



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Дано: $a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab: 2^6 3^{13} 5^{11}$, $bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}$, $ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

Найти: $abc = ?$, если abc - наименьшее возможное

Решение. Числа abc были наименьшими, в разложении на простые множители

числа a, b и c могут быть только 2, 3 и 5; если будет еще

простой множитель, отличный от 2, 3, 5, то произведение abc станет

большим, чем если бы он не было, и при этом этот простой множитель не будет

входить на одинаково. Следовательно, и нужно рассмотреть числа a, b и c

также, что $a = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3}$, $b = 2^{\beta_1}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$

из условия следует, что (1) $\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 6 \\ d_1 + \gamma_1 \geq 16 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} d_2 + \beta_2 \geq 13 \\ d_2 + \gamma_2 \geq 25 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \end{cases}$, (3) $\begin{cases} d_3 + \beta_3 \geq 11 \\ d_3 + \gamma_3 \geq 28 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases}$

1. Из (1) следует, что $2(d_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 36 \Rightarrow d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$, при этом равенство может

выполняться (например, $d_1 = 4, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 12$; равенство выполняется, когда все неравенства

в системе (1) становятся равенствами) \Rightarrow минимально возможное $d_1 + \beta_1 + \gamma_1$ равно 18

2. Из (2) следует, что $2(d_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 59$. В этом случае равенство не может выпол-

няться, так 59 не делится на $2 \Rightarrow d_2 + \beta_2 + \gamma_2$ - не натуральное; проверим можем ли

выполняться равенство $2(d_2 + \beta_2 + \gamma_2) = 60 \Rightarrow d_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 30$. Это равенство

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1 (продолжение)

может выполняться (при $d_2=8, \beta_2=5, \gamma_2=17$, например, данные значения не противоречат неравенствам в системе) \Rightarrow минимально возможное $d_2+\beta_2+\gamma_2$

равно 30

3. из (3) следует, что $2(d_3+\beta_3+\gamma_3) \geq 52 \Rightarrow d_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 26$. равенство

не может выполняться, т.к. в этом случае $\beta_3 = -2$ (чтобы не было противоречий с

системой (3)). равенство $d_3+\beta_3+\gamma_3 = 27$ также не может выполняться, т.к.

в этом случае если из чисел d_3, β_3, γ_3 будет отрицательным (в этом случае

равенство противоречит исходной системе). равенство $d_3+\beta_3+\gamma_3 = 28$ может

выполняться (например, при $\beta_3=0, d_3=13, \gamma_3=15$) \Rightarrow минимально возможное

$d_3+\beta_3+\gamma_3$ равно 28

$abc = 2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow$ минимально возможное значение

произведения: $abc = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Ответ: $2 \cdot 3 \cdot 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

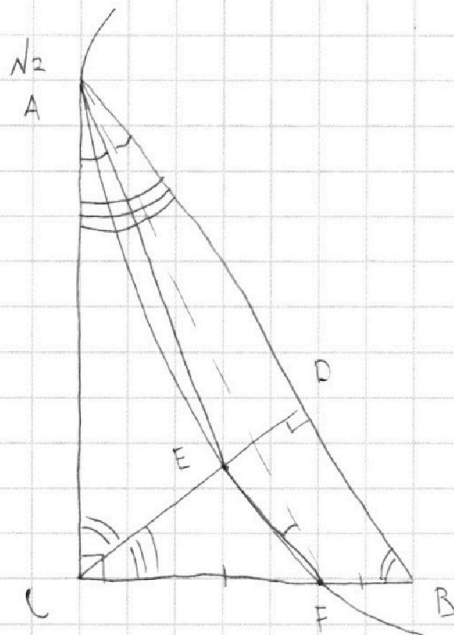
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $AB \parallel EF$; $AB:BD = 1,4 = \frac{7}{5}$

A - точка касания с окружностью

Найти: $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$

Решение. ~~$\triangle CAE$ и $\triangle AF$~~

т.к. CD - высота прямоугольного $\triangle ABC \Rightarrow$

$\angle ABC = \angle ACD$; $\angle CAB = \angle BCD = \alpha$, $\angle CAE = \angle EFA$ (углы между

касательной и хордой равны вписанному углу, опирающемуся на $\sphericalangle AEF$), $\angle EFA = \angle BAF$

\sphericalangle (как прилетел касательная при $AB \parallel EF$)

$\triangle ABF \sim \triangle ACE$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{FB}$; $\frac{AC}{AB} = \cos \alpha \Rightarrow$

$$\frac{CE}{FB} = \cos \alpha$$

* $\triangle CEF$: $\angle BCD = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{CE}{CF}$ ($\triangle CEF$ - прямоугольный, т.к. $AB \parallel EF \Rightarrow$)

$\angle CEF = \angle CPB = 90^\circ \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \cos \alpha = \frac{CE}{FB} \Rightarrow CF = FB \Rightarrow EF$ - средняя линия

$$\triangle BPC \Rightarrow EF = \frac{1}{2} BD$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5} \Rightarrow BD = \frac{5}{7} AD \Rightarrow EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} AD = \frac{5}{14} AD \quad \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$$

$\triangle ACD \sim \triangle CEF$ (по двум углам. $\angle CEF = \angle CDA = 90^\circ$; $\angle ECF = \angle CAD$) \Rightarrow

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CD}{EF} \right)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AD}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow AD = \frac{2}{5} BD ; \quad CD^2 = AD \cdot DB \Rightarrow CD^2 = \frac{2}{5} BD^2 \Rightarrow CD = \sqrt{\frac{2}{5}} BD \Rightarrow$$

$$\frac{CD}{DB} = \sqrt{\frac{2}{5}} ; \quad EF = \frac{1}{2} BD \Rightarrow \frac{CD}{2EF} = \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow \frac{CD}{EF} = 2\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CD}{EF} \right)^2 = \left(2\sqrt{\frac{2}{5}} \right)^2 = 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

Ответ: $\frac{8}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10} \Rightarrow \sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$0 \leq 10 \arccos(\sin x) \leq 10\pi \Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi \Rightarrow -9\pi \leq -2x \leq \pi \Rightarrow \frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = 0, \text{ где } \alpha = \left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{9\pi}{10} + \frac{2x}{10}\right) \cdot 2 = -\frac{\pi + 2x}{5}, \beta =$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{9\pi}{10} - \frac{2x}{10}\right) \cdot 2 = \frac{7\pi}{10} - \frac{3x}{5}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi + 2x}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{7\pi}{10} - \frac{3x}{5} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi - 2x = 5\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 7\pi - 6x = 10\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{7\pi}{6} - \frac{5}{3} \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Проверим граничные

$$1) -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} k \leq \frac{9\pi}{2} \Rightarrow -\pi \leq -\pi - 5\pi k \leq 9\pi \Rightarrow 0 \leq -5\pi k \leq 10\pi \Rightarrow$$

$$0 \geq k \geq -2 \Rightarrow k = 0, -1, -2 \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} = 2\pi$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{2} + 5\pi = \frac{9\pi}{2}$$

$$2) -\frac{\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} - \frac{5}{3} \pi n \leq \frac{9\pi}{2} \Rightarrow -3\pi \leq 7\pi - 10\pi n \leq 27\pi \Rightarrow -10\pi \leq -10\pi n \leq 20\pi$$

$$\Rightarrow 1 \geq n \geq -2 \Rightarrow n = 1, 0, -1, -2 \Rightarrow x_4 = \frac{7\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2};$$

$$x_5 = \frac{7\pi}{6}, x_6 = \frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}; x_7 = \frac{7\pi}{6} + \frac{20\pi}{6} = \frac{27\pi}{6}$$

~~Ответ $-\frac{\pi}{2}$~~ или ~~этих $-1 < x < 1 \Rightarrow$ не подходят~~ Ответ: $-\frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{9\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{27\pi}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

$$(1) \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \quad \text{и} \quad (2) \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5$$

$$1) \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5 \Rightarrow \log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\text{Пусть } \log_{11} x = \frac{t}{11} \Rightarrow 11^{\frac{t}{11}} = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{11} - 5 \Rightarrow t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$2) \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5 \Rightarrow \log_{11}^4 (0,5y) = -\frac{16}{3} \log_{0,5} 11 - 5$$

$$\text{Пусть } \log_{11} (0,5y) = \frac{v}{11} \Rightarrow v^5 = -\frac{16}{3} \cdot \frac{1}{11} - 5 \Rightarrow v^5 + 5v + \frac{16}{3} = 0$$

$$\text{Тогда } v + t = \log_{11} x + \log_{11} (0,5y) = \log_{11} \left(\frac{1}{2} xy \right)$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$v^5 + 5v + \frac{16}{3} = 0$$

$$\Rightarrow t^5 + v^5 + 5(t+v) = 0$$

$$\text{Пусть } t+v=a, \quad tv=b$$

$$t^5 + v^5 = (t+v)^5 - 5tv(t+v)(t^2 - 2tv + v^2) + 10t^2v^2(t+v)$$

$$\text{Т.е. } t^5 + v^5 + 5(t+v) = 0 \Leftrightarrow a^5 - 5b \cdot a(a^2 - 2b) + 10b^2a + 5a = 0$$

$$\text{следовательно либо } a=0 \Rightarrow \log_{11} \left(\frac{1}{2} xy \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} xy = 1 \Rightarrow xy = 2$$

$$\text{либо } a^4 - 5b \cdot a^2 + 10b^2 + 5 = 0 \Rightarrow a^4 - 5a^2b + 20b^2 + 5 = 0$$

$$\text{Решим это уравнение относительно } b: 20b^2 - 5a^2b + a^4 + 5 = 0$$

$$D = (5a^2)^2 - 20 \cdot 4(a^4 + 5) = 25a^4 - 80a^4 - 400 = -55a^4 - 400 < 0 \Rightarrow$$

у данного уравнения нет решений.

$$\text{Ответ: } xy = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{7}$

Решение:

$\frac{3}{4} S_{\triangle ABC} = S_1$, где S_1 - площадь треугольника, составленного из средних

$\frac{3}{4} \cdot 180 = S_1 = \frac{abc}{4R} = m_1 m_2 m_3$, m_1, m_2, m_3 - длины средних $AA_1, BB_1,$

CC_1

↓

$$3 \cdot 180 R = m_1 m_2 m_3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

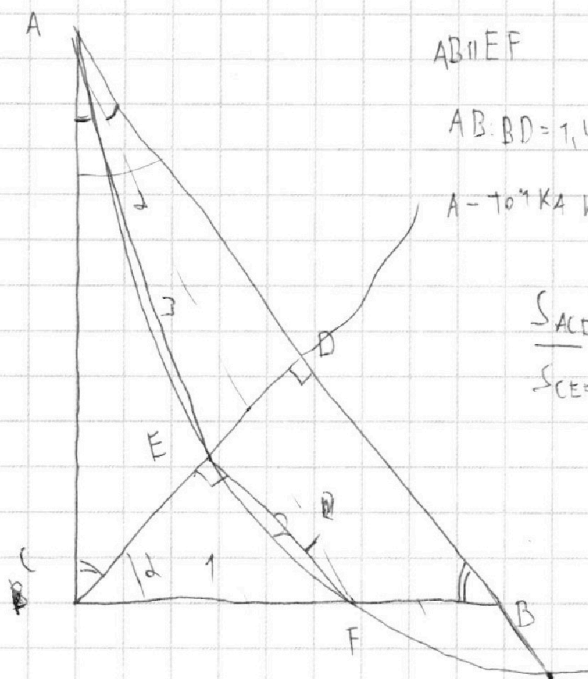
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МОФИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

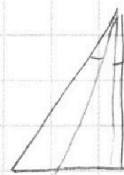


$AB \parallel EF$

$AB:BD = 1,4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$ $\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$ $5AB = 7BD$

A-Точка касания

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEB}} = 7$ $\left(\frac{CE}{CD}\right)^2 = \frac{S_1}{S_2}$



$\frac{S_2}{S_3} = \frac{BD^2}{AD^2}$

$t^5 + v^5 + 5(t+v) = 0$

$\frac{DE}{DC} =$

$CD^2 = AD \cdot DB$

$5AB = 7BD$

$x^2 > 0 \quad x \neq 1$

$\frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$

$t^5 - \frac{16}{3} + 5t = 0$

$\sqrt{5}$

$5(AD+BD) = 7BD$

$t^4 = \frac{16}{3}t - 5$

$v^5 + \frac{16}{3} + 5v = 0$

$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5$

$5AD = 7BD - 5BD = 2BD$

$v = -\frac{16}{3}v - 5$

$AD = \frac{2}{5}BD$

$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} 11^{-2} - 5 = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$

$CD^2 = AD \cdot BD = \frac{2}{5}BD^2$

$6 \log_x 11 - \frac{2}{3} \log_x 11 = \frac{18-2}{3} \log_x 11 = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$

$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$

$v \quad CD = \sqrt{\frac{2}{5}} BD$

$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad \log_{11}^5 x = \frac{16}{3} - 5 \log_{11} x$

$(0,5y)^3$

$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$

$\log_{11} x + \log_{11} (0,5y)$

$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5$

$3t^5 + 15t - 16 = 0$

$= \log_{11} (0,5 \cdot \frac{1}{2} x y)$

$t + v^4 + \frac{1}{v} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{v} - 5$

$v^4 = \left(-1 - \frac{13}{3}\right) \frac{1}{v} - 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$t^5 + v^5 + 5(v+t) = 0$$

$(t+v)$

$$t^5 + v^5$$

$$t^5$$

$$v+t \neq 0$$

$$\arccos(\sin x) = a$$

$$- \frac{t^5 + v^5}{t^5 + t^4 v} \left| \frac{t+v}{t^4 + v^5} \right.$$

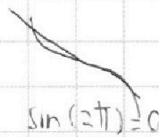
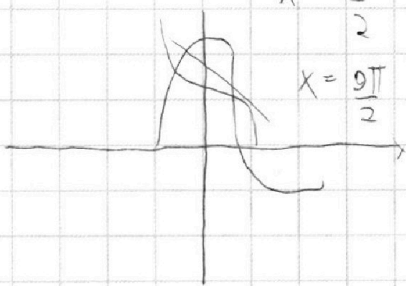
$$- \frac{v^5 + t^4 v}{t^4 + v^5}$$

$$- t^4 v + -t^4 v$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$

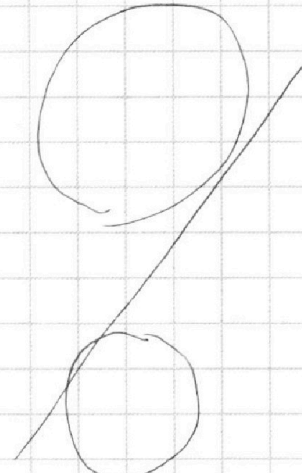


$$\sin(2\pi x) = 0$$

$$2\pi \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{b}{6a} = t$$

$$\frac{5}{6a} = k$$



$$5x + 6ay - b = 0$$

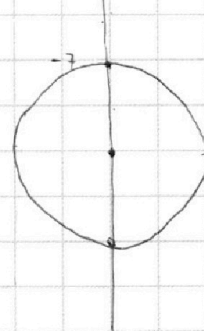
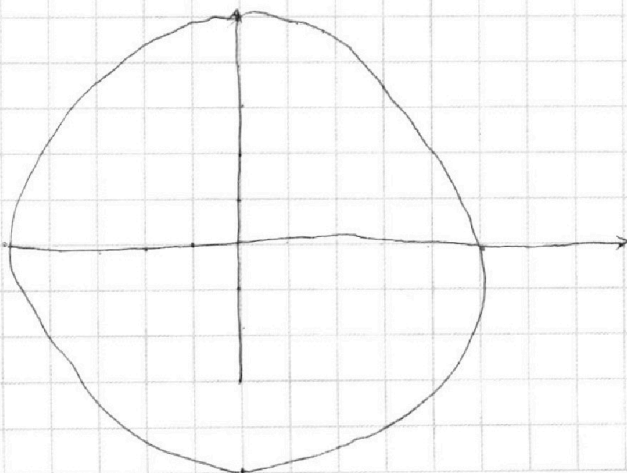
$$y = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x$$

$$y = k \quad y = -kx + t$$

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{— ОКР}$$

$$x^2 + y^2 + 13y + 77 = x^2 + y^2 + 13y + 81 - 4 = 0$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4 \quad \text{— ОКР}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

$$d_1 = 4 \quad \beta_1 = 2 \quad \gamma_1 = 12$$

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$a = 2^{d_1} 3^{d_2} 5^{d_3}$$

$$d_1 + \beta_1 \geq 6$$

$$ab = 2^6 3^{13} 5^{11}$$

$$b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$$

$$d_1 + \gamma_1 \geq 16 \Rightarrow 2(d_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 3c$$

$$bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13}$$

$$c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$$

$$d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$$

$$ac = 2^{16} 3^{25} 5^{28}$$

$$34 \\ 13 + 21 + 25 = 59$$

перемножили числа
вместе

$abc \rightarrow \min \quad abc = ?$

$$8 + 5 \\ d_2 + \beta_2 \geq 13$$

$$8 + 17$$

$$d_2 + \gamma_2 \geq 25 \Rightarrow 2(d_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 59$$

$$11 + 28 + 13 = \\ \underbrace{\quad\quad\quad}_{24}$$

$$d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ 5 \quad 17$$

$$d_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 30 \\ d_2 + \beta_2 = 30 - \gamma_2 \geq 13 \\ 30 \quad 17 \\ \gamma_2 \leq 30 - 13 = 17$$

$$d_3 + 13 - \gamma_3 = 11 \Rightarrow d_3 - \gamma_3 = -2 \quad 30 - 17 - 5 = 8$$

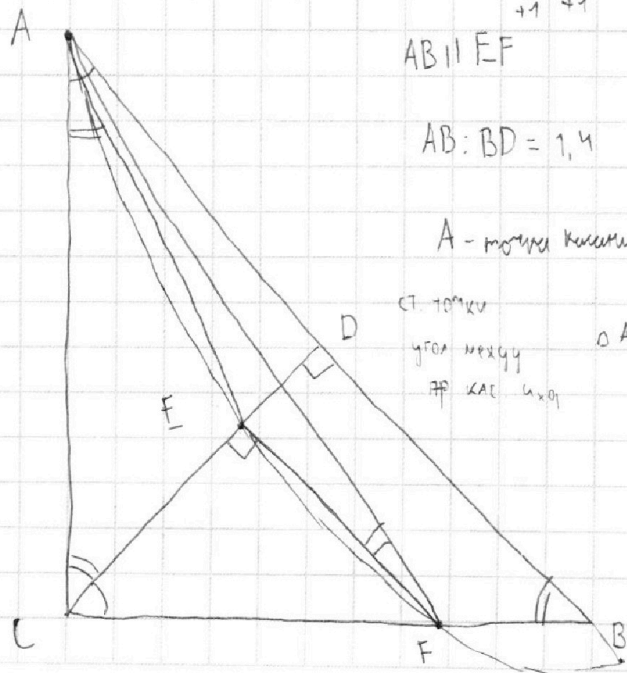
$$d_2 = 8, \quad \beta_2 = 5, \quad \gamma_2 = 17$$

$$d_3 + \beta_3 = 11$$

$$d_3 + \gamma_3 = 23 \quad 2d_3 = 28 - 2 = 26 \Rightarrow d_3 = 13 \quad \gamma_3 = 23 - 13 = 10$$

$$\beta_3 + \gamma_3 = 13 \Rightarrow \beta_3 = 13 - \gamma_3$$

$$\beta_3 = -2 \quad 0, 12, 14 \\ +1 \quad +1$$



$AB \parallel EF$

$$AB : BD = 1,4$$

$$S_{ACD} : S_{CEF} = ?$$

A - точка касания

$$\frac{BD}{AB} = \left(\frac{CD}{AC} \right)^2$$

ст. танген
угол между
пр. кас. хорд

$\triangle ABC \sim \triangle CBP$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BP}{BC} = \frac{CE}{AC}$$

$$BC^2 = AB \cdot BD$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-2x = \pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \arccos d - \text{какая функция?}$$

монот

$$\sin(9\pi) = 0$$

$$0 < \arccos d \leq \pi$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 1$$

$$\arccos(0) = 0$$

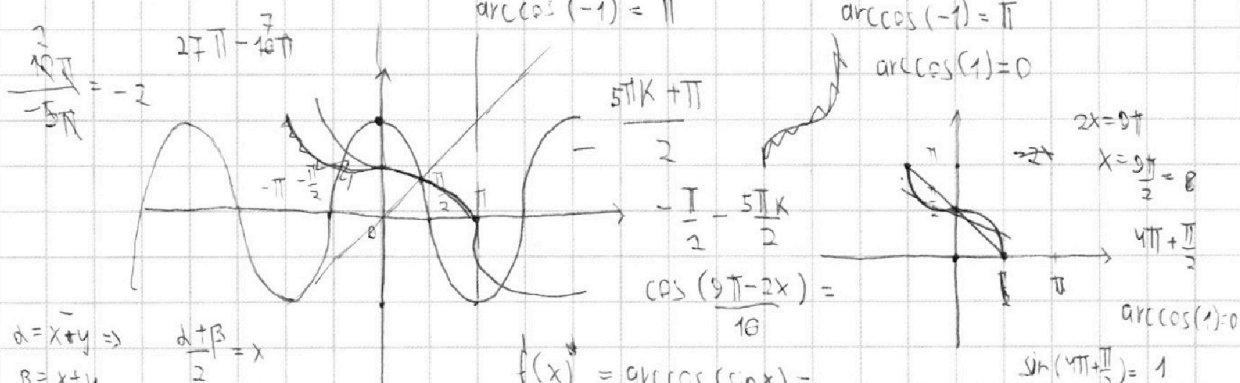
$$\frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq 10 \arccos d \leq 10\pi$$

$$\arccos(-1) = \pi$$

$$\arccos(-1) = \pi$$

$$\arccos(1) = 0$$



$$d = x + y \Rightarrow$$

$$\frac{d + \beta}{2} = x$$

$$\beta = x + y$$

$$\frac{d - \beta}{2} = -y$$

$$\frac{2}{20\pi} = -2$$

$$\sin x (\arccos \sin x)$$

$$(\cos x (\arccos x))'$$

$$= (\cos x)$$

$$\cos(\arccos x)$$

$$\sin(\arccos x)$$

$$\cos d - \cos \beta$$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = -2 \sin x \sin y$$

$$1 - \frac{5}{10} (\arccos x)'$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = -2 \sin x \sin y$$

$$-\frac{1}{\sin(\arccos x)}$$

$$= \frac{1}{\sin(\arccos x)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -2$$

$$-2 \sin x \sin y$$

$$-\frac{1}{|\cos x|} = -2 \Rightarrow$$

$$9\pi - 2 \cdot 2\pi = 5\pi$$

$$1 = 2\sqrt{1-x^2}$$

$$2|\cos x| = 1$$

$$|\cos x| = \frac{1}{2}$$

FB - CF

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \cos x = \sin^2 x$$

$$5\pi - 9\pi = -4\pi$$

$$0 \leq 10 \arccos d \leq 10\pi$$

$$\frac{CE}{FB} = \frac{AC}{AB} = \cos d = \frac{CE}{CF}$$

$$2\pi > 1$$

$$\cos^2 x$$

$$-\frac{4\pi}{10} = -\frac{2\pi}{5}$$

$$\frac{9\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - x - \frac{9\pi}{10} + \frac{x}{5} = -\frac{2\pi}{5} - \frac{4x}{5} \quad | \cdot 2 = \frac{\pi}{5} - \frac{2x}{5}$$

$$\frac{CE}{ED} = \frac{CE}{FB} \Rightarrow$$

$$\frac{5\pi}{10} + \frac{9\pi}{10} = \frac{14\pi}{10} = \frac{7\pi}{5}$$

$$-x - \frac{x}{5} = -\frac{6x}{5}$$

$$\frac{7\pi}{5} - \frac{6x}{5} \quad | \cdot 2 = \frac{7\pi}{5} - \frac{3x}{5}$$

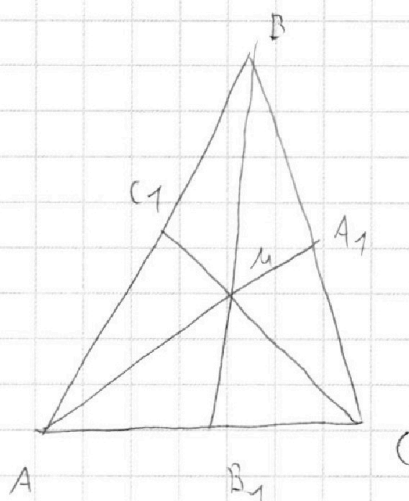
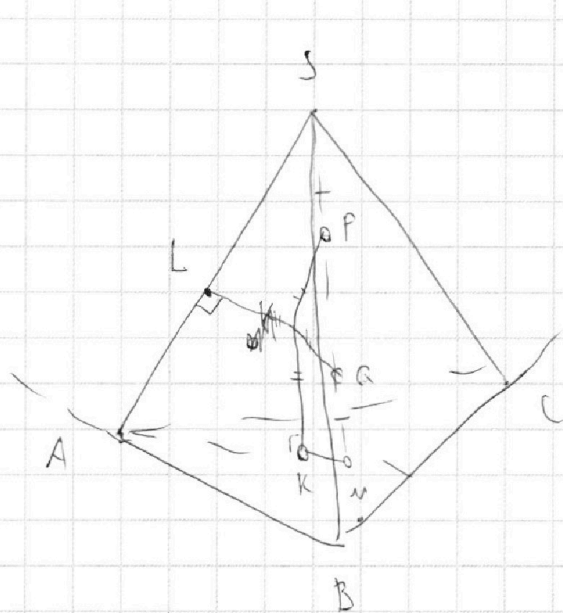
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 180$$

$$SA = BC = 20$$

$$S_{ABC} = \frac{3}{4} S_{\text{медиан}} = \frac{3}{4} \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3}{4R} = \frac{3 m_1 \cdot m_2 \cdot m_3}{16R} \Rightarrow \overset{60}{180} = \frac{3 m_1 \cdot m_2 \cdot m_3}{16R}$$

$$16 \cdot 60 R = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t^5 + v^5 + 5(t+v) = 0$$

$$t^5 + t^4v + 4t^3v^2 + 10t^2v^3 + 10tv^4 + v^5 = (t+v)^5 = t^5 + 5t^4v + 10t^3v^2 + 10t^2v^3 + 5tv^4 + v^5$$

$$t^5 + v^5 = (t+v)^5 - (5t^4v + 10t^3v^2 + 10t^2v^3 + 5tv^4)$$

$$5t^4v + 10t^3v^2 + 10t^2v^3 + 5tv^4 = 5t^3v(t^2 + 2tv + v^2) + 10t^2v^2(t+v)$$

$$t^3 + v^3 = (t+v)(t^2 - tv + v^2) = (t+v)((t+v)^2 - 2tv)$$

$$t^2 + v^2 = (t+v)^2 - 2tv$$

Заменим $t+v = x$ $tv = y$ $x = 0$

$$x^5 - 5y(x^2 - 2y) + 10y^2x + 5x = 0$$

$$x^5 - 5x^3y + 10xy^2 + 10y^2x + 5x = 0 \quad | :x$$

$$x^4 - 5x^2y + 10y^2 + 5 = 0$$

$$20y^2 - 5x^2y + x^4 \quad (x^2)^2 - 5x^2y + 20y^2 = t^2 - 5tv + 4y^2$$

$$D = 25x^4 - 4x^4 = D = 25 - 20^2$$

$$21x^4 \Rightarrow y = \frac{5x^2 - \sqrt{21}x^2}{2}$$

$$D = \frac{25 - 20^2}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

