



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $ac = k_3 \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{24} \cdot 5^{13} \cdot k_2$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{35} \cdot k_1, \text{ где } k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$ab \cdot bc = ab^2c = k_1 k_2$$

$$ab \cdot bc = k_1 k_2 \cdot 2^{20} \cdot 3^{34} \cdot 5^{24} = ac \cdot b^2.$$

$$ac \cdot b^2 \geq ac \neq 1$$

$$ac : 5^{28} \rightarrow ab^2c : 5^{28}$$

$$\text{Тогда } k_1 k_2 = k_4 \cdot 5^4, k_4 \in \mathbb{N}.$$

$$abc = \sqrt{a^2 b^2 c^2} = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = \sqrt{k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{36} \cdot 3^{53} \cdot 5^{52}} =$$

$$= 2^{18} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{3^{53} \cdot k_1 k_2 k_3} = \begin{cases} k_1 k_2 = k_4 \cdot 5^4 \end{cases}$$

$$= 2^{18} \cdot 5^{26} \cdot 3^{26} \cdot \sqrt{3^{53} k_3 k_4} = \begin{cases} \text{Заметим, что если } a_1 \in \mathbb{N}, \\ a_1^2 = 3^{53}, \text{ то } a_1 = 3^{26}, \text{ т.к.} \end{cases}$$

$$= 2^{18} \cdot 5^{28} \cdot 3^{30} \cdot \sqrt{k_5}$$

$\sqrt{k_5} \geq 1$ . Пример при

$k_5 = 1$  существует, это:

$$abc = 2^{18} \cdot 5^{28} \cdot 3^{30}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$$

Все условия  
выполнены.

Ответ:  $2^{18} \cdot 5^{28} \cdot 3^{30}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{CAO}}{S_{CEF}} = \frac{AO^2}{CE^2}, \text{ т.к. } \triangle CAO \sim \triangle FCE -$$

но  $\angle CEF = \angle COA$  и  $\angle CAO = \angle FCE = 90^\circ - \angle CBO$ .

$$CO = \sqrt{AO \cdot OB} \quad (\text{т.к. } \triangle AOC \sim \triangle COB)$$

(но также  $\angle COA = \angle COB = \angle CAB = \angle CBA$ )

$$\left( \frac{CO}{AO} = \frac{OB}{CO} \right)$$

$$\text{Тогда } CO = \sqrt{\frac{2}{7} AB \cdot \frac{5}{7} AB} = \frac{\sqrt{10}}{7} AB$$

$$CE = \frac{1}{2} CO = \frac{\sqrt{10}}{14} AB$$

$$\frac{AO^2}{CE^2} = \frac{\left(\frac{2}{7} AB\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{10}}{14} AB\right)^2} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{8}{5}$$

Ответ:  $\frac{8}{5}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$FE \cap AC = Q$$

Заметим, что

в силу  $EF \parallel AB$

$$\angle DEF = 180^\circ - \angle EDB = 90^\circ$$

тогда заметим, что

$$\angle QCA = 180^\circ - \angle CEF. \quad (1)$$

Опишем около  $\triangle CEF$  окружность.

Заметим, что в силу (1)  $QC$  ~~касается~~ <sup>касается</sup>  $l_c$  касается (в-во угла между касат. и сек) зная, что  $QC$  касается и опис. окр.  $\triangle AEF$ .

Заметим, что для этих двух окружностей  $EF$  является радикальной осью. тогда

$$Pow(Q, (AEF)) = Pow(Q, (CEF)), \text{ т.к. } Q \in FE.$$

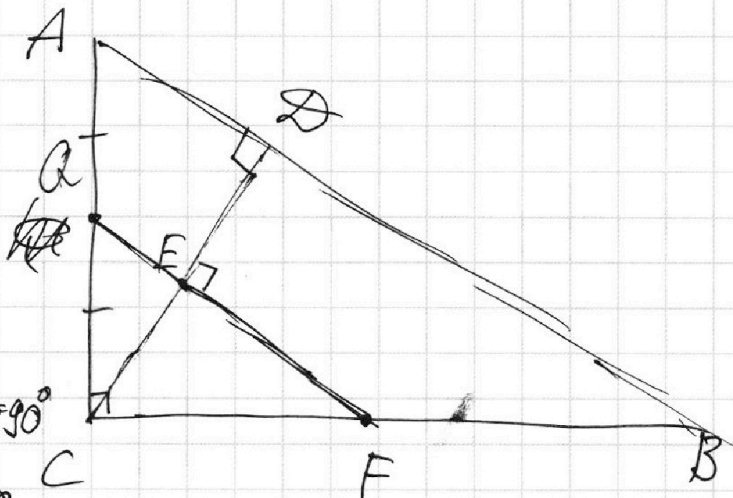
$$\text{в силу касания } AQ^2 = QC^2, \quad AQ = QC.$$

тогда в силу  $QF \parallel AB$   $QF$  - средняя линия

$$\triangle ABC, \quad CE = \frac{1}{2} CD.$$

$$AB / BD = 5,4 = \frac{7}{5}$$

$$\cancel{7AB = 5BD} \rightarrow AD = \frac{2}{7} AB, \quad BD = \frac{5}{7} AB.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

УЗ.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10 \arccos(\sin x \cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2} - x) \in [0; \pi] \\ 10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2} - x) \bmod_{2\pi} \in [\pi; 2\pi] \\ 10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2} - x) \bmod_{2\pi} \in [0; \pi] \\ 5\pi - 9\pi = 8x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2} - x) \bmod_{2\pi} \in [0; \pi] \quad [\pi; 2\pi] \\ 12x = 54\pi \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2} - x) \bmod_{2\pi} \in [0; \pi] \\ x = -\frac{1}{2}\pi \quad \pi \in [0; \pi] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2} - x) \bmod_{2\pi} \in [\pi; 2\pi] \\ x = \frac{7}{6}\pi \quad (\frac{\pi}{2} - \frac{7}{6}\pi) \bmod_{2\pi} \in [\pi; 2\pi] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ответ:  $\frac{7}{6}\pi; -\frac{1}{2}\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

В силу симметрии рисунка  
Пусть  $O_1(0,0)$ ,  $O_2(-9,0)$ ,

ур-я окружностей

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 81 = 9^2$$

Решим для  $B$ :

$$\Gamma \cap B = T$$

$$B \cap \omega = P \quad B \cap (y=0) = S$$

$$B \cap (y=0) \quad B \cap (x=0) = Q$$

В силу гомотетичности окружностей  $\Gamma$

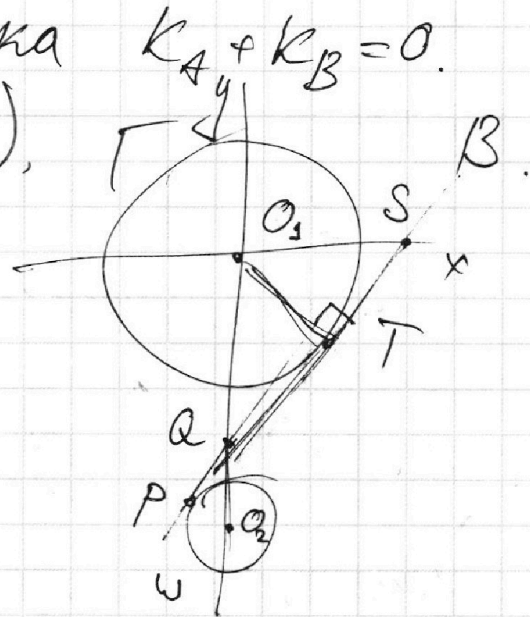
$\Gamma \rightarrow \omega$  с центром в  $Q$  и коэф-том  $\frac{2}{5}$

$$\frac{O_1Q}{O_2Q} = \frac{5}{2}, \quad O_1T = 5 \quad \angle O_1TQ = 90^\circ, \quad O_1Q = \frac{5}{7} \cdot 9 =$$

$$= \frac{45}{7} \quad QT = \sqrt{QO_1^2 - O_1T^2} = \sqrt{\left(\frac{45}{7}\right)^2 - 5^2} = 5\sqrt{\left(\frac{9}{7}\right)^2 - 1} =$$

$$= \frac{5}{7} \sqrt{9^2 - 7^2} = \frac{5}{7} \cdot \sqrt{2 \cdot 16} = \frac{20}{7} \sqrt{2}$$

$$\frac{O_1T}{QT} = \frac{O_1S}{O_1Q} = \frac{5}{\frac{20}{7} \sqrt{2}} = \frac{7}{4\sqrt{2}} \quad k_B = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЩН.

Геом. смысл конструкции:

$$5x + 6ay - b = 0 - \text{прямая (1)}$$

4 пары решений тогда, когда она пересекает  
конструкцию  $up - a$  в 2 точках. т.е.  
пересекает обе окр-сти в 2 точках.

(уравнение 2 представлено на коорд.  
плоскости в виде 2 окр-стей:

$$\Gamma((0; 0), 5) \text{ и } \omega((0; -9), 2). \text{ т.е.}$$

окр-сти не пересекаются.

Теперь заметим, что число  
решений зависит в т.ч.

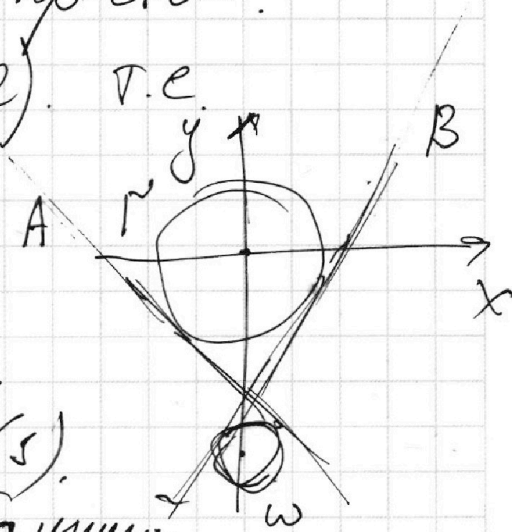
и от наклона прямой (1).

если она имеет наклон, больший

прямой B или меньший прямой A,

то мы можем выбрать  $b$  так, чтобы

пересечь обе окружности.



т.е.  $6a \left\{ \begin{array}{l} -\frac{5}{6a} < k_A < 0 \\ -\frac{5}{6a} > k_B > 0 \end{array} \right.$  найдем  $k_A$  и  $k_B$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$k_B = \frac{4\sqrt{2}}{7} < -\frac{5}{6a}$$

$$a < \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 4\sqrt{2}}$$

соотв. при  $k_A$   ~~$\frac{4\sqrt{2}}{7} > -\frac{5}{6a}$~~   ~~$\frac{4\sqrt{2}}{7} > -\frac{5}{6a}$~~

$$\frac{4\sqrt{2}}{7} < -\frac{5}{6a} \rightarrow a < 0$$

$$\frac{4\sqrt{2}a}{7} > -\frac{5}{6}$$

$$a > \frac{-5 \cdot 7}{6 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{-35}{24\sqrt{2}}$$

соотв. при  $k_A$   ~~$\frac{-4\sqrt{2}}{7} > -\frac{5}{6a}$~~   $a > 0$

$$\frac{4\sqrt{2}a}{7} < \frac{5}{6}$$

$$a < \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$a \in \left( -\frac{35}{24\sqrt{2}} ; \frac{35}{24\sqrt{2}} \right)$$

Ответ:  $\nearrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{55}^4 X - 6 \log_x 55 = \log_x 3 \frac{1}{125} - 5^0 \quad \begin{matrix} X > 0 \\ X \neq 5 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{\log_x^4 55} - 6 \log_x 55 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \log_x 55 - 5^0$$

$$\log 5 - 6 \log_x^5 55 = -\frac{2}{3} \log_x^5 55 - 5 \log_x^4 55$$

$$\frac{16}{3} \log_x^5 55 - 5 \log_x^4 55 - 5 = 0$$

$$\log_x^4 55 = t$$

$$16t^5 - 5 \cdot 3t^4 - 5 = 0$$

Очев. корень  $t = 1$ , делим на  $(t-1)$

проделаем аналогичные преобразования со втор.

$$0,5y = p$$

ур-ция:

$$\frac{1}{\log_p^4 55} + \log_p 55 = \frac{3}{-13} \log_p 55 - 5^0$$

$$\log_p 55 = q$$

$$1 + \log_p^5 55 = \frac{-3}{13} \log_p^5 55 - 5 \log_p^4 55$$

$$16q^5 - 15q^4 - 5 = 0$$

Получаем то же самое ур-е.

Очев. корень  $q = 1$ , делим на  $(q-1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Реш-е не зависит от положения  $P, Q$ .

$$POW(S, \Omega) = POW(M, \Omega) \quad (1)$$

$$POW(S, \Omega) =$$

$$= PS \cdot PQ = |(\vec{PQ} + \vec{SP})|$$

$$|\vec{SP}| = |\vec{PQ} + \vec{QM}| \cdot |\vec{QM}|,$$

но  $QM = SP$ , тогда

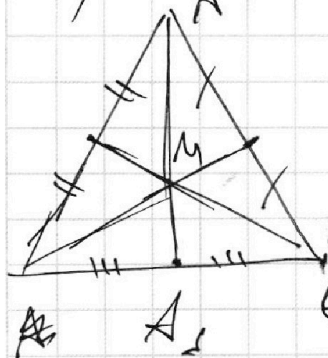
Доказано, также  $AK^2 = AL^2 = POW(A, \Omega)$ .

$$AK = AL, \quad SL^2 = KM^2 \quad (\text{из (1)}).$$

$$SL = KM, \quad AK = KL, \quad AS = AM.$$

$$AM = \frac{2}{3} AA_s, \quad AA_s = 30$$

а) Имеем  $\triangle ABC$ :



$$AA_s = 30$$

$$BC = 20$$

$$S_{ABC} = 180$$

$$P(A, BC) = 9 \cdot 2 = 18$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*Черновик*

$$(abc)^2 = k \cdot 2^6 \cdot 2^{14} \cdot 2^{16} \cdot 3^{13} \cdot 3^{25} \cdot 3^{25} \cdot 5^{24} \cdot 5^{28} =$$

$$= k \cdot 2^{36} \cdot 3^{34+25=59} \cdot 5^{52}$$

$$2^{18} \cdot 3^{49} \cdot 5^{26 \rightarrow 28?}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$$

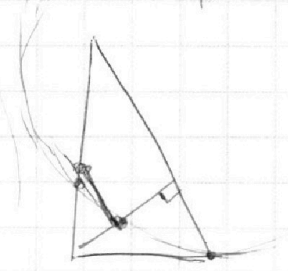
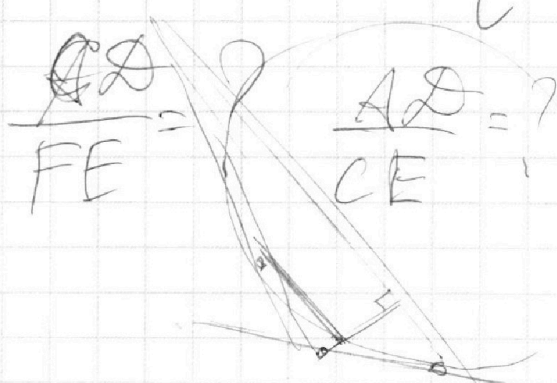
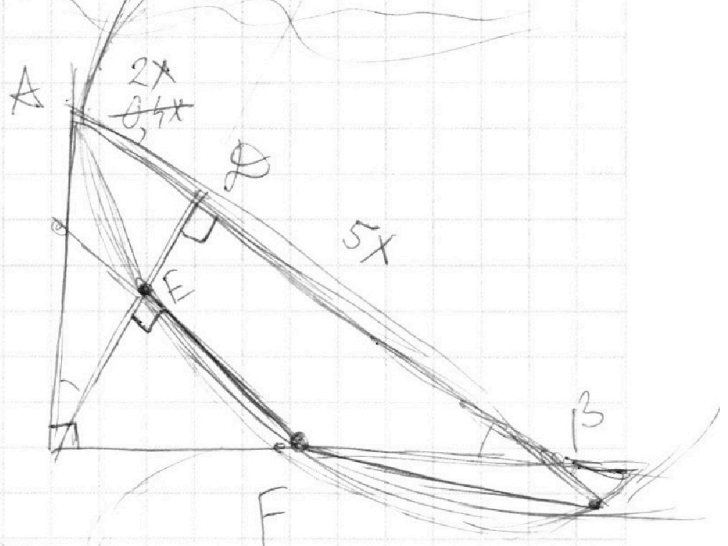
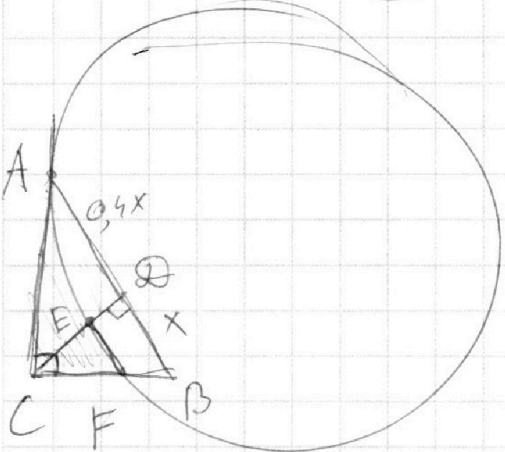
$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$$

$$2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{15} = bc$$

$$2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} = ab$$

$$2^{10} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} = ac$$



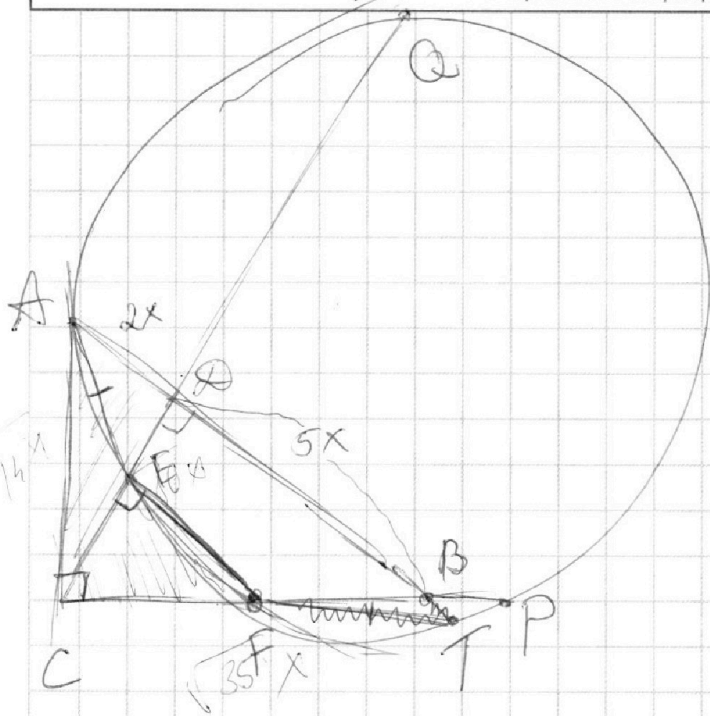
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CA = \sqrt{10} X$$

$$AC = \sqrt{14} X$$

$$CP = \sqrt{35} X$$

$$AC^2 = 14X^2 = EC \cdot QC =$$

$$= CF \cdot CP$$

$$= \frac{EC}{FC} = \frac{CP}{QC}$$

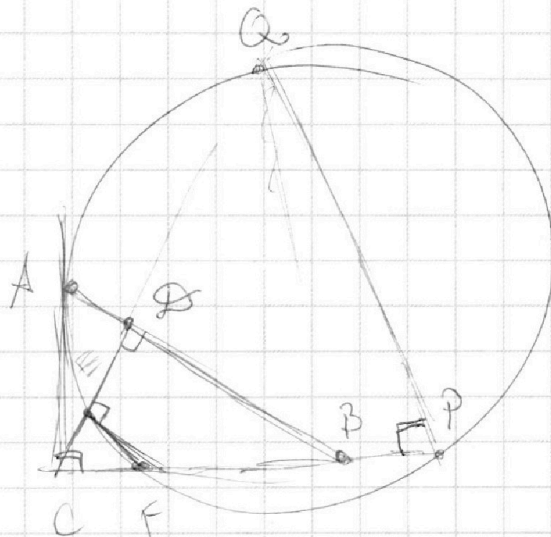
$$AC^2 = QC \cdot EC =$$

$$= CF \cdot PC,$$

~~$$\frac{AC}{EC} = \frac{CF}{PC}$$~~

$$\frac{CF}{EC} = \frac{CF}{FB}$$

~~$$AB \cdot BA = FB \cdot PB$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$0,5y = a$$

$$\log_{11}^4 a + \frac{1}{\log_{11} a} = \frac{3}{13}$$

$$p = \frac{-13}{3 \log_{11} a} - 5$$

$$\log_{11}^4 a + \frac{1}{\log_{11} a} =$$

$$11^p = a = 0,5y$$

$$p^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5p$$

$$y = \frac{11^p}{2}$$

$$3p^5 + 3 = -13 - 15p$$

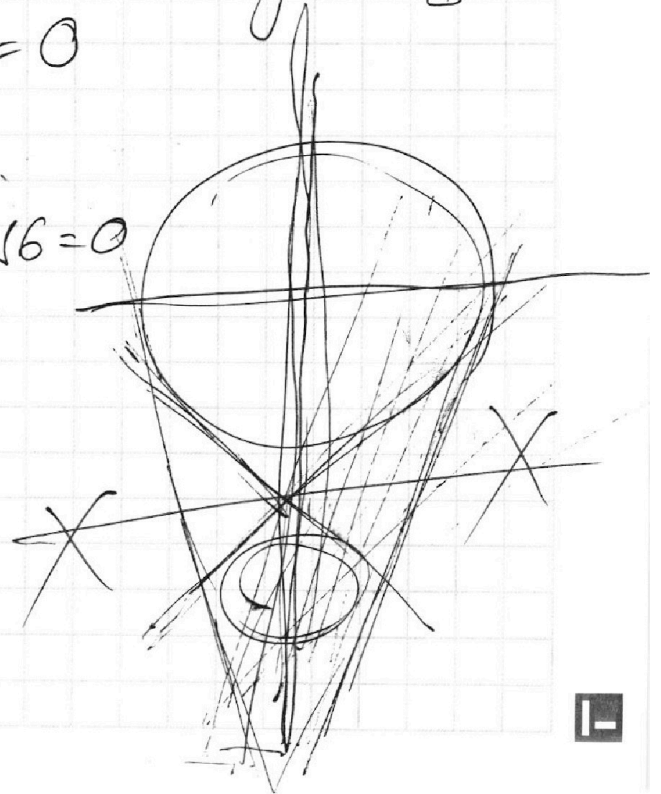
$$xy = \frac{11^{p+t}}{2}$$

$$3p^5 + 15p + 16 = 0$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{7}{6}\pi = -2 \frac{2}{3}\pi$$
$$-3 \cdot 32 - 15 \cdot 2 + 16 = 0$$

$$x^2 + (y+y)^2 = 4 = 2^2$$

$$y = \frac{-5}{6a} x + \frac{6}{6a}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \quad a^{\log_a b} = b$$

$b > 0$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \quad x \neq 1$$

$$\log_{11}^4 x - 6 / \log_{11} x = \frac{\log_x \frac{1}{121}}{3} - 5$$
$$= \frac{-\log_x 121}{3} - 5$$

$$= \frac{-2 \log_x 11}{3} - 5 \quad \begin{matrix} x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

$$\log_{11}^4 x - 6 = \frac{-2 \log_x^2 11 - 5 \log_x 11}{3} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$t^5 - 6 = \frac{-2t^2 - 5t}{3}$$

$$\log_{11}^4 x - 6 / \log_{11} x = \frac{-2}{3 \log_{11} x} - 5$$

$$t^5 - 6 = \frac{-2}{3} - 5t$$

$$3t^5 - 18 = -2 - 15t$$

$$3t^5 + 15t + 16 = 0$$

$$11^t = x$$

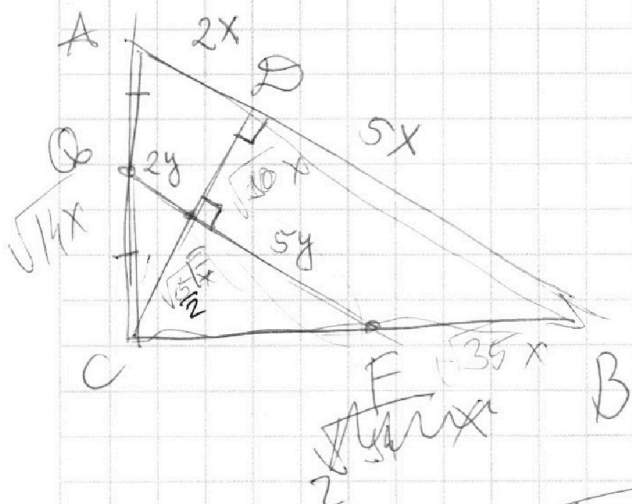
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{20}{3}\pi = 9\pi - \frac{7}{3}\pi$$

$$AQ = QE \cdot FE \quad QE \cdot QF = 2y \cdot 7y$$

$$10a r \cos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10a r \cos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{7}{6}\pi = -\frac{2}{3}\pi \quad \frac{\pi}{2} - x \in [0; \pi]$$

$$\frac{\pi}{2} - x \in [\pi; 2\pi]$$

$$10 \cdot \frac{\pi}{2} - 10x = 9\pi - 2x$$

$$5\pi = 8x - 9\pi$$

$$- \pi = 2x$$

$$10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$12x = 14\pi \quad x = \frac{14}{12}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

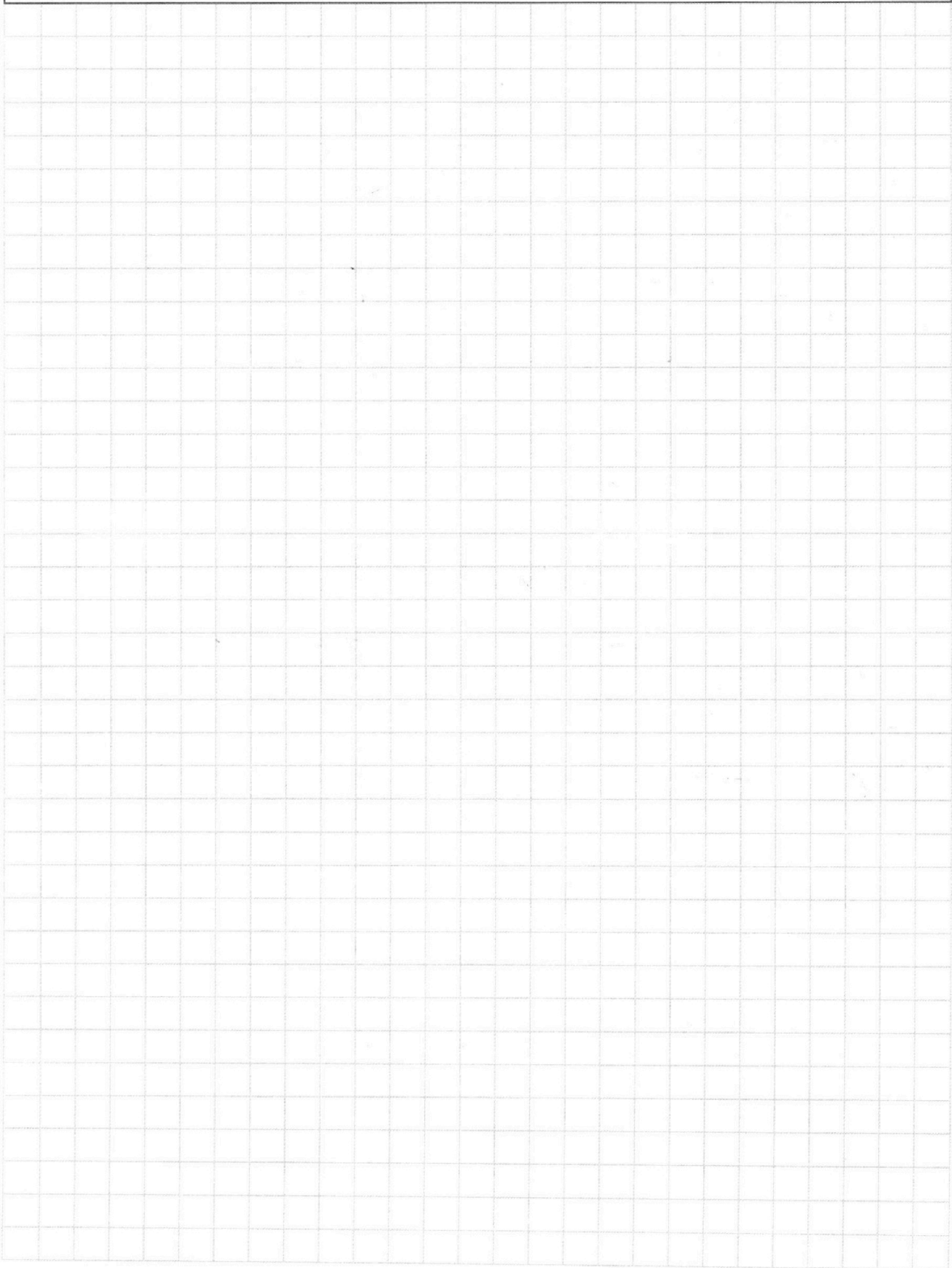


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a sphere and a cone.

**Diagram 1 (Top Left):** A sphere with a cone inscribed inside it. The cone's vertex is at the top of the sphere. The base of the cone is a circle on the sphere's surface. Points  $A, B, C$  are marked on the base circle. A vertical line  $SK$  represents the cone's axis, where  $S$  is the vertex and  $K$  is the center of the base. A point  $Q$  is marked on the axis. A horizontal line  $AK$  is drawn. A right angle is indicated at  $K$ . The area of the sphere is given as  $S = 580$ . The radius of the sphere is  $20$ . A point  $P$  is marked on the sphere's surface.

**Diagram 2 (Top Right):** A sphere with a cone inscribed inside it. The cone's vertex is at the top. The base is a circle on the sphere's surface. Points  $A, B, C$  are marked on the base circle. A vertical line  $SK$  represents the cone's axis. A point  $Q$  is marked on the axis. A horizontal line  $AK$  is drawn. A right angle is indicated at  $K$ . The radius of the sphere is  $20$ . A point  $P$  is marked on the sphere's surface.

**Diagram 3 (Bottom Left):** A sphere with a cone inscribed inside it. The cone's vertex is at the top. The base is a circle on the sphere's surface. Points  $A, B, C$  are marked on the base circle. A vertical line  $SK$  represents the cone's axis. A point  $Q$  is marked on the axis. A horizontal line  $AK$  is drawn. A right angle is indicated at  $K$ . The radius of the sphere is  $20$ . A point  $P$  is marked on the sphere's surface.

**Diagram 4 (Bottom Right):** A sphere with a cone inscribed inside it. The cone's vertex is at the top. The base is a circle on the sphere's surface. Points  $A, B, C$  are marked on the base circle. A vertical line  $SK$  represents the cone's axis. A point  $Q$  is marked on the axis. A horizontal line  $AK$  is drawn. A right angle is indicated at  $K$ . The radius of the sphere is  $20$ . A point  $P$  is marked on the sphere's surface.

**Calculations:**

$$AC^2 = 14x^2$$

$$CE/CF = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{CP}{CA}$$

$$CE \cdot CA = 14x^2$$

$$AC^2 = CF \cdot CP =$$

$$= CF \cdot CA \cdot \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$14x^2 \cdot \sqrt{\frac{7}{2}} = CF \cdot CA$$