



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1

$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\Rightarrow (abc)^2: 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \Rightarrow abc: 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

при делении показателей степени на 2 приходится округлять вверх т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$  и степень с ~~натуральным~~ не натуральным показателем быть не может

Погда 21, 21, 27 — минимальные степени, проверим, что их возможно получить

$$x = 2^{m_x} \cdot 3^{n_x} \cdot 5^{k_x} \text{ (введем } m, n \text{ и } k)$$

$$\text{при } m_a = 7, m_b = 2 \text{ и } m_c = 12 \quad \sum_{i=1}^3 m_i = 21, m_a + m_b = 9 \geq 9, m_b + m_c = 14 \geq 14$$

$$\text{и } m_a + m_c = 19 \geq 19$$

также можно подобрать и  $n_a = 8, n_b = 2, n_c = 11$

с  $k$  будут проблемы, т.к.  $\min(k_a + k_b + k_c) = 27$ , а  $k_a + k_c \geq 30$

минимальное  $k_a + k_c = 30$ , надо подобрать их так, чтобы  $k_b = 0$ ,

например  $k_a = k_c = 15$

$$\text{итого } abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

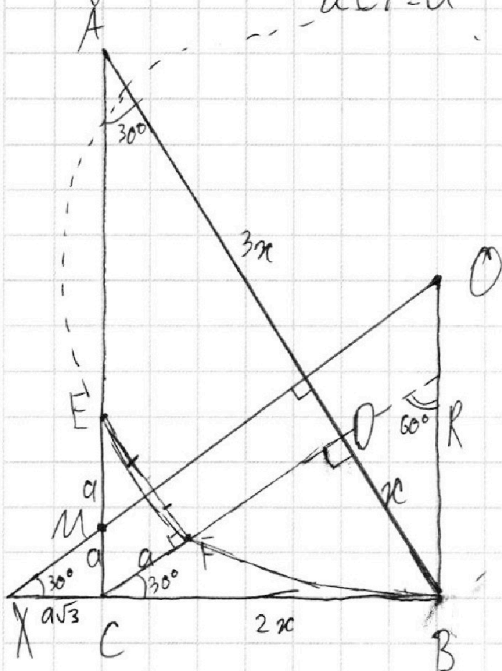
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

пусть  $BD = x$   
&  $CF = a$



в пр.  $\Delta$ -ке  $CD^2 = BD \cdot AD = 3x^2 \Rightarrow CD = \sqrt{3}x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow \angle DCB = 30^\circ = \angle CEF$   
 (ABDEF)

$O$ Х - сев. перпендикуляр к  $EF \Rightarrow O$  - центр окружности  
 , где  $OB \perp BC$ , т.к. окружность кас  $BC$

$CE = 2a$   
 $O$ Х || CF  $\Rightarrow$  М - середина  $CE$ ,  $CM = a \Rightarrow$   
 $\Rightarrow CX = a\sqrt{3}$  ( $\angle OXB = \angle DCB$ )

$$R = \frac{a\sqrt{3} + 2x}{\sqrt{3}} = a + \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$OE^2 = R^2$$

$$OE^2 = (R - CE)^2 + BC^2 \Rightarrow R^2 = R^2 - 4aR + 4a^2 + 4x^2$$

$$4a^2 - 4aR + 4x^2 = 0$$

$$4a^2 - 4a^2 - \frac{8ax}{\sqrt{3}} + 4x^2 = 0$$

$$4x^2 = \frac{8ax}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = x\sqrt{3} \cdot 4x \cdot \frac{1}{2} = 2x^2\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta CFE} = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CFE}} = \frac{4x^2}{a^2} = \left(\frac{2x}{a}\right)^2 = \left(\frac{2x \cdot 2}{x\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3}$$

Ответ:  $16/3$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

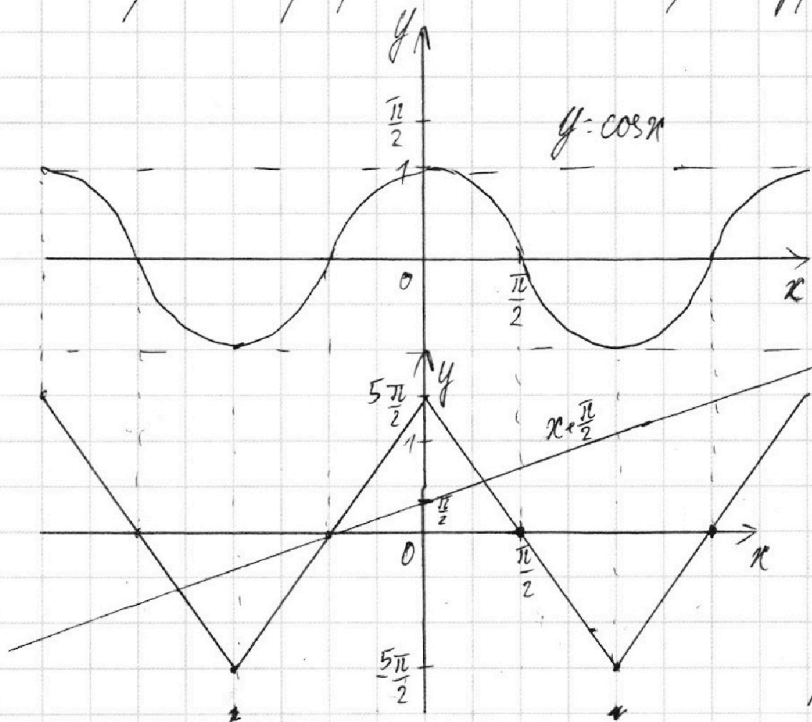
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Построим графики обеих сторон уравнения



графиками

$$y = \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2}))$$

будет множество отрезков от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ , параллельных

$$y = x + \frac{\pi}{2} \text{ и } y = -x + \frac{\pi}{2}$$

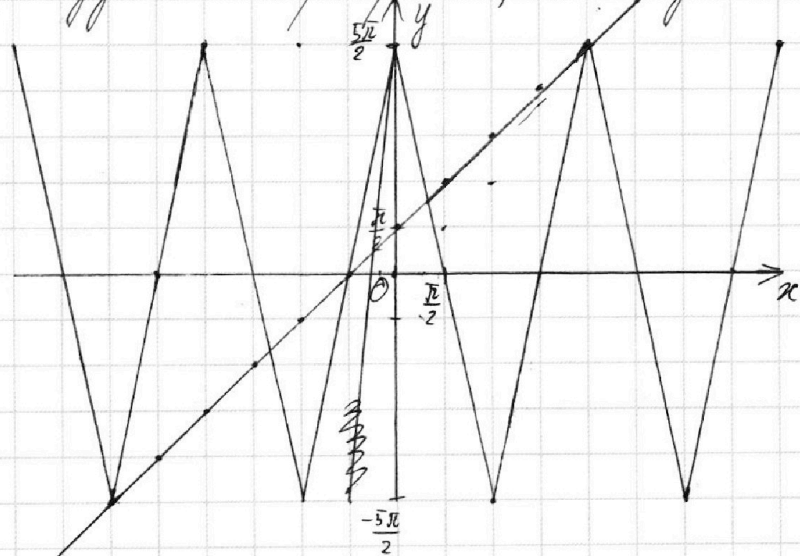
для упрощения задачи

$$\text{и } y = \arcsin(\cos x)$$

построим  $y = \arcsin(\cos x) \cdot 5$ , изменив амплитуду в 5 раз

теперь построим  $x + \frac{\pi}{2}$

для удобства перенершим, чтобы одна клетка по y была  $\frac{\pi}{2}$



Точки  $x = 2\pi, -\frac{\pi}{2}$  и  $-3\pi$  отмечены по графику. Найдем еще две, решив:

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{2} = -5x + \frac{5\pi}{2} \\ x + \frac{\pi}{2} = -5x - \frac{15\pi}{2} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{4\pi}{3} \end{array} \right.$$

Ответ:  $-3\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

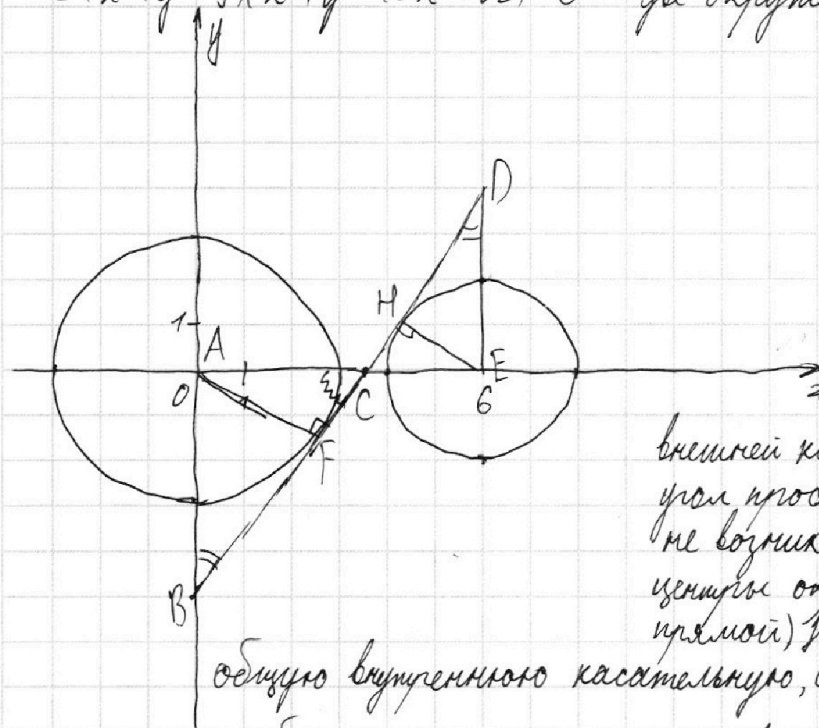
Задача 4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & \text{— множество прямых} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & \text{— две окружности } x^2+y^2=9 \end{cases}$$

и  $(x-6)^2+y^2=4$   
 центр  $(0;0)$ , радиус 3  
 центр  $(6;0)$ , радиус 2

обычно крайние случаи для пересечения прямой и окружности — касательные



При отклонении в общей внешней касательной на некоторый угол проблем с касанием в не возникает (т.е. того, что центры окружностей на горизонтальной прямой). Но если рассмотреть

общую внутреннюю касательную, станет понятно, что при

приближении графика  $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$  к прямой  $x = const$  теряется возможность найти  $b$ . Найдем координаты наклонной такой касательной, у которой  $on = k$

BD — общ. внут. кас.

$$\triangle ABC \sim \triangle EDC \text{ (по двум углам)}, \frac{AF}{EH} = \frac{3}{2} \quad \left| \begin{array}{l} AE = AC + CE \\ AC = 15CE \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} CE = \frac{12}{5} \\ AC = \frac{18}{5} \end{array} \right.$$

$$FC = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \frac{1}{5} \sqrt{18^2 - 15^2} = \frac{1}{5} \sqrt{3 \cdot 33} = \frac{3}{5} \sqrt{11}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle FAC \text{ (по двум углам)} \Rightarrow AB = AF \cdot \frac{AC}{FC} = 3 \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{5}{3 \sqrt{11}} = \frac{18}{\sqrt{11}}$$

$$B(0; -\frac{18}{\sqrt{11}}) \text{ и } C(\frac{18}{5}; 0)$$

$$k = \frac{18}{\sqrt{11}} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

при  $k \in [5/\sqrt{11}; +\infty) \cup (-\infty; -5/\sqrt{11}]$   $b$  не найдется

$$k = -\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}}) \text{ чтобы } b \text{ было}$$

Ответ:  $a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$x > 0; x \neq 1, y > 0; y \neq \frac{1}{5}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8$$

$$f(x) = \log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

$$g(y) = \log_3^4(5y) - 3,5 \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

разница между двумя уравнениями только в лицеве. Устраним его,

заменяя  $5y$  на  $\frac{1}{x}$  без потери ОДЗ, т.к.  $x \neq 0$

$$\text{получим: } g\left(\frac{1}{x}\right) = \log_3^4\left(\frac{1}{x}\right) - 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = \log_3^4(x) + 3,5 \log_x 3 + 8 = 0$$

таким образом,  $f(x)$  функционально равно  $g\left(\frac{1}{x}\right)$  ( $g = f$ ), тогда

каждому решению  $5y_0$  в паре можно поставить  $\frac{1}{x_0}$

~~$x_0 = \frac{1}{t_0} \Rightarrow t_0 = \frac{1}{x_0} \Rightarrow 5y_0 = \frac{1}{t_0} = x_0$ , то есть в  $g(5y)$   $5y$  можно заменить как~~

$$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow 4 \log_x 3 = 0$$

если  $5y_0 = \frac{1}{x_0}$ , то  $y_0 = \frac{1}{5x_0}$  и  $y_0 \cdot x_0 = \frac{1}{5}$

Ответ:  $\frac{1}{5}$



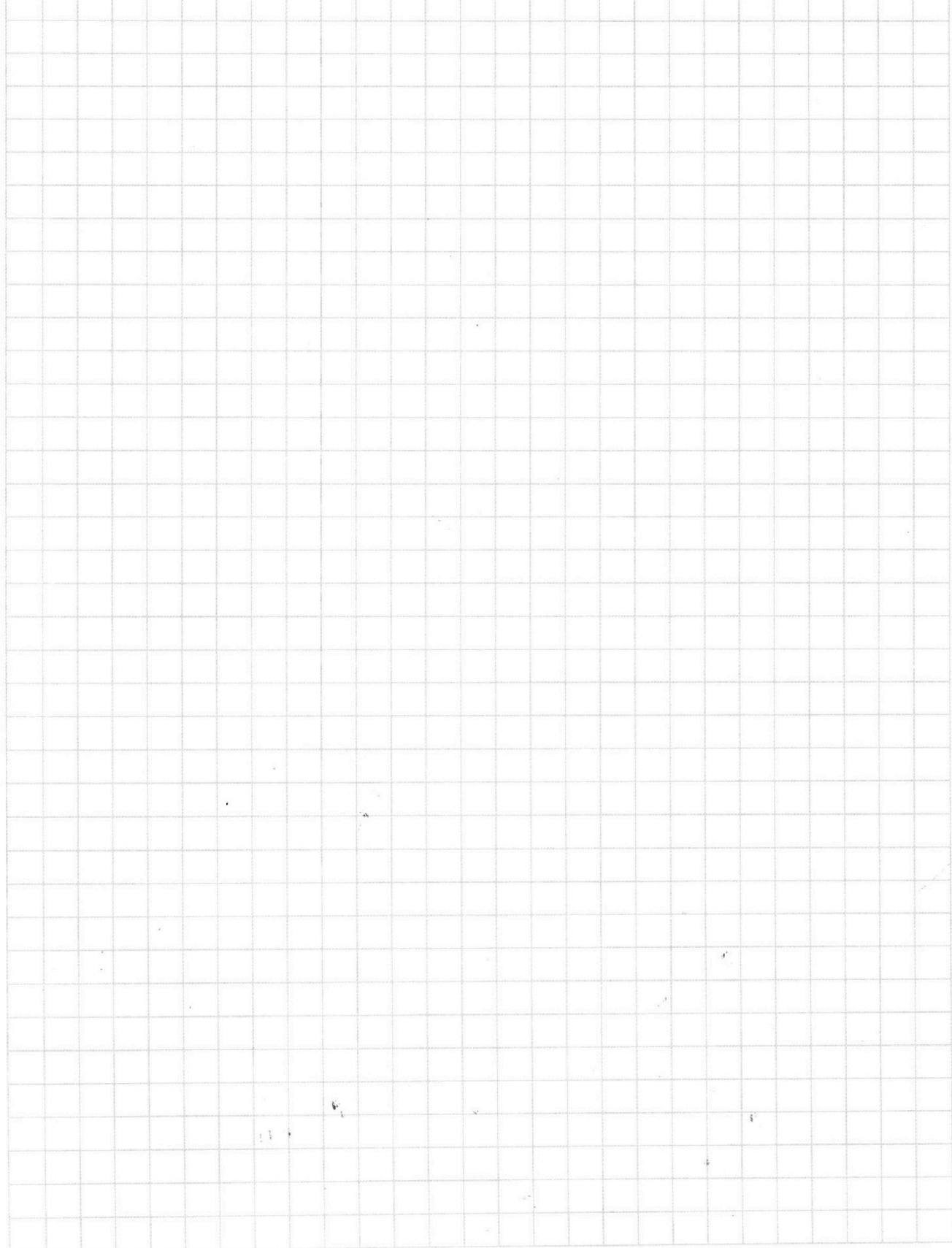
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{27}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

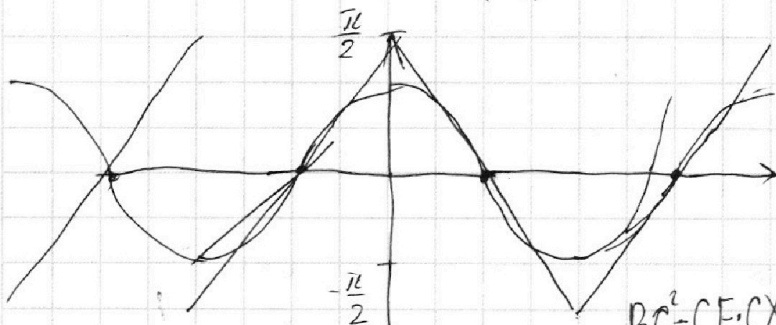
$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = 4 \left( \frac{a}{c} \right)^2$$

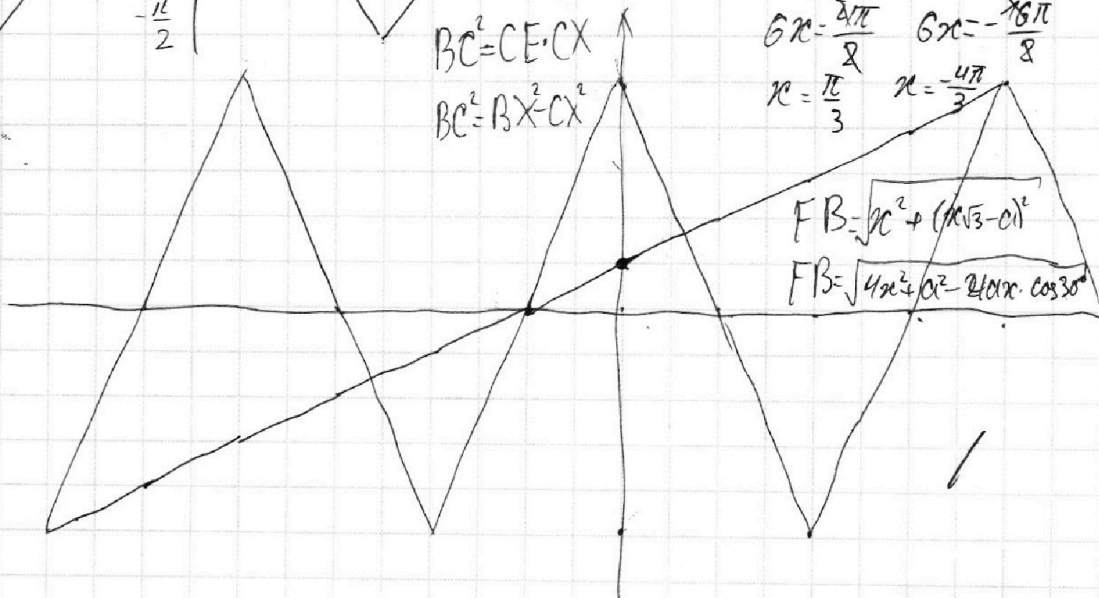
$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$$



$$BC^2 = CE \cdot CX$$

$$BC^2 = BX^2 - CX^2$$



$$CE \cdot CX = BC^2$$

$$CF = a$$

$$EF = a\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta CEF} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$CD = x\sqrt{3}$$

$$BC = 2x$$

$$AC = 2\sqrt{3}x$$

$$S_{\Delta ABC} = 9$$

$$S_{\Delta CEF} = \dots$$

$$6x = \frac{2\sqrt{3}}{2} \quad 6x = -\frac{16\sqrt{3}}{8}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$FB = \sqrt{x^2 + (x\sqrt{3} - a)^2}$$

$$FB = \sqrt{4x^2 + a^2 - 2ax \cos 30^\circ}$$

$$\begin{aligned} a+c &\geq 50 \\ b+c &\geq 13 \\ a+b &\geq 10 \\ 2(a+b+c) &\geq 53 \\ e \in \mathbb{N} \\ a+b+c &\geq 27 \end{aligned}$$



$$BD = x$$

$$CF = a$$

А скажем  
2 ABE диаметр  
30° 1/2 BE

$$CD = x\sqrt{3}$$

$$BC = 2x$$

$$AC = 2\sqrt{3}x$$

$$AD:DB = 3:1$$

$$S_{\Delta ABC} = 9$$

$$S_{\Delta CEF} = \dots$$

$$6x = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$6x = -\frac{16\sqrt{3}}{8}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$FB = \sqrt{x^2 + (x\sqrt{3} - a)^2}$$

$$FB = \sqrt{4x^2 + a^2 - 2ax \cos 30^\circ}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\log_3 x + 6 \log_3 x = \log_3 x^{243} - 8$   
 $\log_3 x^3 + 6 \log_3 x^3 = \frac{5}{2} \log_3 x^3 - 8$   
 $\frac{1}{2} + 6t = 2,5t - 8$   
 $3,5t + 8t = -1$   
 $t = -\frac{1}{11}$

$\log_3^4(5y) + 2 \log_3^4 y = \frac{11}{2}$   
 $\log_3^4(5y) = \frac{1}{2}$   
 $5y = \frac{1}{2}$

$\log_3^4 x + 3,5 \log_3 x^3 + 8 = 0$   
 $\log_3^4(5y) - 3,5 \log_3^4 y + 8 = 0$   
 $\log_3^4(\frac{5}{2}) + 3,5 \log_3^4(\frac{1}{2}) + 8 = 0$   
 $5y = \frac{1}{2}$

$x > 0; y > 1$

$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$

$x^2 + y^2 = 9 \quad (0; 0) R=3$   
 $(x-6)^2 + y^2 = 4 \quad (6; 0) R=2$

$y = \frac{ax - 3b}{2}$

$y = \sqrt{4 - (x-6)^2}$   
 $y = -\sqrt{9 - 3x^2}$

$y' = \frac{1}{2} \frac{(-2x+12)}{\sqrt{-x^2+12x-32}} = \frac{-x+6}{\sqrt{-x^2+12x-32}}$

$y = kx + b$   
 $p(y; y) = 2$

$\frac{12}{5} \text{ и } \frac{18}{5}$   
 $\frac{18}{5}$

$k = \frac{18}{\sqrt{11}} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{\sqrt{11}}$

$BD = \sqrt{\frac{18^2}{5^2} - \frac{15^2}{5^2}} = \frac{1}{5} \sqrt{3 \cdot 33} = \frac{3}{5} \sqrt{11}$

$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{BD}$   
 $AC = \frac{8 \cdot \frac{18}{5}}{\frac{3}{5} \sqrt{11}} = \frac{18}{\sqrt{11}}$

$\log_3^4(5) + 3,5 \log_3^4(\frac{1}{2}) + 8 = 0$   
 $5y = \frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

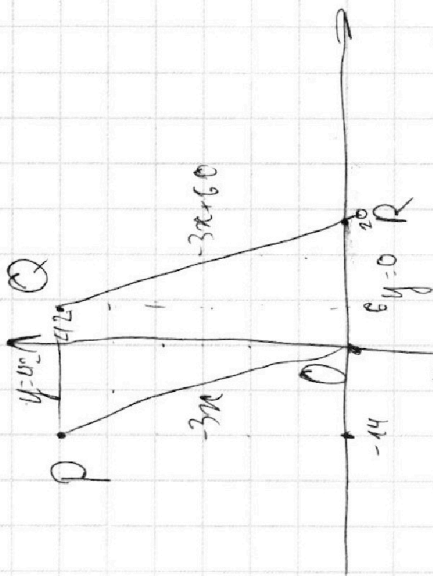
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_2 - 3x_1 - y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) = 33 - (y_2 - y_1)$$

$$x_2 - x_1 = 11 - \frac{(y_2 - y_1)}{3}$$

$$x_2 - x_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

$$20 \rightarrow 6$$

$$\Delta x \in [0; 60], \Delta y \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta y \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{230}{24} > 2 \quad \frac{230}{24} \approx 9.58$$

$$\frac{\alpha + 2x}{\cos 30^\circ} = R = \frac{2\alpha + 4x}{\sqrt{3}}$$

$$4x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

$$x^2 + 3x^2 - 2\sqrt{3}Rx + \alpha^2 = R^2$$

$$4x^2 + \alpha^2 - 2\sqrt{3}Rx = R^2 - \alpha^2$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}R \pm R\sqrt{3+6\sqrt{3}}}{8-2\sqrt{3}}$$

$$\alpha^2(3-2\sqrt{3}) - 4\alpha x\sqrt{3} + 3x^2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 12x^2 - 4x\alpha\sqrt{3} + 6\sqrt{3}x^2 = x^2(3+6\sqrt{3})$$

$$4\alpha^2 + 16\alpha x + 4x^2 = 16x^2 - 16\alpha x(\sqrt{3}-1) + 4\alpha^2(3-2\sqrt{3}) = 0$$

$$12x^2 - 16\alpha x\sqrt{3} + 4\alpha^2(3-2\sqrt{3}) = 0$$

$$4x^2 + y^2 - 2yR = 0$$

$$y^2 - \frac{2\alpha + 8x}{\sqrt{3}}y + 4x^2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = R^2 - 4x^2 = \frac{4\alpha^2 + 16\alpha x + 16x^2 - 4x^2}{3}$$

$$R \pm \sqrt{D/4}$$

$$y = \frac{R \pm \sqrt{D/4}}{1}$$

$$\sqrt{\frac{D}{4}} = \frac{4x - 2\alpha(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{4\alpha^2 + 16\alpha x + 4x^2 - 16\alpha x - 16x^2}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

