



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна  $90$ ,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен  $5$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По условию:  $ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k, k \in \mathbb{N}$   
 $a, b, c$  — натуральные (1)  $bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot m, m \in \mathbb{N}$   
 $ac = 2^{19} \cdot 3^{14} \cdot 5^{30} \cdot n, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \frac{bc}{ab} = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot \frac{m}{k} \\ a \cdot c = 2^{19} \cdot 3^{14} \cdot 5^{30} \cdot n \end{cases} \quad \begin{cases} c^2 = 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33} \cdot \frac{mn}{k} \\ a \cdot c = 2^{19} \cdot 3^{14} \cdot 5^{30} \cdot n \\ b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot m \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{16} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot mn}{k}} \\ n = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{14} \cdot \sqrt{\frac{nk}{3 \cdot 5 \cdot m}} \\ b = \frac{2^2 \cdot 3^3}{5^3} \cdot \sqrt{\frac{mk}{3 \cdot 5 \cdot n}} \end{cases}$$

Т.к.  $a, b$  и  $c$  — натуральные,  $\sqrt{\frac{mk}{3 \cdot 5 \cdot n}} = 5^3 \cdot e, e \in \mathbb{N}$ ,

$$mk = 3 \cdot 5^7 \cdot n \cdot e^2;$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot mn \cdot nk \cdot mk}{3 \cdot 5 \cdot m \cdot k \cdot 3 \cdot 5 \cdot n}} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27} \sqrt{\frac{mnk}{3 \cdot 5}} =$$

$$= 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27} \sqrt{\frac{3 \cdot 5^7 \cdot n \cdot e^2 \cdot n}{3 \cdot 5}} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} n e;$$

Значение  $a \cdot b \cdot c$  — наименьшее, когда  $n = e = 1$ ; В этом случае  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$ ; Приведём пример таких чисел  $a, b$  и  $c$ , при для которых выполняется условие;  $m \cdot k = 3 \cdot 5^7 \cdot 1 \cdot 1$ ; Пусть  $m = 3, k = 5^7$ ;

$$\text{Тогда } a = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{14} \sqrt{\frac{1 \cdot 5^7}{3 \cdot 5 \cdot 3}} = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{17};$$

$$b = \frac{2^2 \cdot 3^3}{5^3} \sqrt{\frac{3 \cdot 5^7}{3 \cdot 5 \cdot 1}} = 2^2 \cdot 3^3; \quad c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{16} \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{5^7}} =$$

$$= 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{13}$$

Эти  $a, b, c$  являются натуральными, для них выполняется система (1); при  $n = 1, m = 3, k = 5^7$  следовательно, наим. знач.  $a \cdot b \cdot c = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

Ответ:  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$ .

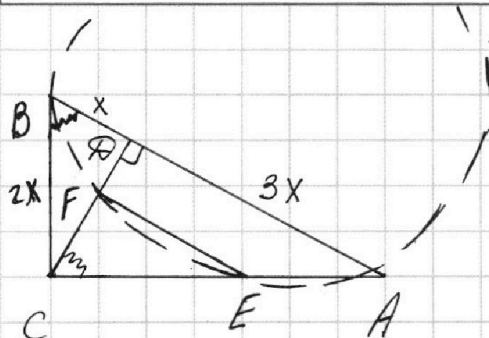
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$  — прямоугольн.;  
 $\angle C = 90^\circ$ ;  $CD$  — высота;  
 $(O; R)$  — о-кр-ть;  
 $(O; R)$  кас-ся  $CB$  в  $B$ ;  
 $(O; R) \cap CD = F$ ;  
 $(O; R) \cap AC = E$ ;  
 $AB \parallel EF$ ;  
 $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{1}$ ;

Найти:  $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = ?$

Решение: 1. Пусть  $BD = x$ ; тогда по усл.  
 $AD = 3x$ ; из  $\triangle ABC$  и  $\triangle ADC$   $\angle ACB = \angle ACD =$   
 $90^\circ$  —  $\angle CAB = \angle CBA$ ;

сл-но,  $\triangle ADC \sim \triangle BDC$  по 2-м углам  
 $(\angle ADC = \angle ACB = 90^\circ)$ ;

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}; \quad CD^2 = BD \cdot AD = 3x \cdot x;$$

$$CD = x\sqrt{3};$$

$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}$ ; Пусть  $BC = y$ ; тогда  
 $AC = y\sqrt{3}$ ; в  $\triangle ABC$  по с. Пифагора  
 $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ;  $(3x+x)^2 = y^2 + (y\sqrt{3})^2$ ;

$$4y^2 = 16x^2; \quad y = 2x;$$

$$BC = y = 2x; \quad AC = y\sqrt{3} = 2x\sqrt{3};$$

в  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $BC = 2x$ ,  $AB = BD + AD = 4x$ ;

сл-но,  $AB = 2BC$ , сл-но,  $\angle BAC = 30^\circ$ ;

$$\angle ABC = 60^\circ$$

2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*н.р.*

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10};$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

4) Если  $x \in \mathbb{R}$   $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$ ;

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = 0;$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

Проверим полученные серии по основному:

~~$$\left[ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 5\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ k = 2n \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} + 5\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ k = (2m+1) \end{array} \right]$$~~

~~$$\left[ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 5\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ k = 2n \\ x = 2\pi + 5\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ k = (2m+1) \end{array} \right] \Leftrightarrow$$~~

~~$$\left[ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 10\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ k = 4m \\ x = -\frac{\pi}{2} + 5\pi + 10\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ k = 2(2m+1) \\ x = 2\pi + 10\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ k = 4m+1 \\ x = 2\pi + 5\pi + 10\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ k = 2(2m+1)+1 \end{array} \right]$$~~

т.к.  $\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  находится в I или IV четвертях;

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-3\pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} - \text{больше } 2\pi - (-3\pi) = 5\pi > 2\pi; \text{ подходит все.}$$

Ответ:  $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ;  $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 4.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0, \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

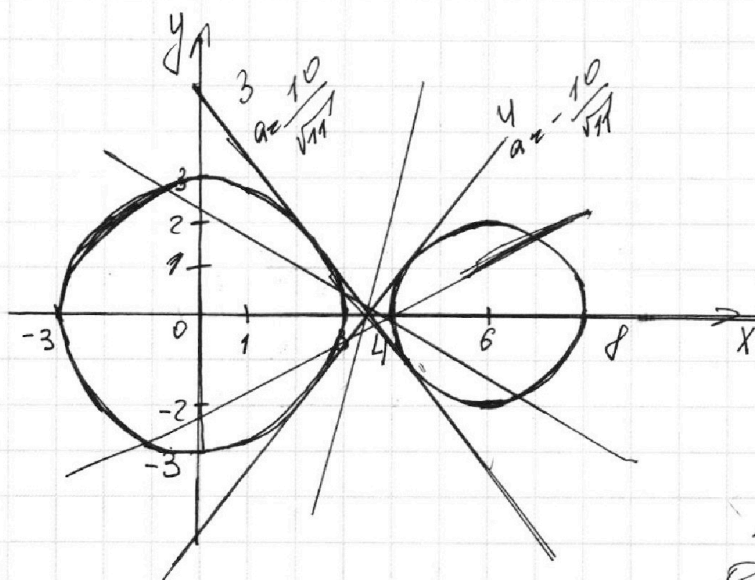
$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ x^2+y^2=9 \\ x^2-12x+y^2=-32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3b-ax}{2} \\ x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases}$$

1.  $x^2+y^2=9$  - окр-ть с центром в  $(0;0)$  и радиусом 3.

2.  $(x-6)^2+y^2=4$  - окр-ть с ц. в  $(6;0)$  и радиусом 2.

3.  $y = \frac{3b-ax}{2}$  - прямая; пересек. с  $Ox$ :  $(0; \frac{3b}{2})$



Найдём знач.  $a$ , при которых прямая эта - касательная к обоим

окр-там. Заметим, что  $a$  окр-я тангенс угла наклона кас. прямой. В окр-е только её положение относительно осей. ~~сл-но~~

~~$$\begin{cases} y = \frac{3b-ax}{2} \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$$~~

~~$$\begin{aligned} 4x^2 + (3b-ax)^2 &= 36; \\ (a^2+4)x^2 - 6abx + 9b^2 - 36 &= 0; \\ \frac{D}{4} = 9a^2b^2 - (9b^2-36)(a^2+4) &= 9a^2b^2 - 9a^2b^2 + 36a^2 - 36b^2 + 36 \cdot 4 = 36(a^2 - b^2 + 4) = 0; \end{aligned}$$~~

~~сл-но,  $b^2 = a^2 + 4$ ;~~

~~$$\begin{cases} y = \frac{3b-ax}{2} \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases}$$~~

~~$$\begin{aligned} 4x^2 - 48x + 36 + 9b^2 - 6abx + a^2x^2 &= 16; \\ x^2(4+a^2) - 2(24+3ab)x + 9b^2 + 20 &= 0; \end{aligned}$$~~

~~$$\frac{D}{4} = (24+3ab)^2 - (a^2+4)(9b^2+20) = 24^2 + 24 \cdot 6ab + 9a^2b^2 -$$~~

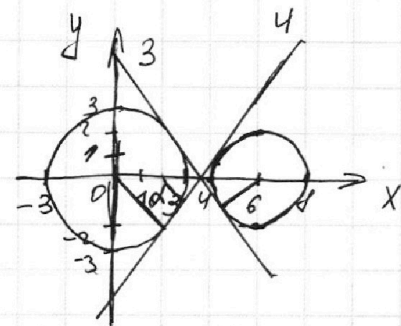
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 4 (продолжение):

Пусть угол между  
одн. касат. и  $Ox$  —  $\alpha$ ; тогда  
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{2}$ ;

Проведем радиусы окр-тей  
в с. касания, получим,  
что

$$\frac{3}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 6; \quad \sin \alpha = \frac{5}{6};$$
$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \pm \frac{\sqrt{11}}{6};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\pm 5}{\pm \sqrt{11}} = -\frac{a}{2};$$

$$\text{Для прямой 3: } -\frac{a}{2} = -\frac{5}{\sqrt{11}}; \quad a = \frac{10}{\sqrt{11}};$$

$$\text{Для прямой 4: } -\frac{a}{2} = \frac{5}{\sqrt{11}}; \quad a = -\frac{10}{\sqrt{11}};$$

Из точки графика видно, что система  
имеет 4 корня, когда (учитывая, что  
прибавить  $a$  всегда найдётся удовлетвор.  
усл-ю  $b$ ), когда:

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \\ -\frac{a}{2} \geq 0 \\ -\frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{11}} \\ -\frac{a}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{10}{\sqrt{11}} \\ a \leq 0 \\ a \geq 0 \\ a < \frac{10}{\sqrt{11}} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

Ответ:  $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 5 (продолжение).

$$\log_3(5y) = m; \text{ сл-но, } 5y = 3^m; y = \frac{3^m}{5};$$

$$\log_3(x) = t; \text{ сл-но, } x = 3^t;$$

$$x \cdot y = \frac{3^t \cdot 3^m}{5} = \frac{3^{t+m}}{5}; \text{ т.к. } m = -t, \text{ то}$$

$$x \cdot y = \frac{3^{t-t}}{5} = \frac{3^0}{5} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_3 X)^4 + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 1$$

$$(\log_3 15y)^4 + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y} (3^{11}) - 1$$

$$1. \begin{cases} X > 0 \\ X \neq 1 \\ X^2 \neq 1 \\ 5y > 0 \\ 5y \neq 1 \\ 25y^2 \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X > 0 \\ X \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$2. (\log_3 X)^4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 X} = \frac{1}{2} \cdot 5 \log_x 3 - 1;$$

Пусть  $\log_3 X = t$ ;  $2t^4 + \frac{12}{t} = 5t - 46$ ;

$$2t^5 - 5t^2 + 16t + 12 = 0;$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 1;$$

$$\frac{2t^5 + 16t + 12 - 5}{2t} = 0;$$

$$\frac{2t^5 + 16t + 7}{2t} = 0;$$

$$3. (\log_3 15y)^4 + 2 \cdot \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 15y} - 1;$$

Пусть  $\log_3 15y = m$ ;

$$m^4 + \frac{2}{m} = \frac{11}{2m} - 1;$$

$$\frac{2m^5 + 16m - 11 + 4}{2m} = 0;$$

$$\begin{cases} \frac{2t^5 + 16t + 7}{2t} = 0 \\ \frac{2m^5 + 16m - 7}{2m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2t^5 + 16t = -7 \\ t \neq 0 \\ m \neq 0 \\ 2m^5 + 16m = 7 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = 2x^5 + 16x$ ; она является нечётной, т.е.  $f(-x) = -f(x)$ ; т.к.  $f(m) = -f(t)$ , то  $m = -t$ ;



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

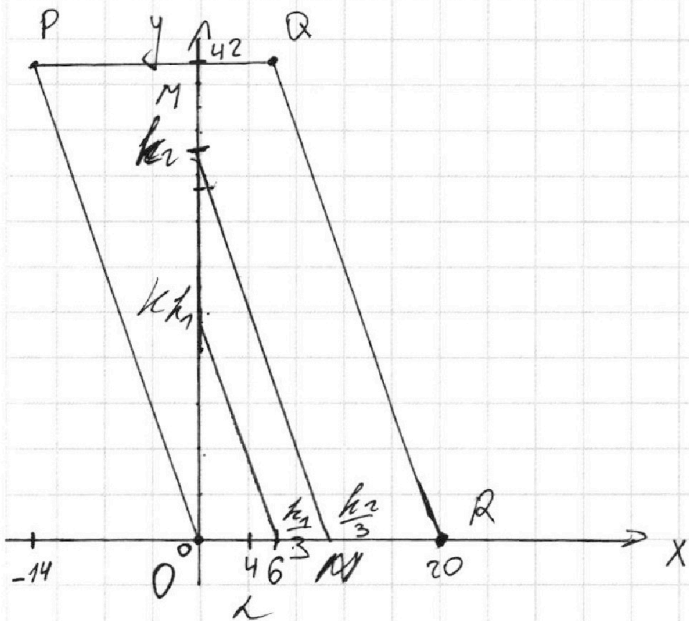
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~6.



$$P(-14; 42), Q(6; 42), R(20; 0), O(0; 0)$$

$$OPQR - \text{пар} - \text{ч}; A(x_1; y_1), B(x_2; y_2);$$

$$\text{Пусть } 3x_1 + y_1 = k_1;$$

$$3x_2 + y_2 = k_2;$$

$$k_2 - k_1 = 33;$$

$$(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33;$$

т.к.  $x_1, y_1, x_2, y_2$  — целые, то

$k_1$  и  $k_2$  — целые;  
 $k_2 > k_1$

$$(1) y_1 = k_1 - 3x_1 - k - \text{с. пер. с } Oy, k - \text{с. пер. с } Ox;$$

$$(2) y_2 = k_2 - 3x_2 - m - \text{с. пер. с } Oy, n - \text{с. пер. с } Ox;$$

$$MN \parallel QR \parallel PO \parallel k_1$$

$$0 \leq k_1 \leq 42;$$

$$k_2 = k_1 + 33;$$

$$\begin{cases} 0 \leq k_1 \\ k_1 + 33 \leq 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 \leq 9 \\ k_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{k_1}{3} \leq 20 \\ 0 \leq k_1 \leq 60 \end{cases}$$

$$\text{в итоге, } k_1 \in [0; 9]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 4 (продолжение)

$$\begin{aligned}
 & -9a^2b^2 - 36b^2 - 20a^2 - 4 \cdot 20 = \\
 & = (4^2 \cdot b^2 - 4^2 \cdot 5) + 24 \cdot 6ab - 36b^2 - 20a^2 = \\
 & = 4^2 \cdot 31 + 4 \cdot 36ab - 4 \cdot 9b^2 - 4 \cdot 5a^2 = 0;
 \end{aligned}$$

$$124 + 36ab - 9b^2 - 5a^2 = 0$$

$$b^2 = a^2 + 4$$

$$124 + 36ab - 9a^2 - 36 - 5a^2 = 0;$$

$$b^2 = a^2 + 4$$

$$b = \frac{14a^2 - 88}{36a}$$

$$b^2 = a^2 + 4$$

$$b^2 = \frac{(7a^2 - 44)^2}{18^2 \cdot a^2}$$

$$b^2 = a^2 + 4$$

Пусть  $a^2 = t$ ;

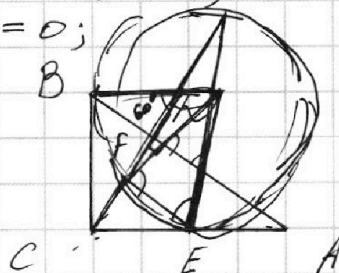
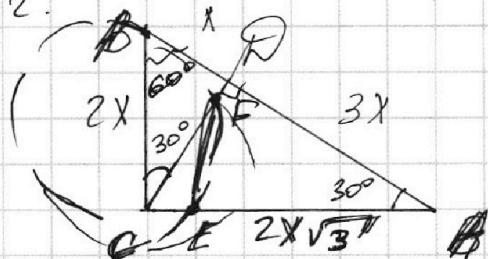
$$\frac{(7t - 44)^2}{18^2 t} = t + 4;$$

$$49t^2 - 154 \cdot 7t + 44^2 = 18^2 t^2 + 4 \cdot 18^2 t;$$

$$t^2 \cdot 11 \cdot 25 + t \cdot 1 \cdot 238 - 44^2 = 0;$$

Черновик.

~ 2.



$$\begin{aligned}
 & \triangle ACD \sim \triangle CBD; \\
 & \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD};
 \end{aligned}$$

$$CD = 3x^2; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{3x}{x\sqrt{3}} = \sqrt{3};$$

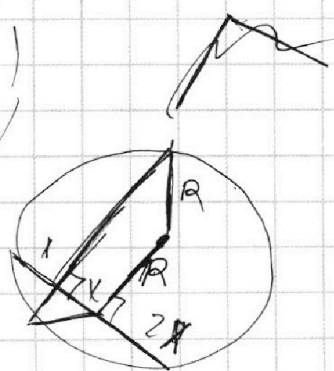
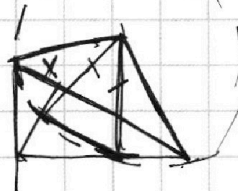
$$BC = y; \quad AC = y\sqrt{3};$$

$$y^2 + 3y^2 = 4y^2 = 16x^2; \quad y = 2x; \quad BC = 2x; \quad AC = 2x\sqrt{3};$$

$$R^2 = x_0^2 + (y_0 - 2x)^2$$

$$R^2 = y_0^2 + (x_0 - x\sqrt{3})^2$$

$$2x \cdot x_0 - x\sqrt{3}^2 = 2x \cdot y_0 + 4x^2$$





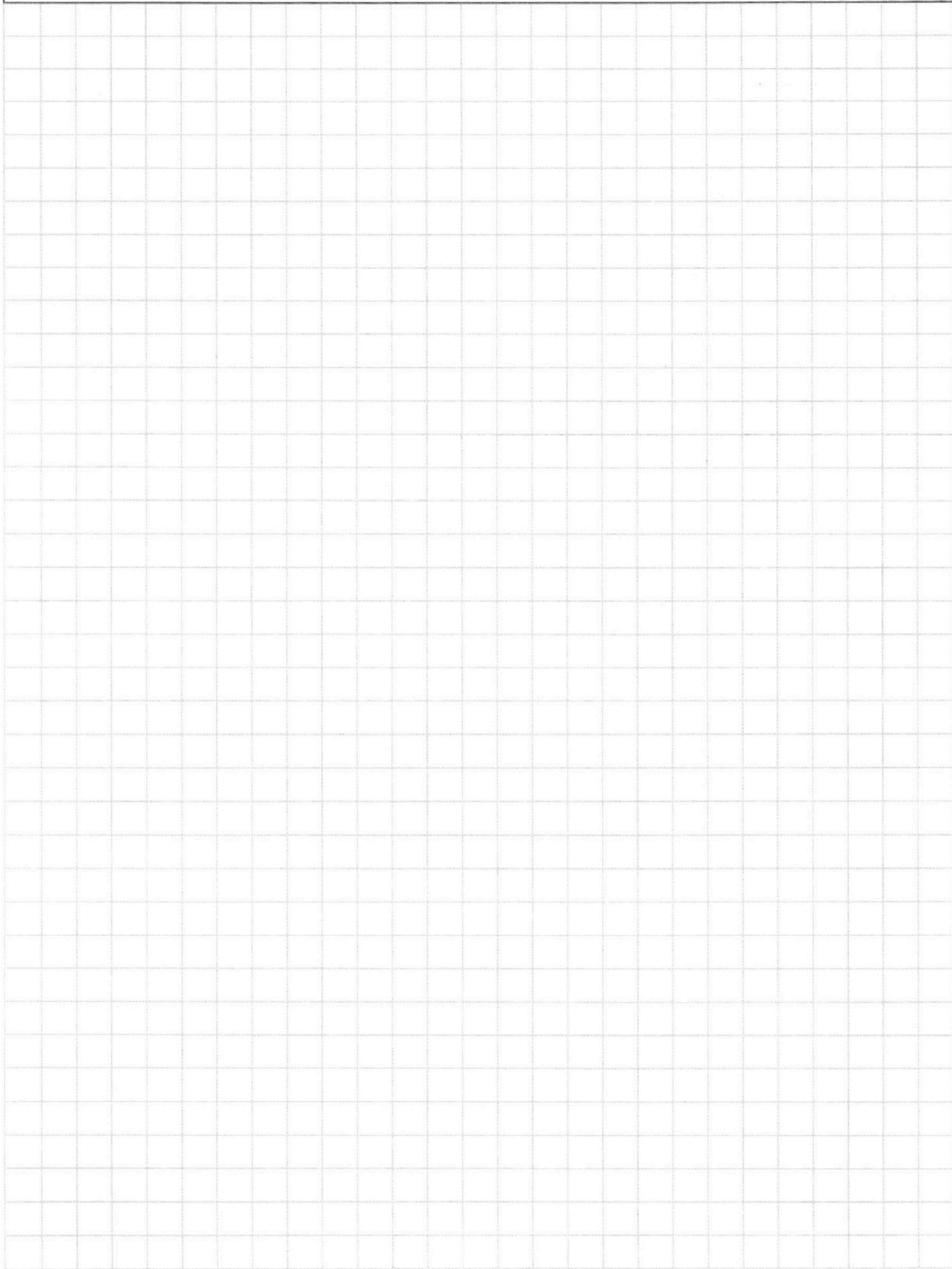
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

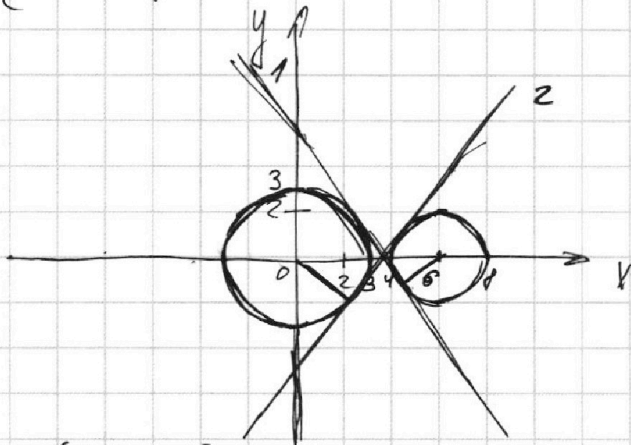
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4. \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + y^2 + 32 = 0 \\ 9x + 2y - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \\ 9x + 2y = 36 \end{cases} - 4 \text{ реш}$$



$$y = \frac{36 - 9x}{2}$$

$$1: \begin{cases} y_1 = \sqrt{9 - x^2} \\ y_2 = -\sqrt{4 - (x-6)^2} \end{cases}$$

$$y_1' = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$y_2' = \frac{-(4-(x-6)^2)^{-1/2}}{2\sqrt{4-(x-6)^2}}$$

$$= \frac{-(2x-12)}{2\sqrt{4-(x-6)^2}} = \frac{x-6}{\sqrt{4-(x-6)^2}}$$

$$\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{x-6}{\sqrt{4-(x-6)^2}}; \quad \sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 = 6;$$

$$\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{a}{2}; \quad \frac{2x}{\sqrt{9-x^2}} = a; \quad 4x^2 = 9a^2 - a^2x^2; \quad 4x^2 = 9a^2 - a^2x^2; \quad 4x^2 + a^2x^2 = 9a^2; \quad x^2(a^2+4) = 9a^2;$$

$$y^2 = 9 - \frac{9a^2}{a^2+4} = \frac{36}{a^2+4}; \quad x^2 = \frac{9a^2}{a^2+4};$$

$$4x^2 + (36 - 9x)^2 = 36; \quad (11-7)/(11+7) = 2/11.25$$

$$(a^2+4)x^2 - 54ax + 96^2 - 36 = 0;$$

$$\frac{4}{4} = 9a^2b^2 - 9(b^2-4)(a^2+4) = 9a^2b^2 - 9a^2b^2 + 36a^2 - 36b^2 + 144 = 0;$$

$$a^2 + 4 = b^2; \quad \frac{9 \cdot 16}{9 \cdot 4} = 4$$

$$4 \cdot 9^2 \cdot 4 + 8 \cdot 11 \cdot 7 = 8(9^2 \cdot 4 + 11 \cdot 7) = 8(162 + 77) = 8 \cdot 239$$

$$239 | 17 \quad 239 | 13 \quad 239 | 19 \quad 239 | 11 \quad 239 | 7$$

$$-\frac{a}{2} < \frac{-10}{17}; \quad 239 | 23$$

$$7 \cdot (2 \cdot 7^4 + 16 \cdot 7 + 1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик.*

$$1. \begin{cases} ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac = n \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot \frac{m}{k} \\ c \cdot a = n \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20} \end{cases}$$

$$c^2 = \frac{mn}{k} \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{16} \sqrt{\frac{mn \cdot 3 \cdot 5^7}{k}}$$

$$a = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{16} \sqrt{\frac{mn \cdot 3 \cdot 5^7}{k}} = n \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$

$$a = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{10} \sqrt{\frac{kn}{15m}}$$

$$b = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{16} \sqrt{\frac{15mn}{k}} = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$b = \frac{2^2 \cdot 3^3}{5^3} \cdot \sqrt{\frac{mk}{15n}}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{23} \sqrt{\frac{mn \cdot 15 \cdot k \cdot n \cdot mk}{15m \cdot 15n \cdot k}} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{23} \sqrt{\frac{mnk}{15}}$$

$$k=1, m=3, n=5, c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{16} \cdot 3 \cdot 5$$

$$b = \frac{2^2 \cdot 3^3}{5^3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{mk}{15n}} = 5^3 \cdot b$$

$$mk = 3 \cdot 5^7 \cdot n^2; n=1; m=3; k=5$$

т.е.  $b \mid abc$   $m, n, k$  - делители,  $l$  - наим.

$$c=1; a = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{10} \sqrt{\frac{5^7 \cdot 1}{15 \cdot 3}} = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{10} \cdot 5^3 \cdot \frac{1}{3} = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{13}$$

$$b = \frac{2^2 \cdot 3^3}{5^3} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 5^7}{15 \cdot 1}} = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{16} \sqrt{\frac{3 \cdot 1 \cdot 5^7}{3 \cdot 5}} = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{13}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{23} \sqrt{\frac{3 \cdot 1 \cdot 5^7}{3 \cdot 5}} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{26}$$



$$3. 5 \cdot \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2};$$

$$1) \ x - \frac{\pi}{2} \in \text{аргументы}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10};$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\neq \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{10}$$

$$1) \ x - \frac{\pi}{2} \in \text{аргументы}; \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right); \frac{-5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right);$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2x}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) = 0; \ x = 2\pi;$$

$$\frac{\pi}{5} + \frac{2x}{5} = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z} = \frac{5\pi}{2}$$

$$\cos x > 0;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > 0;$$

$$= \cos x$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{-5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \oplus$$

$$5 \arcsin(\cos 2\pi) = 2$$

$$= 5 \arcsin(1) = \frac{5\pi}{2}$$