



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



III. и. $ac : 2^{14}$, $mo\ abc : 2^{14}$

III. и. $ac : 3^{21}$, $mo\ abc : 3^{21}$

III. и. $ac : 5^{39}$, $mo\ abc : 5^{39}$

III. и. $mo\ abc > 0$

$u\ abc \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot A$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot B$,

$c = 2^{\delta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot C$, где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z}$ и не меньше 0.
 $A, B, C \in \mathbb{N}$, но не кратны $\{2, 3, 5\}$.

III. и. u_3 условие:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 8, & \alpha_1 + \delta_1 \geq 14, & \beta_1 + \delta_1 \geq 12, \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 14, & \alpha_2 + \delta_2 \geq 21, & \beta_2 + \delta_2 \geq 20, \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 12, & \alpha_3 + \delta_3 \geq 39, & \beta_3 + \delta_3 \geq 17. \end{cases}$$

$\alpha_1 = 5, \beta_1 = 3, \delta_1 = 9$
 $\alpha_2 = 12, \beta_2 = 0, \delta_2 = 17$
 $\alpha_3 = 8, \beta_3 = 6, \delta_3 = 14$

- условие выполнено не во всех случаях

Докажем, что $abc : 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

III. и. $ac : 5^{39}$, $mo\ abc : 5^{39}$.

III. и. $(\alpha_2 + \beta_2) + (\alpha_2 + \delta_2) + (\beta_2 + \delta_2) \geq 14 + 21 + 20$

$2(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) \geq 55$, mo

$\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 27,5$

$abc : 3^{27,5}$, $mo\ x. \alpha_2, \beta_2, \delta_2 = \text{целые}$, mo

$\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 28$ и $abc : 3^{28}$.

III. и. $(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_1 + \delta_1) + (\beta_1 + \delta_1) \geq 8 + 14 + 12$, mo

$2(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 34$, $\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq 17$

$abc : 2^{17}$, $знаем, abc : 2^{17}$.

Значит, $abc : 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

III. и. $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Равенство достигается при $a = 2^5 \cdot 3^{12} \cdot 5^8$,

$b = 2^3 \cdot 3^6$ и $c = 2^9 \cdot 3^{17} \cdot 5^{34}$

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$, $b = 2^3 \cdot 3^6$, $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17}$

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

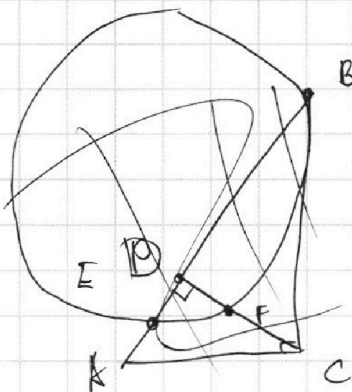
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

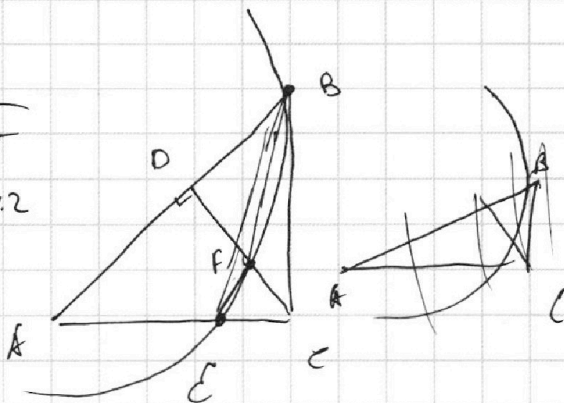
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel \varepsilon$
 $AB \parallel EF$
 $AD:DB = 5:2$

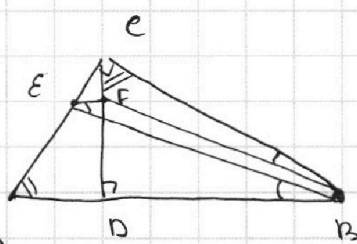
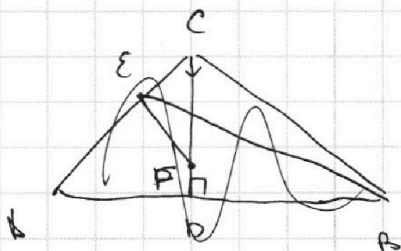
$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CEF}$



Решение.

Т.к. данная дуга окружности является описанной около $\triangle BFE$ и BC — касательная к ней, то $\angle BEF = \angle EBC$ (оба опираются на дугу BE).

Т.к. $EF \parallel AB$, то $\angle BEF = \angle ABE$ (как соответственные углы при $AB \parallel EF$ и секущей BE).



Т.к. $EF \parallel AB$, то $\angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$.

(1) Т.к. CD — высота, то $\triangle CDB \sim \triangle ACB$ ($\angle CBA$ — общий, $\angle CDB = \angle ACB = 90^\circ$). Значит, $\angle DCB = \angle CAB$.

(2) Т.к. $\angle CBF = \angle CBA$, $\triangle CDB \sim \triangle ACB$, то $\angle DCB = \angle CAB$, то $\triangle CFB \sim \triangle AEB$.

Тогда, из (2) $\frac{AE}{CF} = \frac{AB}{CB}$, из (1) $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB}$.

Значит, $\frac{AE}{CF} = \frac{AC}{CD} = \frac{AE+EC}{CF+FD}$.

$AE(CF+FD) = (AE+EC)CF$

$AE \cdot FD = EC \cdot CF \Rightarrow \frac{EC}{AE} = \frac{FD}{CF}$

Т.к. $EF \parallel AD$, то $\triangle CEF \sim \triangle CAD$ ($\angle ACD$ — общий,

$\angle EFC = \angle ADC = 90^\circ$). Тогда, $\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{CD}$. (3)

$\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{CF}$

$\frac{AC}{CE} = \frac{AE+EC}{CE} = \frac{AE}{EC} + 1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{CD}{CF} = \frac{CE+FD}{CF} = \frac{FD}{CF} + 1$$

Значит, $\frac{FD}{CF} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$

$$\frac{FD}{CF} = \frac{AE}{EC}$$

Т.к. $\frac{FD}{CF} = \frac{AE}{EC}$ и $\frac{FD}{CF} = \frac{EC}{AE}$ (из (3)),

то $\frac{AE}{EC} = \frac{EC}{AE} \Rightarrow AE = EC$.

Значит, $FD = CF$. Т.к. E и F - середины
 AC и CD соответственно.

Тогда, $S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{ACD}$ (EF - средняя линия $\triangle ACD$).

Т.к. $AD : DB = 5 : 2$, то $DB = \frac{2}{5} AD$

$$S_{ABC} = S_{ADC} + S_{CDB} = \frac{1}{2} CD (AD + DB) =$$
$$= \frac{1}{2} CD \cdot AD \left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{10} CD \cdot AD.$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD.$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{ADC} = \frac{1}{8} CD \cdot AD.$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{7}{10} CD \cdot AD}{\frac{1}{8} CD \cdot AD} = \frac{7 \cdot 8}{10} = 5,6.$$

Ответ: $S_{ABC} : S_{CEF} = 56 : 10$

или же $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 5,6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{то } \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\cos x \text{ имеет период } 2\pi \quad \cos 0 = 1 \\ \cos 2\pi = 1$$

~~Найдем решение на $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}$~~

Тогда, $f(x) = \arcsin(\cos x)$ — периодическая с периодом 2π

$g(x) = \pi - 2x$ — строго убывающая функция

$\arcsin y$ — дает значения значения из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Поэтому, ~~тогда~~ $f(x)$ принимает значения только из отрезка $[-5\pi; 5\pi]$.

$g(x) = \pi - 2x$ принимает значения $[-5\pi; 5\pi]$ только при $x \in [-2\pi; 3\pi]$.

Значит, решение $f(x) = g(x)$ есть только на $[-2\pi; 3\pi]$.

Сделаем замену переменной $x = -y + \frac{\pi}{2}$

$$\text{Тогда, } \pi - 2x = 2y; \quad \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin y,$$

$$\text{то } \arcsin(\sin y) = 2y.$$

$$\arcsin(\sin y) = y - \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{и т.д. } y - \pi n \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}].$$

$$\text{то } \arcsin(\sin y) = 2y = y - \pi n \Rightarrow y = -\pi n$$

т.е. $\arcsin(\sin y) \in [-5\pi; 5\pi]$, но решение $y = -\pi n$ скажем $y \in [-2,5\pi; 2,5\pi]$.

Тогда, $5\pi n \in [-2,5\pi; 2,5\pi]$, $n \in [-2; 2]$.

Рассмотрим все $n \in [-2; 2]$.

$$n = -2, \quad y = -2,5\pi, \quad \sin(-2,5\pi) = \sin(-\frac{5\pi}{2}) = -1 \\ \text{то } \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad 2y = -5\pi \quad n = -2 \text{ решение.}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$n = -1. \quad y = -\frac{5}{4}\pi. \quad \sin y = +\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
$$10 \arcsin\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10 \cdot \left(+\frac{\pi}{4}\right) = +2,5\pi.$$

$$2y = -2,5\pi.$$

Значит, $n = -1$ не решение.
 $n = 0$

$$y = 0 \quad 2y = 0 \quad \sin(y) = 0$$
$$10 \arcsin(0) = 10 \cdot 0 = 0$$

$n = 0$ — решение

$$n = 1.$$

$$y = \frac{5}{4}\pi \quad 2y = 2,5\pi \quad \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
$$10 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{10\pi}{4} = -2,5\pi.$$

$n = 1$ — не решение

$$n = 2.$$

$$10 \arcsin 1 = 10 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi.$$
$$2y = 5\pi \quad \sin y = 1.$$

$n = 2$ — решение.

$$n = \{-2; 0; 2\} \text{ — решение}$$
$$y = \{-2,5\pi; 0; 2,5\pi\}.$$

$$x = -y + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \{-2\pi; \frac{\pi}{2}; 3\pi\}.$$

Ответ: $x \in \{-2\pi; \frac{\pi}{2}; 3\pi\}.$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 36) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases} \end{cases}$$

$ax - 3y + 4b = 0$ — уравнение прямой

ω_1 : $x^2 + y^2 = 1$

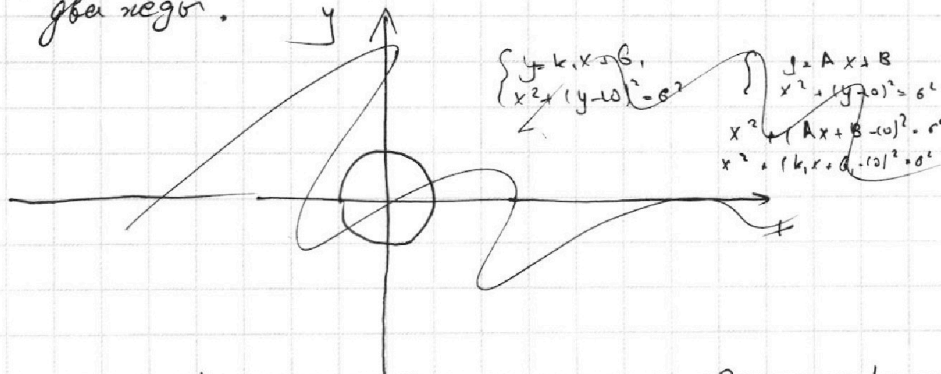
ω_2 : $x^2 + (y-10)^2 = 36$

уравнение окружностей ω_1 и ω_2

Сначала решим систему уравнений в виде точек пересечения прямой с окружностями.

Прямая имеет не более двух точек пересечения с окружностью.

Т.к. решение должно быть и то прямая пересекает каждую окружность два раза.



Т.к. центр 1 окружности — $O(0; 0)$ и её радиус $r = 1$, а центр второй окружности — $Q(0; 10)$, а её радиус — $R = 6$, то пересекаться они должны ($OQ = 10$, $r + R = 7$).

$ax - 3y + 4b = 0$, $3y = ax + 4b$
 $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

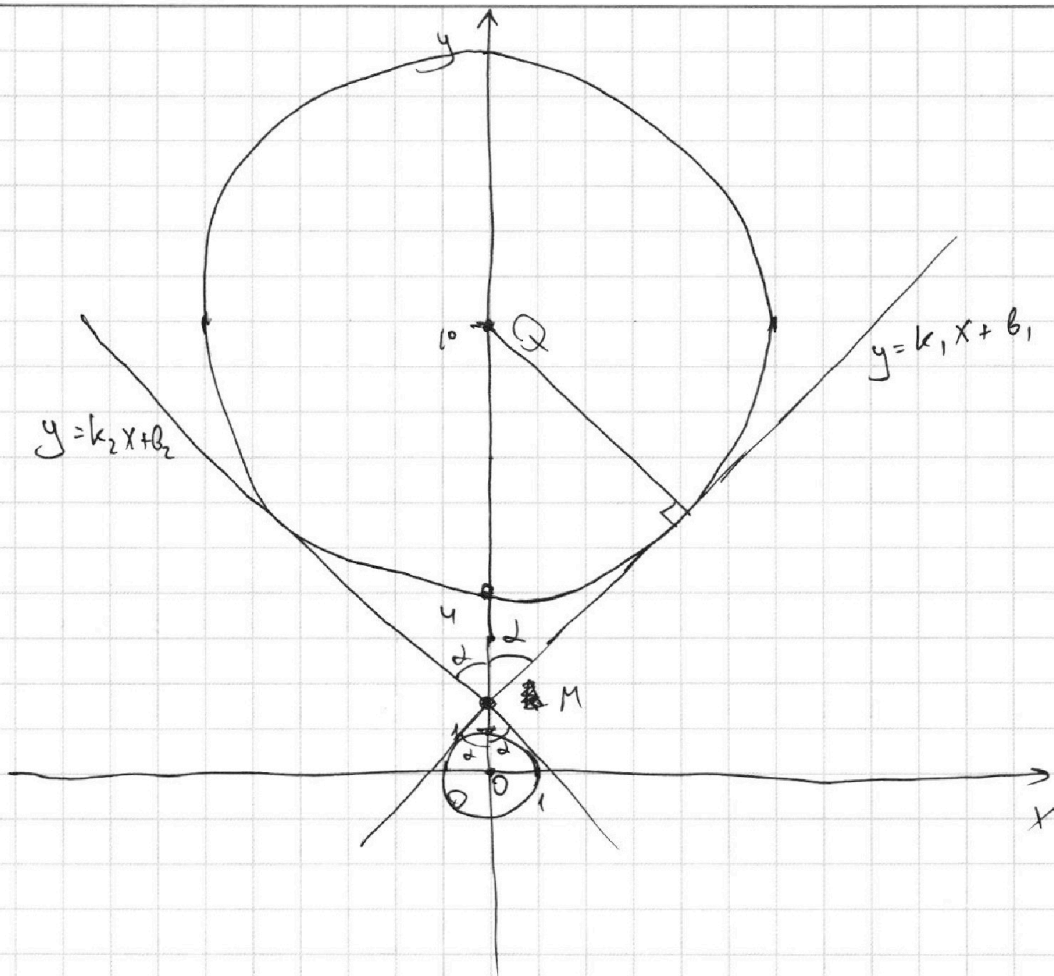
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. прямая задается как $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$, то
 а — определены наклон, а b — точку
 пересечения с Oy . Заметим $\frac{a}{3}$ на A , $\frac{4}{3}b$ на B .
 Значит, нужно найти такие A , что
 из множества прямых параллельных $y = Ax$
 хотя бы две одна пересекает, без окружности.
 Докажем, что для A такие две
 задают прямые касаются \neq и
 имеют наклон больший, чем у внешней
 точки касательной с той же осью Ox
 наклон и наклон меньше, чем
 у внутренней касательной
 с отрицательной осью Ox .
 ($\left[\begin{array}{l} A > k_1 \\ A < k_2 \end{array} \right]$, где $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$
 касательные).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МОФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $0 \leq A \leq k$, то т.к. $y = kx + b_1$ —
одна из внутренних касательных, то
при $B \leq b_1$ $y = Ax + B$ ~~то~~
или не пересекает ω_2 или
касается ω_2 . А значит, наше
предположение не верно и решение
(пересечение уже не больше 3).
(B отсутствию двух пересечений
почему убедиться знаем, что
 α (от точки на прямой) уменьшается
при ~~убавлении~~ ~~тогда~~ M от
— угла между Oy и касательной из M
уменьшается при ~~увеличении~~ ~~тогда~~
 M вниз по Oy ($\sin \alpha = \frac{R}{QM}$,
 QM — расстояние, значит α — уменьшается),
а чем меньше α тем больше
угол наклона y касательной из M .
Тогда, $y = Ax + B$ не может быть касательной
при $B < b_1$, так и не пересекает ω_2
 B двух точек (наклон прямой не
меньше касательной), а при $B_2 = b_1$,
 $y = Ax + B$ не ~~два~~ ~~наименее~~ не может
быть прямой, значит, $y = Ax + B$
при $0 \leq A \leq k$, $B \leq b_1$ имеет
 $C \in \omega_2$ не более одной точки
(возможн).

С другой стороны при $B > b_1$,
 $y = Ax + B$ имеет не более одной
общей точки с ω_1 (ситуация
аналогичная с ω_2) ~~кроме~~ ~~для~~
значит, A должен быть ~~не меньше~~
к b_1 больше k ,
При $k_2 \leq A \leq 0$ все тоже самое
т.к. ситуация симметрична,
заранее известно относительно Oy что
случае $0 < A \leq k$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



III вариант, $A \leq k_2$.

III вариант
 при $A > k_1$ будут сечущей
 для обеих окружностей
 но если же при этом, то и
 имеет не более одной общей точки
 если $0 \leq A \leq k_1$,
 диаметрально $y = Ax + b_2$ при $A < k_2$
 то же сечущей и обеих
 окружностей.

Отсюда следует условия k_1 и k_2 .
 Из геометрии легко видим, что
 обе касательные пересекутся на OQ,
 т.е. на Oy.

III вариант
 $\sin d = \frac{r}{10-b}$, $\sin(90^\circ - d) = \frac{r}{b_1 - 0}$ т.к.
 касательные

$\sin d = \frac{r}{10-b}$, $\sin d = \frac{r}{b_1 - 0}$ т.к.

касательные перпендикулярны
 радиусам M имеет координаты $(0; b_1)$.

$\frac{r}{10-b} = \frac{r}{b_1}$, $\frac{b}{10-b} = \frac{r}{b}$, $b^2 = 10-b$
 $2b = 10$

$b = \frac{10}{2}$, $\sin d = \frac{1}{\frac{10}{b}} = \frac{r}{b}$

$k_1 = \sin(90^\circ - d) = \frac{\sin(90^\circ - d)}{\cos(90^\circ - d)} = \frac{\cos d}{\sin d}$
 $= \frac{\sin 90^\circ \cos d - \cos 90^\circ \sin d}{\cos 90^\circ \cos d + \sin 90^\circ \sin d} = \frac{\cos d}{\sin d}$

т.к. d - острый, то $\cos d = \sqrt{1 - \frac{r^2}{10^2}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$k_1 = \frac{\frac{\sqrt{51}}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{51}}{5}$

$k_2 = -k_1$, из симметрии.

значит, $\left[\begin{matrix} a > \frac{3\sqrt{51}}{5} \\ a < -\frac{3\sqrt{51}}{5} \end{matrix} \right]$, $\left[\begin{matrix} \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{2} \\ \frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{2} \end{matrix} \right]$

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{5}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{5}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{0,2} 25 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$$

из данных равенств ясно, что
 $2x > 0$, $y > 0$ и т.д. $x > 0$ и $y > 0$.

$$\log_5^4(2x) - 3 \cdot \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \log_5 2x - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \cdot \frac{1}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \log_5 y - 3$$

$$\frac{\log_5^5 2x - 3 - \frac{4}{3} + 3\log_5 2x}{\log_5 2x} = 0$$

$$\frac{\log_5^5 y + 4 + \frac{1}{3} + 3\log_5 y}{\log_5 y} = 0$$

$$\log_5^5 2x + 3\log_5 2x - \frac{13}{3} = 0$$

$$\log_5^5 y + 3\log_5 y + \frac{13}{3} = 0$$

Значит, $\log_5^5 2x + 3\log_5 2x = -\log_5^5 y + 3\log_5 y$.

$$\log_5 y = B, \log_5 2x = A$$

$$A^5 + 3A = -(B^5 + 3B)$$

$$-B^5 - 3B = A^5 + 3A$$

Значит, решим две последние уравнения.
 $A = -B$ - решение.

$$\text{Значит, } \log_5 2x = -\log_5 y$$

$$\log_5 2x + \log_5 y = \log_5 2xy = 0$$

$$2xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O(0;0) \rightarrow (0;0;0)$$

$$P(-10; 80) \rightarrow (-80; 80)$$

$$Q(2; 80) \rightarrow (10; 80)$$

$$R(18; 0) \rightarrow (90; 80)$$

Точка $M(x; y)$ внутри параллелограмма
 будет ~~при движении~~ иметь
 целые координаты в узлах
 системы ссы $x \in Z, y \in Z$.

Тогда, условные $5x_2 + y_2 - 5x_1 - y_1 = 45$
 превращается в $x_2 + y_2 - x_1 - y_1 = 45$.

Т.о. для точки A в новом
 параллелограмме можно найти
 ко-ва. тогда z там же т.о.
 сумма координат B на 45 больше
 суммы координат A и $x_2 \in Z, y_2 \in Z$.
 Т.е. $x_1 \in Z, x_2 \in Z$, т.о. $y_2 - y_1 \in Z$
 (т.е. $45 \in Z$).

Т.к. $x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 45$,

то для $A(x_1; y_1)$
 $x - x_1 + y - y_1 = 45$

Если перенести начало $(0;0)$
 в A , то $x + y = 45$
 $y = 45 - x$

Значит, решение
 принадлежит прямой
 параллельной
 $y = 45 - x$.

а эти прямые
 параллельны
 QR и PO .

Расстояние от A до этой прямой равно

$$\frac{45 \cdot 45}{\sqrt{45^2}} = \frac{45}{2}$$

то решение есть.

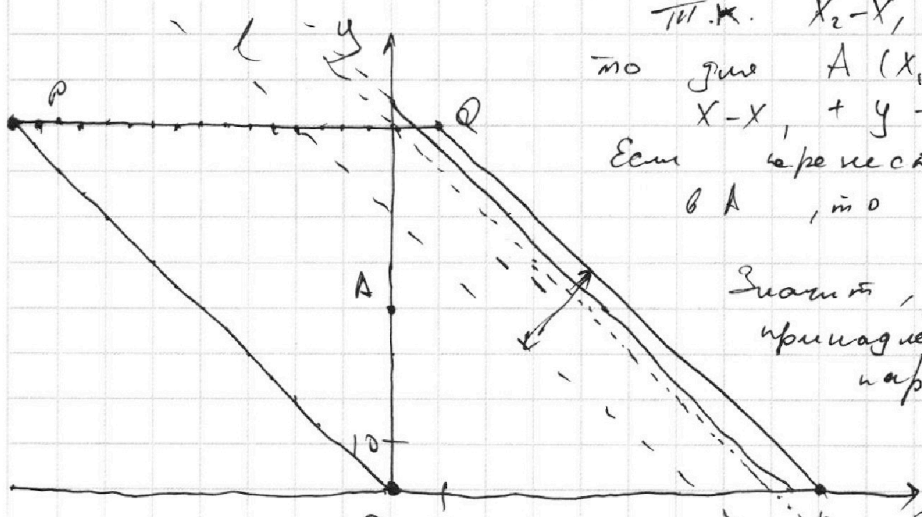
Тогда, если A правее l , где $l \parallel QR$.

$QR \perp l$ $\frac{45 \cdot 45}{2} = 1012.5$

При движении A по прямой параллельной QR ,

иначе решение не получится. Значит, можно

рассчитать 1012.5 $\cdot 2 = 2025$ $\cdot 2 = 4050$ $\cdot 2 = 8100$
 Ответ: $12^2 \cdot 18$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

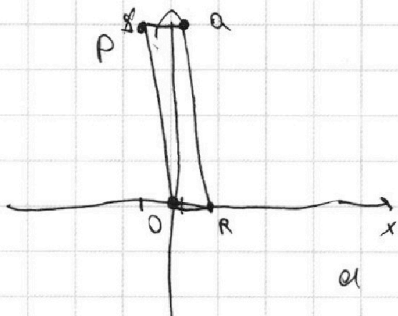
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что прямая QR задается уравнением

$$y = -5x + 90.$$

Прямая PO : $y = -5x$

и OR и PQ параллельны Ox .

П.и. $5x_2 + y_2 - 5x_1 - y_1 = 45$

Посмотрим какое максимумное значение

принимает $5x_2 + y_2$ при $(x_2; y_2)$ внутри параллелограмма.

Внутри параллелограмма $PQRO$ — максимум.

П.и. точки $(x_2; y_2)$ внутри $PQRO$,

то $(x_2; y_2)$ — слева с левой стороны от QR . П.о. при неубывании y_2 ,

$$y_2 = -5x + 90, \quad x \geq x_2$$

$$x = \frac{y_2 - 90}{-5} = 18 - \frac{y_2}{5}$$

$$x_2 \leq 18 - \frac{y_2}{5}$$

Тогда, $5x_2 + y_2 \leq 5(18 - \frac{y_2}{5}) + y_2 = 90$.

y_2 не больше 80 п.и. PQ и не ниже $(x_2; y_2)$, а PQ задается как $y = 80$.

Тогда, $x_2 + y_2 \leq 18 + \frac{4 \cdot 80}{5} = 18 + 64 = 82$

П.и. $(x_2; y_2)$ справа от PO , то

при неубывании y_2 x_2

$$y_2 = -5x, \quad x \leq x_2$$

$$x_2 \geq -\frac{y_2}{5}$$

Заметим, ищем точки заданные

$$\begin{cases} 0 \leq y_2 \leq 80 \\ -\frac{y_2}{5} \leq x_2 \leq 18 - \frac{y_2}{5} \end{cases}$$

Для точек $A(x_1; y_1)$ ищем

расстояние от начала координат

в 5 раз по оси x .

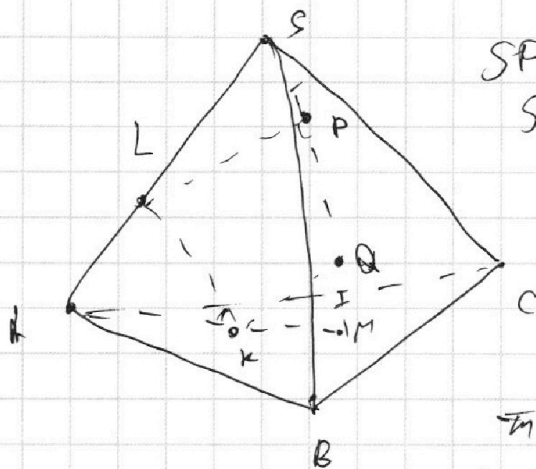
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SP = MQ \quad SA = 16$$

$$S_{ABC} = 100 \quad BC = 16$$

Точки L, P, Q, K лежат в одной плоскости, которая задается прямой AM и SA .

т.е. эти четыре точки лежат в одной

плоскости. Точки L, P, Q, K лежат на одной окружности. т.е. сфера касается AM и SA (в точке L на AM и в точке P на SA). Окружность касается AS в L и AM в K .

Тогда считаем точки M равна MK^2 и $MQ \cdot MP =$
 $= MQ \cdot (MQ + QP)$ т.е. $MP =$
 длина окружности

Считаем точки S равна SL^2 и
 $SP \cdot SQ = SP(SP + PQ)$.

т.е. $SP = MQ$, то $MQ(MQ + QP) = SP(SP + PQ)$.

Значит, считаем точки M и S симметричны окружности равно.

Значит, $MK^2 = SL^2$, $MK = SL$.

Также можем считать точку A симметрична к окружности. Она равна AL^2 и AK^2 (L и K - точки касания). Значит, $AL = AK$.

Тогда, $AK + KM = AL + LS = AS$.

Значит, $AM = SA = BC = 16$.

т.е. M делит AA_1 в отношении $2:1$,
 то $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 24$.

$S_{ABC} = \frac{AA_1 \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(\angle AA_1B)}{24 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha} = 100$
 $\sin \alpha = \frac{100}{182}$

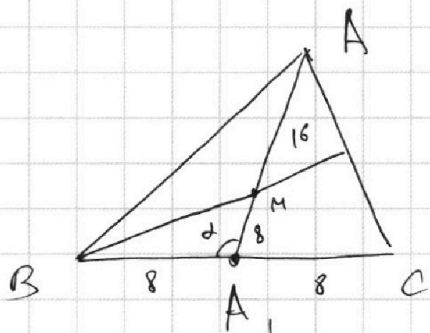
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение
Заметим, что $MA_1 = \frac{1}{2} AA_1 = 8$.
 $BA_1 = A_1C = \frac{1}{2} BC = 8$.

Значит, MA_1 - медиана равная по длине стороне и которой

ура ΔBMA_1 . Значит, ΔBMA_1 - прямоугольный.

Т.к. $\sin \alpha = \frac{100}{192}$, то $\frac{100}{192} = \frac{50}{96} = \frac{25}{48}$

$\sin(\angle MBA_1) = \sin(90^\circ - \alpha)$
равнобедренный ($MA_1 = BA_1$).

Т.к. $\sin \alpha = \frac{100}{192}$, то $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{100 \cdot 100}{192 \cdot 192}} =$
 $= \sqrt{1 - \frac{2304}{2304} - \frac{625}{2304}} = \sqrt{\frac{1679}{48}}$

Т.к. по теореме косинусов где ΔBMA_1 и ΔA_1CM касаются BM и MC . (без обращения внимания на то, что $\angle BA_1M < \angle MA_1C$).

$BM^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cdot \frac{\sqrt{1679}}{48} =$

$= 128 \left(1 - \frac{\sqrt{1679}}{48} \right)$

$CM^2 = 128 \left(1 + \frac{\sqrt{1679}}{48} \right)$

$CC_1 = \frac{3}{2} CM = \frac{3}{2} \sqrt{CM^2}$

$BB_1 = \frac{3}{2} \sqrt{BM^2}$

$CC_1 \cdot BB_1 = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{128 \cdot 128 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{1679}}{48} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{1679}}{48} \right)}$
 $= \frac{9}{4} \cdot 128 \cdot \sqrt{1 - \frac{1679}{48^2}} = 9 \cdot 32 \cdot \sqrt{\frac{625}{48^2}} = 9 \cdot 32 \cdot \frac{25}{48} =$

$= 6 \cdot 25 = 150$

$AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 = 24 \cdot 150 = 3600$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

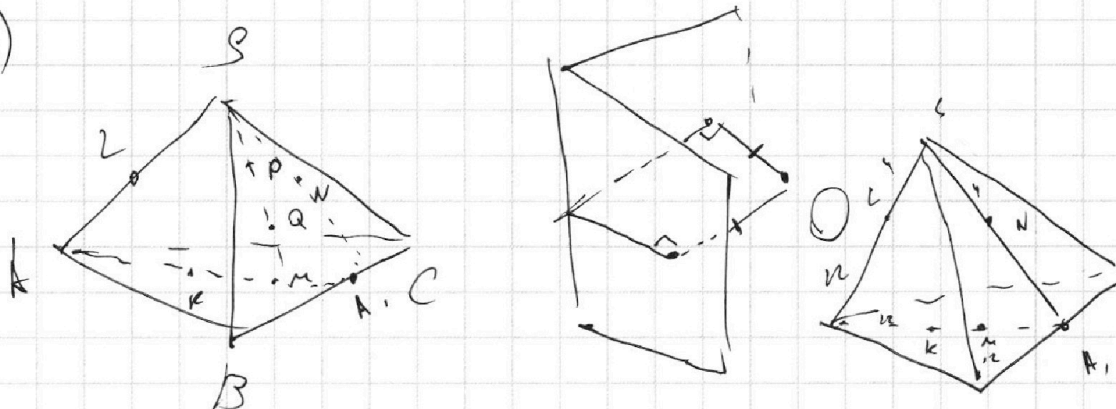
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8)



~~Т.к. Ω касается пирамиды в плоскости L, N, K т.к. L, N, K принадлежат плоскости Ω и в одной плоскости Ω касается (SBC) в точке N, Ω касается AS в точке L, то стороны точки S относительно Ω равны SL^2 и SN^2 . Знаем, $SL = SN = 4$.~~

В пункте (а) мы получим, что $AL = AK$, $SL = KM, AS = AM$ знаем, $\frac{AL}{AS} = \frac{AK}{AM} = \frac{AK}{AS}$

Тогда, $LK \parallel SM$.

Рассмотрим плоскость Ω и окружность Ω (они не совпадают). Задать хорды SM и SN (они не совпадают).

Т.к. $SM \parallel LK$ и $SM \cap SN = S$, то SM лежит в этой плоскости.

Тогда, точки L, K, P, Q, N лежат в одной плоскости. т.к.

все эти точки принадлежат сфере и одной плоскости, то они все на одной окружности.

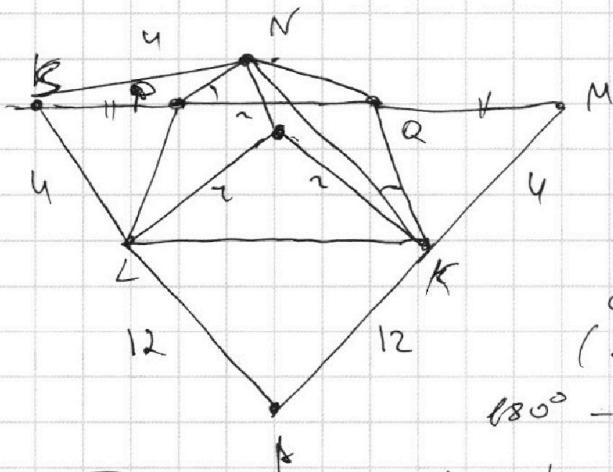
При этом SN касается этой окружности в N.

Следовательно точка S относительно этой окружности равна SL^2 и SN^2 .

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $SN = SL = 4$.



Теперь, если мы найдем KN , то из $\triangle KON$, где O - центр сферы найдем $\angle KON$, а ищейной угол между двумя плоскостями (SBC) и (ABE) равен $180^\circ - \angle KON$.

III. и. $SN \subset (ASM)$, но $AM \cap BC = SN \cap BC$, и и. (ASM) пересечет BC в одной точке.

Тогда, SN - медиана в $\triangle SBC$, база SN пройдет через A_1 .

По теореме Птолемея $AN^2 = AA_1 \cdot AK = 24 \cdot 12 = 288$.

и $AN^2 = AA_1 \cdot AK = 24 \cdot 12 = 288$.

Тогда, $SA_1 : NA_1 = SL : AL = 4 : 12$ ($AL = SA - SL = 16 - 4 = 12$).

Тогда, $\angle N \parallel AA_1$, $AA_1 = 24$, $SA = 16$, $SA_1 = 12 + 4 = 16$.

$\triangle SAA_1$ - равнобедренный

По формуле косинусов $\cos(\angle SA_1K) = \frac{AK}{SA_1} = \frac{12}{16}$ (и. и. $AK = 12$, $KA_1 = 6$, то SK - медиана, а значит, высота).

По теореме косинусов $KN^2 = NA_1^2 + A_1K^2 - 2 \cdot NA_1 \cdot A_1K \cdot \cos(\angle SA_1K) = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{12}{16} = 144 \cdot 2 \cdot (1 - \frac{12}{16}) = \frac{4}{16} \cdot 2 \cdot 144 = 82$. $KN = \sqrt{82} = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

III. в $\triangle KON$, OK и ON - радиусы, то $OK = ON = 5$. По теореме косинусов.

$KN^2 = OK^2 + ON^2 - 2 \cdot OK \cdot ON \cdot \cos(\angle KON) = 2 \cdot 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos(\angle KON) = 50(1 - \cos(\angle KON)) = 82$. $1 - \cos(\angle KON) = \frac{32}{25}$. $\cos(\angle KON) = \frac{25 - 32}{25}$. Ответ: а) 3600 ; б) $180^\circ - \arccos(\frac{25 - 32}{25})$.