 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 450^2 = 202500 \\ \times 452 \\ \times 452 \\ \hline (450+2)^2 = 202500 + 4 + 1800 = \\ \times 458 \\ (450+2) \times 2 = 202500 + 64 + 7200 = \\ \times 916 \\ \times 338 \\ \hline 578 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 452 \\ \times 2 \\ \hline 916 \end{array}$$