МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc$ делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, $ac$ делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $BC$ в точке $B$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $F$, а катет $AC$ – в точке $E$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан $AA_1, BB_1$ и $CC_1$.

   б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 4$, а радиус сферы $\Omega$ равен 5.

№1

$a, b, c \in \mathbb{N}$ $\quad ab \vdots 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ $\quad bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ $\quad ac \vdots 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

Заметим, что наличие в числах $a, b, c$ простых делителей помимо $2; 3; 5$ лишь увеличит их произведение, не повлияв на данные в условии делимости, т.к. любые простые делители помимо $2; 3; 5$ взаимно просты с числами вида $2^n \cdot 3^k \cdot 5^m$, где $n, m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тогда пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Из данных в условии делимостей получаем

1) $\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 9 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 19 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \end{cases}$ Отсюда $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 21$ причем рав-во и выполнение неравенств системы достигается при $\alpha_1 = 7; \beta_1 = 2; \gamma_1 = 12$

2) $\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 18 \end{cases}$ Отсюда $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{41}{2}$ в силу принадлежности $\alpha_2, \beta_2$ и $\gamma_2$ целым числам $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 21$, причем рав-во и выполнение неравенств системы достигается при $\alpha_2 = 8; \beta_2 = 2; \gamma_2 = 11$

3) $\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 10 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 30 \end{cases}$ Отсюда и т.к. $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \geq 0$ $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \alpha_3 + \gamma_3 \geq 30$, причем рав-во и выполнение неравенств системы достигается при $\alpha_3 = 15; \beta_3 = 0; \gamma_3 = 15$.

Таким образом мы минимизировали суммы $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i$

$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$, причем рав-во достигается при указанных ранее $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист 2

14) $OB^2 = y_0^2 = R^2$ - (радиус окружности - R)

$OF^2 = (\sqrt{3}x_1 - 2x)^2 + (x_1 - y_0)^2 = y_0^2$ т.к. принадлежат одной окружности.

$OE^2 = 4x^2 + (4x_1 - y_0)^2 = y_0^2$

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 4\sqrt{3}x_1x + 4x^2 + x_1^2 - 2x_1y_0 + y_0^2 = y_0^2 \\ 4x^2 + 16x_1^2 - 8x_1y_0 + y_0^2 = y_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1^2 - 2x_1y_0 - 4\sqrt{3}x_1x + 4x^2 = 0 \\ 16x_1^2 - 8x_1y_0 + 4x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16x_1^2 + 8x_1y_0 + 16\sqrt{3}x_1x - 16x^2 = 0 \\ 16x_1^2 - 8x_1y_0 + 4x^2 = 0 \end{cases}$$

Выйдем из системы сложив рав-ва

$16\sqrt{3}x_1x = 12x^2$

$x_1 = \frac{12}{16\sqrt{3}}x \quad x_1 = \frac{3}{4\sqrt{3}}x \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}x.$

Отсюда $E(0; \sqrt{3}x)$, значит, $EC = \sqrt{3}x$.

15) $EF \parallel AB$, $CD \perp AB$, $F \in CD$ $\Rightarrow CF \perp EF$

16) $EF \parallel AB \Rightarrow \angle CAB = \angle CEF$ как соответственные при секущей AC.

17) $\angle CAB = \angle CEF$, $\angle CFE = \angle ACB = 90°$ $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ECF$ по 2 углам.

18) $k = \frac{AB}{EC} = \frac{4x}{\sqrt{3}x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ - коэффициент подобия.

18) $\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle CEF)} = k^2 = \frac{16}{3}$

Ответ: $\frac{16}{3}$.

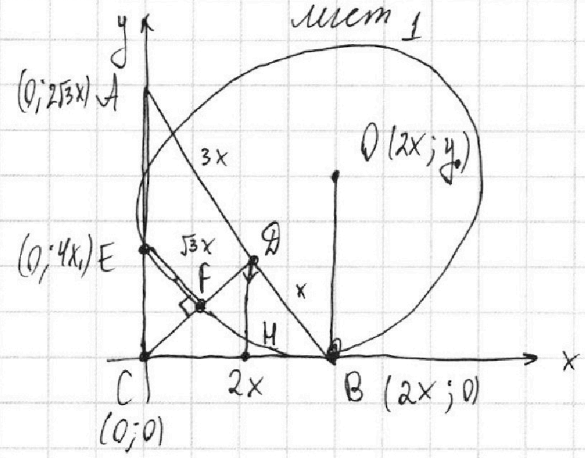
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист 1




№2 Пусть $AD = 3x$ $BD = x$

1) Введем ДПСК
$C(0;0)$ $Ox \uparrow\uparrow \vec{CB}$
$Oy \uparrow\uparrow \vec{CA}$

2) Д.п. $O$ – центр окружности из условия.

3) По св-ву прямоуг. тр-ка $\triangle ABC$
$BC = \sqrt{AB \cdot BD} = 2x$
$AC = \sqrt{AB \cdot AD} = 2\sqrt{3}x$.

4) Отсюда $A(0; 2\sqrt{3}x)$ $B(2x; 0)$

5) $OB \perp BC$ по св-ву касательной
Пусть $O(2x; y_0)$

6) $\vec{AB} = \{2x; -2\sqrt{3}x\}$

7) ~~Пусть Д.п.~~ $CD = \cancel{2x}\ \frac{BC \cdot AC}{AB} = \frac{2x \cdot 2\sqrt{3}x}{4x} = \sqrt{3}x$.

8) Д.п. $DH \perp CB$. $DH = \frac{CD \cdot DB}{BC} = \frac{x \cdot \sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

9) По Т Пифагора из $\triangle CDH$: $CH = \sqrt{3x^2 - \frac{3}{4}x^2} = \frac{3}{2}x$

10) Значит; $D\left(\frac{3}{2}x; \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

11) $\vec{CF} \parallel \vec{CD}$, $C(0;0)$, $D\left(\frac{3}{2}x; \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ $\Rightarrow$ $F(\sqrt{3}x_1; x_1)$

12) $E(0; y_2)$.

13) $\vec{EF} = \{\sqrt{3}x_1; x_1 - y_2\}$
$\vec{EF} \parallel \vec{AB}$, т.к. $EF \parallel AB$
$\vec{AB} = \{2x; -2\sqrt{3}x\}$
$\Rightarrow$ $\frac{\sqrt{3}x_1}{2x} = \frac{x_1 - y_2}{-2\sqrt{3}x}$
$-3x_1 = x_1 - y_2$
$y_2 = 4x_1$

Значит, $\vec{EF} = \{\sqrt{3}x_1; -3x_1\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$

$\frac{5\pi}{2} - 5\arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\arccos(\cos x) + x = 2\pi$

Заметим, что $5\arccos(\cos x) \geq 0$, значит, $x \leq 2\pi$

$5\arccos(\cos x) \leq 5\pi$, значит, $x \geq -3\pi$

1) $x \in [-3\pi; -2\pi]$ тогда $\arccos(\cos x) = -x - 2\pi$

$-5x - 10\pi + x = 2\pi$

$-4x = 12\pi$

$x = -3\pi$. $\quad -3\pi \in [-3\pi; -2\pi]$

2) $x \in (-2\pi; -\pi]$ тогда $\arccos(\cos x) = -x - \pi$

$-5x - 5\pi + x = 2\pi$

$-4x = 7\pi$

$x = -\frac{7}{4}\pi \quad -\frac{7}{4}\pi \in (-2\pi; -\pi]$.

3) $x \in (-\pi; 0]$ тогда $\arccos(\cos x) = -x$

$-4x = 2\pi$

$x = -\frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2} \in (-\pi; 0]$

4) $x \in (0; \pi]$ тогда $\arccos(\cos x) = x$

$6x = 2\pi$

$x = \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{3} \in (0; \pi]$

5) $x \in (\pi; 2\pi]$ тогда $\arccos(\cos x) = x - \pi$

$5x - 5\pi + x = 2\pi$

$x = \frac{7\pi}{6} \quad \frac{7\pi}{6} \in (\pi; 2\pi]$.

6) Как было замечено ранее при $x > 2\pi$ $\quad 5\arccos(\cos x) + x > 2\pi$

при $x < -3\pi \quad 5\arccos(\cos x) + x < 2\pi$

Значит, при $x \in (-\infty; -3\pi) \cup (2\pi; +\infty)$ ур-е не имеет решений.

Ответ: $-3\pi; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}$.

лист 2

Заметим, что, если угловой коэффициент прямой, задаваемой ур-ем (2) будет больше $\frac{5}{\sqrt{11}}$ или меньше $-\frac{5}{\sqrt{11}}$, то пересечение будет не более чем с одной окружностью, а значит, точек пересечения может быть не более 2, т.е. этот случай нам не подходит из геометрических соображений.

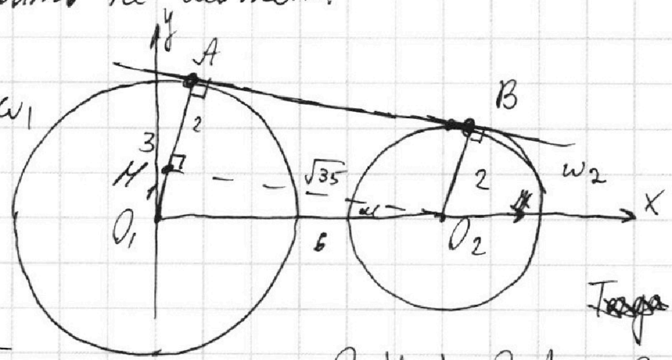
Из геометрических же соображений получаем, что при $-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$ $\exists b$: прямая $y = -\frac{a}{2}x + b$ является (в совокупности) общей секущей 2 окружностей и имеет с ними ~~точки~~ ровно 4 точки пересечения, что нам и требуется.

Т.е. $\frac{5}{\sqrt{11}} > \frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{11}}$

$-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$, эти значения нам подходят.

При $a = \pm\frac{10}{\sqrt{11}}$ прямая $y = -\frac{a}{2}x + b$ (равно) будет в зависимости от $b$ может быть секущей одной окружности или общей касательной двух окружностей, значит эти значения нам не подходят.

Заметим также, что в силу того, что у 2 непересекающихся окружностей существует всего 2 общих внутренних касательных, значит, других общих внутренних касательных помимо $l_1$ и $l_2$ быть не может.




Рассмотрим окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ с центрами $O_1$ и $O_2$ и радиусами 3 и 2 соответственно. Пусть $AB$ – общая внешняя касательная. и $\overrightarrow{O_1O_2} \uparrow\uparrow Ox$

~~Тогда~~ Пусть $O_1O_2 = 6$.

Тогда построим $O_2H \perp O_1A$. $O_2H$ ~~будет пар~~ $\parallel AB$, т.к. $AB \perp O_1A$ по св-ву касательной. $H_1A \parallel O_2B$, т.к. $H_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$ по св-ву касательной

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Лист 3

Тогда $ABO_2H_1$ – параллелограмм по определению, и значит,

$H_1O_2 \parallel AB \Rightarrow \angle(H_1O_2; O_1O_2) = \angle(AB; O_1O_2)$.

$ABO_2H_1$ – пар-мм $\Rightarrow AH_1 = BO_2 = 2 \Rightarrow O_1H_1 = 1$.

Отсюда $tg\angle O_1O_2H = \frac{1}{H_1O} = \frac{1}{\sqrt{35}}$ по Т Пифагора в $\triangle O_1O_2H$.

Но $\angle O_1O_2H =$ ~~$\angle(AB; O_1O_2$~~ $\angle(H_1O_2; O_1O_2) = \angle(AB; O_1O_2)$.

~~= модулю угла наклона~~

При этом $tg\angle O_1O_2H =$ ~~модулю~~ $|tg\alpha|$, где $\alpha$ – угол наклона прямой AB.

Теперь заметим, что $-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{1}{\sqrt{35}} < \frac{1}{\sqrt{35}} < \frac{5}{\sqrt{11}}$, значит, ~~вне~~ общие внешние касательные не повлияют на ответ, полученный ранее.

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

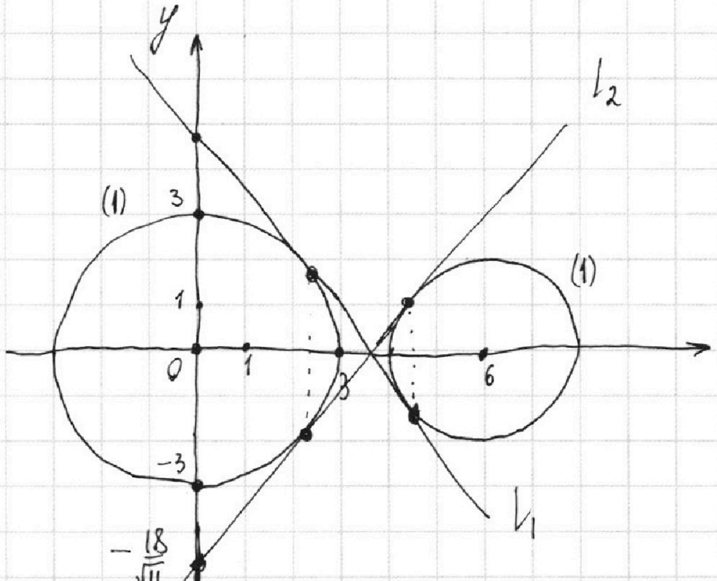
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

лист 1 №4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \quad (2) \\ (x^2+y^2-9)((x-6)^2+y^2-4)=0 \quad (1) \end{cases}$$

$a$ - ?
Найдется $b$, при котором система имеет ровно 4 решения.




Решим графически:
ур-е (1) задает пару окружностей с центрами в точках $(0;0)$ и $(6;0)$ и радиусами 3 и 2 соответственно
ур-е (2) задает прямую

$$\begin{cases} y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b \quad (2) \\ (x^2+y^2-9)((x-6)^2+y^2-4)=0 \quad (1) \end{cases}$$

ровно 4 решения системы будут ровно 4 точками пересечения прямой с окружностями на графике.

Заметим, что

$l_1: \ y=-\frac{5}{\sqrt{11}}x+\frac{18}{\sqrt{11}}$

$l_2: \ y=\frac{5}{\sqrt{11}}x-\frac{18}{\sqrt{11}}$

— внутренние общие касательные к окружностям.

Проверим это подстановкой:

1) $x^2+\left(\frac{5}{\sqrt{11}}x-\frac{18}{\sqrt{11}}\right)^2-9=0$

$\frac{36}{11}x^2-\frac{180}{11}x+\frac{225}{11}=0$

$\frac{D}{4}=\frac{90^2}{11}-\frac{36\cdot 225}{11}=$

$=\frac{90^2}{11}-\frac{90^2}{11}=0$

Значит, есть касание с первой окружностью

2) $x^2-12x+36+\left(\frac{5}{\sqrt{11}}x-\frac{18}{\sqrt{11}}\right)^2-4=0$

$36x^2-12\cdot 26x+26^2=0$

$\frac{D}{4}=36\cdot 26^2-36\cdot 26^2=0$

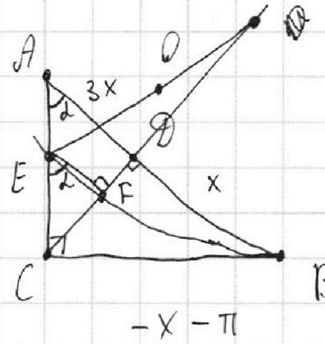
значит, есть касание со второй окружностью

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



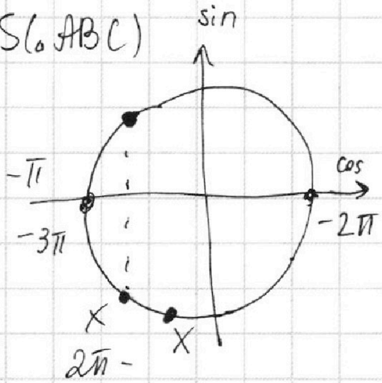

$-x-\pi$

$AB \parallel EF$

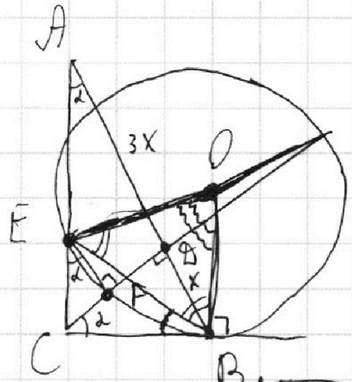
$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}.$

$\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle CEF)}$ – ?

$S(\triangle ADC) = \frac{3}{4} S(\triangle ABC)$




$CD = \sqrt{3}x.$




$CEF \sim \triangle ABC$

$\frac{CE}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{FE}{AC}$

$0 \le arc \le \pi$

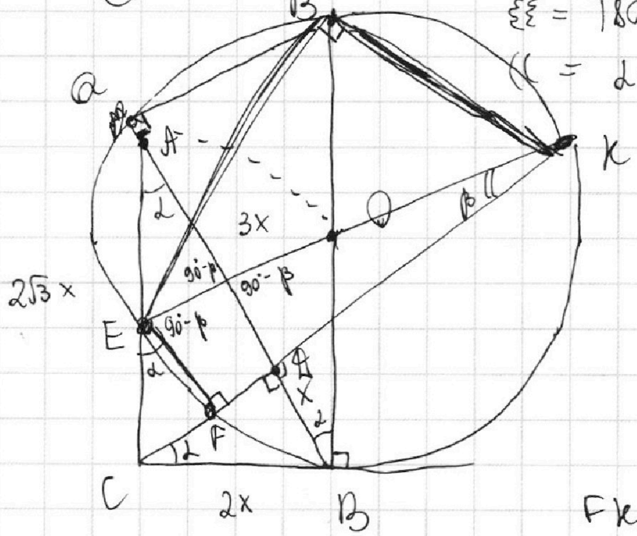
$0 \le 5arc \le 5\pi$

$x \le 2\pi.$

$= 90° - \alpha - \angle FEB$

$= 180° - 2\alpha - 2\angle FEB$

$= \alpha + \angle FEB$




$CD = \sqrt{3}x$

$CB = 2x$

$AC = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}\ x$

$\sin\alpha = \frac{1}{2} \quad \alpha = 30°$

$QB = R \qquad \angle QBO = 90° - \alpha$

$\angle BQO = 45° + \frac{\alpha}{2} = \angle BOQ$

$FK = 2R\cos\beta$

$CF \cdot (CF + 2R\cos\beta) = 4x^2$

$\angle EOB = 90° + \beta - \alpha$

$x = -2{,}5\pi \quad \cos = 0$

$-x - 2\pi = \frac{\pi}{2} \quad \cos = 0$

1) $x \in [-3\pi; -2\pi]$

$\arccos(\cos x) = \cancel{x+4\pi}\ -x-2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$CH = \frac{4\sqrt{11}}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

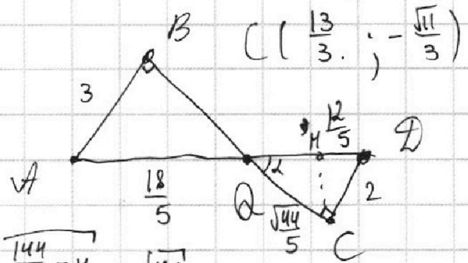
$a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab : 2^9 \, 3^{10} \, 5^{10}$

$bc : 2^{14} \, 3^{13} \, 5^{13}$

$ac : 2^{19} \, 3^{18} \, 5^{30}$

$C\left(\frac{13}{3}; -\frac{\sqrt{11}}{3}\right)$




$CQ = \sqrt{\frac{144}{25} - 4} = \frac{\sqrt{44}}{5}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$

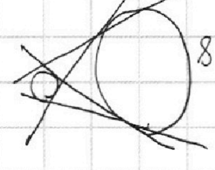
$\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3$

$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 \geq 9 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 19 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} 2\alpha_1 \geq 14 \\ 2\beta_1 \geq 4 \\ 2\gamma_1 \geq 24 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 \geq 7 \\ \beta_1 \geq 2 \\ \gamma_1 \geq 12 \end{array}\right.$

$\alpha_1 = 7 \quad \beta_1 = 2 \quad \gamma_1 = 12 \quad \Sigma = 21$

$tg\,\alpha = \frac{10}{\sqrt{44}}$



8 ; 2 ; 11

$A_1 = -\frac{10}{\sqrt{44}} = -\frac{5}{\sqrt{11}}$

$A_2 = \frac{10}{\sqrt{44}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$

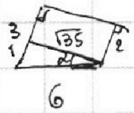
$\left\{\begin{array}{l} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 18 \end{array}\right.$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{41}{2} \qquad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 21 \qquad \Sigma = 21$

$tg\,\alpha = \frac{CH}{QH}$

$QH = \frac{CH}{tg\,\alpha} = \frac{\sqrt{11}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{11}}{10} = \frac{11}{15}$.

$\alpha_3 + \beta_3 \geq 10$




$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \frac{53}{2}$

$\beta_3 + \gamma_3 \geq 13$

$\alpha_3 + \gamma_3 \geq 30$

$tg\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{35}}$

$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \alpha_3 + \gamma_3 \geq 30$

$AH = \frac{54+11}{15} = \frac{65}{15} = \frac{13}{3}$

$676 = 26^2$

$\alpha_3 = 15$

$\beta_3 = 15$.

$\Sigma = 30$

$y =$

$2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$y = -\frac{5}{\sqrt{11}} x + \frac{13}{}$

$y = -\frac{5}{\sqrt{11}} x + b$

$y = -\frac{5}{\sqrt{11}} x + \frac{18}{\sqrt{11}}$

$-\frac{\sqrt{11}}{3} = -\frac{5}{\sqrt{11}} \cdot \frac{13}{3} + b$

$b = \frac{65}{\sqrt{11} \cdot 3} - \frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{54}{\sqrt{11} \cdot 3} = \frac{18}{\sqrt{11}}$

$x^2 + \frac{25}{11}x^2 + \frac{18^2}{11} - \frac{180}{11}x - 9 =$

$= \frac{36}{11}x^2 - \frac{180}{11}x + \frac{9 \cdot 36 - 9 \cdot 11}{11} =$

$= 36x^2 - 180x + 225$

$\frac{D}{4} = 90^2 - 36 \cdot 225 =$

$= 5^2 \cdot 2^2 \cdot 9^2 - 2^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2 = 0$

$(x-6)^2 + \frac{25}{11}x^2 + \frac{18^2}{11} - \frac{180}{11}x - 4 =$

$= x^2 - 12x + 36 + \frac{25}{11}x^2 + \frac{18^2}{11} - \frac{180}{11}x - 4$

$36x^2 - 12\cdot 26x + 36 \cdot 26^2 - 36 \cdot 26^2 = 0$

$676$

$\sqrt{11} \vee \frac{55}{18}$

$18\sqrt{11} \vee 55$

$32 \cdot 11 = 352$

$132$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

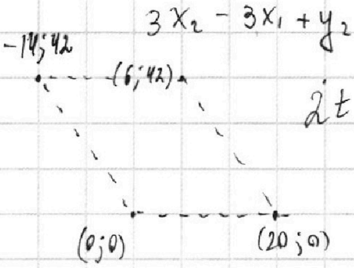
$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\log_3 x} - 8$ $\qquad \log_3 x = t.$

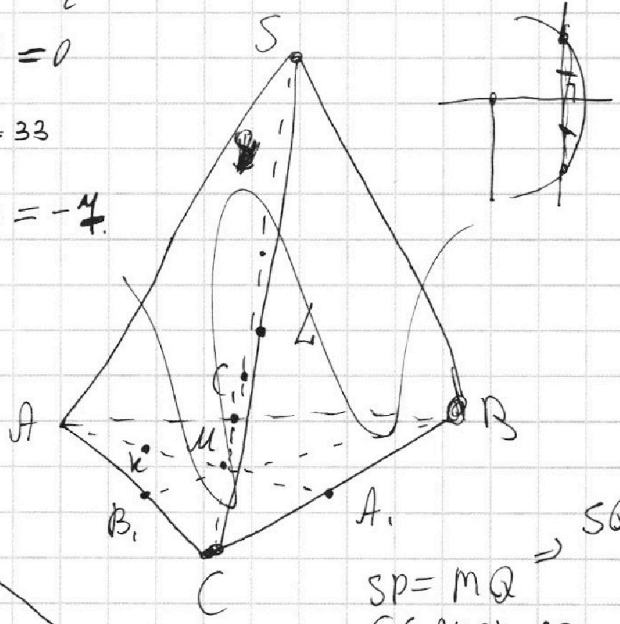
~~2t0~~ $2t^4 + \frac{12}{t} = \frac{5}{t} - 16 \qquad t \neq 0$

$2t^5 + 16t + 7 = 0$

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$



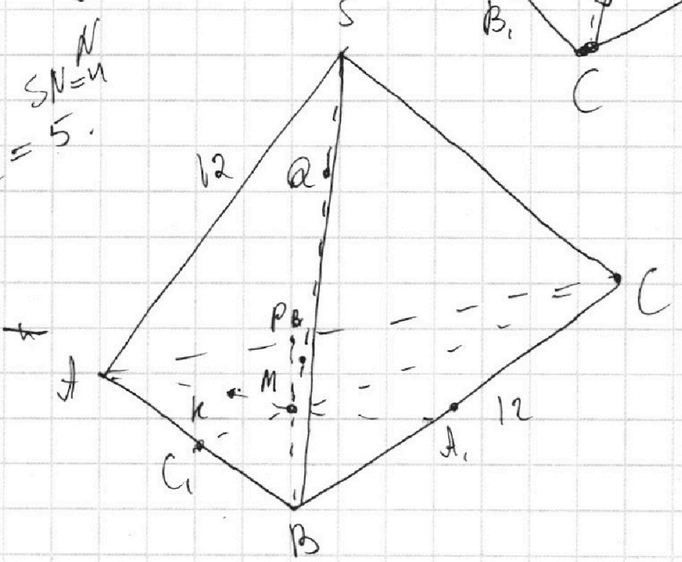

$2t(t^4+8) = -7.$




Ω кас BSC.

N
SN=4

R = 5.




$\Rightarrow SQ = MP$

$SP = MQ$

$S(\Delta ABC) = 90$

$SA = BC = 12$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$ — ?

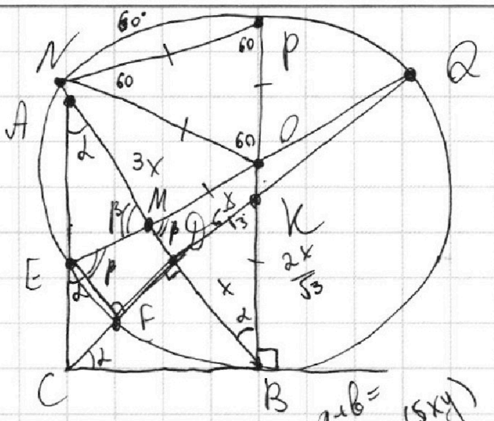
$0 \le y \le 20$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

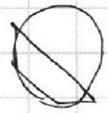
МФТИ




$BC = 2x$

$AC = 2\sqrt{3}x.$

$\alpha = 30^\circ$



$\frac{PN}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2R \quad PN = R$

$a+b = \log_3(5xy)$

$FD = 2R\sin\beta$

$CE = 2\sqrt{3}x - 2R\sin\beta + 1$

$\angle AEM = 180^\circ - \beta - \alpha =$

$= 120^\circ - \beta.$

$\sin\angle AEM = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \beta\right) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\beta - \sin\beta\cos\frac{2\pi}{3} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\sin\beta$

$\frac{AE}{\sin\beta} = 2ME \quad ME = \frac{AE}{2\sin\beta}$

$2MO = \frac{R}{\sin\beta} \quad MO = \frac{R}{2\sin\beta}$

$MO = R - ME = R - \frac{AE}{2\sin\beta} = \frac{R}{2\sin\beta}$

$AE = 2R\sin\beta - R =$

$= R(2\sin\beta - 1).$

$\frac{AE}{\sin\beta} = \frac{6x}{\sqrt{3}\cos\beta + \sin\beta}$

$AE = \frac{6x\sin\beta}{\sqrt{3}\cos\beta + \sin\beta} = R(2\sin\beta - 1)$

$R = \frac{6x\sin\beta}{(2\sin\beta - 1)(\sqrt{3}\cos\beta + \sin\beta)} =$

$= \frac{6x\sin\beta}{2\sqrt{3}\cos\beta\sin\beta + 2\sin^2\beta - \sqrt{3}\cos\beta - \sin\beta}$

$CE = 2\sqrt{3}x -$

$CE = 2\sqrt{3}x - \frac{12x\sin^2\beta}{(2\sin\beta - 1)(\sqrt{3}\cos\beta + \sin\beta)} + 1.$

$CF(CF + 2R\sin\beta) = 4x^2$

$CF^2 + 2R\sin\beta\, CF - 4x^2 = 0$

$\frac{D}{4} = R^2\sin^2\beta + 4x^2$

$CF = -R\sin\beta \pm \sqrt{R^2\sin^2\beta + 4x^2}$

$2a^5b - 2b^5a + 7b + 7a = 0$

$2ab(a^4 - b^4) + 7(a+b) = 0$

$2ab(a^2+b^2)(a-b)(a+b) + 7(a+b) = 0$

$(a+b)\left(2ab(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) + 7\right) = 0$

$(a+b)(2a^4b - 2a^3b^2 + 2a^2b^3 - 2ab^4 + 7) = 0$

$a = \log_3 x \quad b = \log_3 5y$

$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{a} - 8$

$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2}\,\frac{1}{b} - 8$

$a^4 - b^4 + \frac{6}{a} - \frac{2}{b} = \frac{5}{2a} - \frac{11}{2b}.$

$a^5b - b^5a + 6b - 2a = \frac{5}{2}b - \frac{11}{2}a \quad |\cdot 2$

$2a^5b - 2b^5a + 12b - 4a = 5b - 11a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

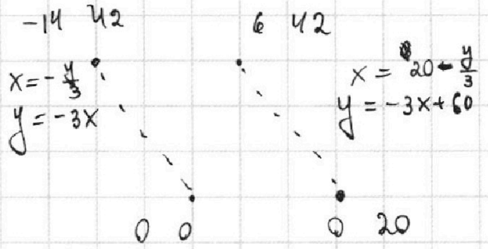
МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$0 \le y_1 ; y_2 \le 20$




$y = kx + b$ $\begin{cases} 42 = -14k + b \\ b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k = -3 \end{cases}$

$y = -3x$

$y = -3x + 60$

$x$

$y = -3x + b$

$42 = -18 + b$

$b = 60.$

$0 \le y_1, y_2 \le 20$

$-\frac{y_1}{3} \le x_1 \le 20 - \frac{y_1}{3}$

$-\frac{y_2}{3} \le x_2 \le 20 - \frac{y_2}{3}$

$\frac{y_1}{3} - 20 \le -x_1 \le \frac{y_1}{3}$

$y_1 - 60 \le -3x_1 \le y_1$

$-y_2 \le 3x_2 \le 60 - y_2$

$-60 - y_2 + y_1 \le 3x_2 - 3x_1 \le 60 - y_2 + y_1$

$-60 \le 3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 \le 60$

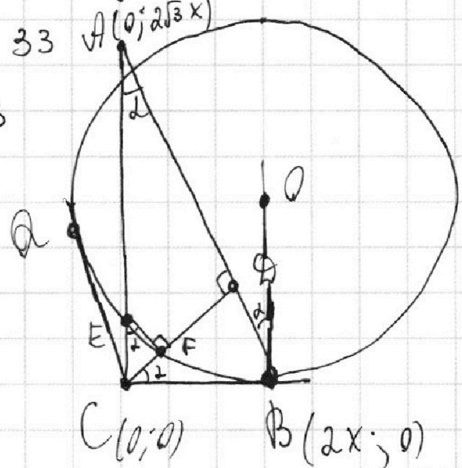
$\overrightarrow{\{x_1 ; y_1\}}$ $\overrightarrow{\{x_2 ; y_2\}}$

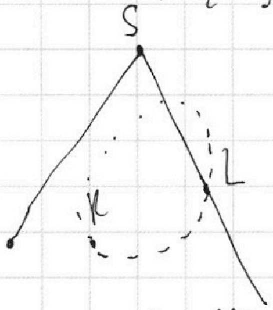
$-\vec{a} = \{-3 ; -1\}$ $\vec{a} = \{3 ; 1\}$

$-\vec{a}\,\overrightarrow{\{x_1 ; y_1\}} + \vec{a}\,\overrightarrow{\{x_2 ; y_2\}} = 33$

$\vec{a}\,\overrightarrow{\{(x_2 - x_1) ; (y_2 - y_1)\}} = 33$

$\cancel{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$




$C\Phi = \frac{1}{2} AC$

$K\Phi = \frac{1}{2} KB$ $\quad KB = \frac{BC}{\cos 30^\circ} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$ $\quad K\Phi = \frac{x}{\sqrt{3}}$

$\frac{3x - M\Phi}{x + M\Phi} = \frac{EM}{M\Phi} = \frac{AE}{R}$

$A(0 ; 2\sqrt{3}x)$ $\quad B(2 ; 0x)$ $\quad \overrightarrow{AB} = \{2 ; 2\sqrt{3}\}$

$E = \{0 ; y_1\}$ $\quad F = \{x_2 ; y_2\}$ $\quad \overrightarrow{EF} = \{x_2 - x_1 ; y_2 - y_1\}$

$\frac{x_2}{\cancel{2}} = \frac{y_2 - y_1}{\cancel{2}\sqrt{3}}$ $\quad (1)\ \sqrt{3}x_2 = y_2 - y_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$O(2x;\ y_3)$

$$\begin{cases} \sqrt{3}x_2 = y_2 - y_1 \\ y_3^2 = 4x^2 + (y_3 - y_1)^2 \\ y_3^2 = (2x - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{3}x_2 = y_2 - y_1 \\ \cancel{y_3^2} = 4x^2 + \cancel{y_3^2} - 2y_3y_1 + y_1^2 \\ \cancel{y_3^2} = 4x^2 - 4xx_2 + x_2^2 + \cancel{y_3^2} - 2y_2y_3 + y_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{3}} \\ y_1^2 - 2y_3y_1 + 4x = 0 \\ y_2^2 - 2y_2y_3 + \frac{(y_2 - y_1)^2}{3} - 4x\frac{y_2 - y_1}{\sqrt{3}} + 4x^2 \end{cases}$$

$O(2x;y_3)$

$(x - 2x)^2 + (y - y_3)^2 = y_3^2$

$y = 0$

$D$