



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90 , $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BSC в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5 .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2\beta_3 = 21 \quad ; \quad \beta_3 = \frac{21}{2} \quad ; \quad \beta_1 = \beta_3 - 3 = \frac{21-6}{2} = \frac{15}{2}$$
$$\beta_2 = 10 - \beta_1 = \frac{20-15}{2} = \frac{5}{2} \quad , \quad \text{однако такое}$$

невозможно, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 10 & + \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 13 & + \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 18 & \end{cases} \quad ; \quad \begin{aligned} 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) &\geq 41 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &\geq 20,5 \end{aligned}$$

abc_{min} достигается при $(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)_{\min}$,
т.е. $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$
 $u \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 21 \\ 10 + \beta_3 &= 21 \\ \beta_3 &= 11 \end{aligned}$$

$$\beta_1 = 18 - \beta_3 = 7 \quad ; \quad \beta_2 = 13 - \beta_3 = 2 \quad ,$$

такое возможно

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 10 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 30 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) &\geq 53 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &\geq 26,5 \end{aligned}$$

Пусть $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 27$ - min

$$\gamma_3 = 27 - 10 = 17 \quad ; \quad \gamma_2 = 27 - 30 = -3$$

такое невозм., ~~т.к. $\gamma_2 < 0$~~ , ~~т.к. $\gamma_3 > 30$~~ , ~~т.к. $\gamma_1 < 0$~~

~~$\gamma_3 \neq 30$; $\gamma_3 = 17$ - $(\gamma_1 + \gamma_2) = 10$~~

$$\gamma_1 = 27 - (\gamma_2 + \gamma_3) = 27 - 13 = 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N};$$

$$abc_{\min} = ?$$

$$\begin{aligned} N1. \quad & ab: 9 \cdot 10 \cdot 10 \\ & bc: 14 \cdot 13 \cdot 13 \\ & ac: 19 \cdot 18 \cdot 30 \end{aligned}$$

abc будет наименьшим, если ab ~~наименьшим~~ ^{наименьшим}

a, b, c - степени 2, 3 и 5

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}; \quad b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}, \text{ при этом}$$

из усл: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 9 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 19 \end{cases}$; $\begin{cases} \alpha_2 = 9 - \alpha_1 \\ 9 - \alpha_1 + \alpha_3 = 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 19 \end{cases}$

(если числа минимальные)
и равенство возможно

$$9 + 2\alpha_3 = 33$$

$$2\alpha_3 = 24$$

$$\alpha_3 = 12$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7 + 2 + 12 = 21$$

$$\alpha_1 = 9 + \alpha_3 - 14 = 9 - 2 = 7$$

$$\alpha_2 = 9 - \alpha_1 = 2$$

аналогично:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 10 \\ \beta_2 + \beta_3 = 13 \\ \beta_1 + \beta_3 = 18 \\ \beta_3 - \beta_1 = 3 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

м.к. $x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \geq 0$; ~~при $x_2 = 0$:~~

$(x_1 + x_2 + x_3)_{\min} = 30$, такое возможно при $x_2 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 30 \\ x_1 \geq 10 \\ x_1 + x_3 \geq 30 \\ x_3 \geq 13 \end{cases}$$

Максимум можем найти при $x_1 = 10$, $x_3 = 20$,
при этом произведение a, b и c будет мин.

$$(abc)_{\min} = 2^{x_1 + x_2 + x_3} \cdot 3^{y_1 + y_2 + y_3} \cdot 5^{x_1 + x_2 + x_3} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 6 \cdot 5$$

Ответ: $6 \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

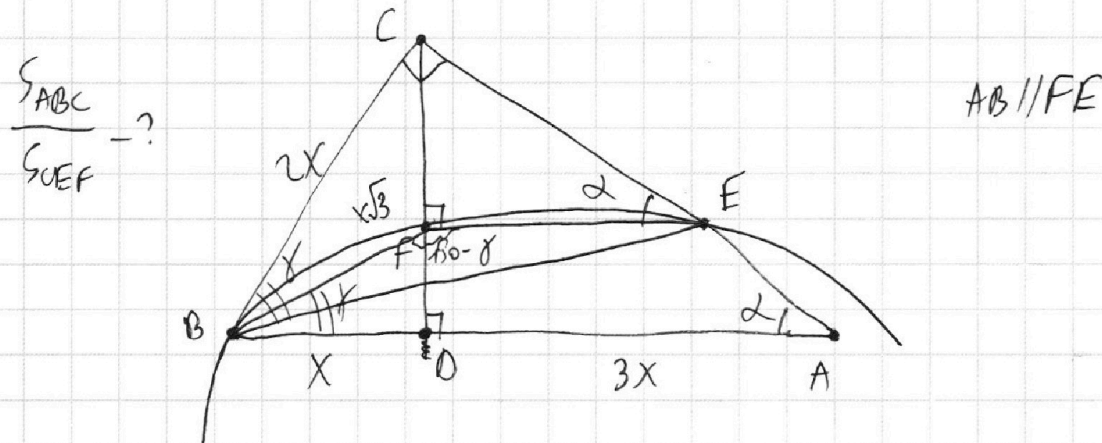
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



примем BD за x , $AD = 3x$
по св-ву впис. к мн: $CD^2 = x \cdot 3x$

$$CD = x\sqrt{3}$$

$$\angle CAD = \angle CEF = \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{x\sqrt{3}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

\Downarrow
 $\alpha = 30^\circ$

(BC) - кас. к окруж. по т.м., поэтому

$$\angle CBE = \frac{\sphericalangle BE}{2}, \text{ как угол между касат. и хордой}$$

$$\angle BFE = 180^\circ - \frac{\sphericalangle BE}{2} = 180^\circ - \angle CBE \text{ как впис.}$$

$$\angle EFD = 90^\circ, \text{ тогда}$$

$$\angle BFD + 90^\circ = \angle BFE$$

$$\angle BFD = 180^\circ - \angle CBE - 90^\circ = 90^\circ - \angle CBE$$

примем $\angle CBE$ за γ

$$\left. \begin{array}{l} \text{в } \triangle CBE: \operatorname{tg} \gamma = \frac{CE}{CB} \\ \text{в } \triangle BFD: \operatorname{tg} \gamma = \frac{FD}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{FD}{x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



по ТЛ Треугольник $\triangle BCD$:

$$x^2 + 3x^2 = CB^2 \Rightarrow CB = 2x$$

$$\frac{CE}{2x} = \frac{FD}{x}$$

$$CE = 2FD$$

Треугольник $\triangle FCD$, $FD = t$, $CE = 2t$

$CF = x\sqrt{3} - t$; $\triangle CFE$:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{CF}{CE}$$

$$\frac{x\sqrt{3} - t}{2t} = \frac{1}{2}; \quad x\sqrt{3} - t = t$$
$$x\sqrt{3} = 2t$$

$$t = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CF = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

по ТЛ Треугольник: $3x^2 + 9x^2 = AC^2$

$$AC = 2x\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2\sqrt{3}$$

$S_{CEFA} = \frac{1}{2} \triangle CDA \sim \triangle CFA$ по 2 \angle ,

поэтому $\frac{FE}{AO} = \frac{CF}{CO} = \frac{1}{2} \Rightarrow FE = \frac{3x}{2}$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{8};$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2x^2\sqrt{3} \cdot 8}{3x^2\sqrt{3}} = \frac{16}{3}; \quad \text{Ответ: } \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } k = -1: \quad 6x = -8\pi; \quad x = -\frac{4}{3}\pi$$

$$\text{при } k = -2: \quad 6x = -18\pi; \quad x = -3\pi$$

$$\text{при } k = 0: \quad 6x = 2\pi; \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{при } k = 1: \quad 6x = 12\pi; \quad x = 2\pi$$

$$(2) \quad \frac{5\pi}{2} + 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi - 10\pi k$$

$$2x = -\pi - 5\pi k$$

$$-6\pi \leq 2x \leq 4\pi$$

$$\text{при } k = -1: \quad 2x = -\pi + 5\pi = 4\pi; \quad x = 2\pi$$

$$\text{при } k = 0: \quad 2x = -\pi; \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{при } k = 1: \quad 2x = -\pi - 5\pi = -6\pi; \quad x = -3\pi$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; \frac{\pi}{3}; 2\pi; -\frac{\pi}{2} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

Пусть $\arcsin(\cos x) = \alpha$, тогда:

$$\begin{cases} 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = \cos x \end{cases}$$

1)

$$\begin{aligned} -\frac{5\pi}{2} &\leq 5\alpha \leq \frac{5\pi}{2} \\ -\frac{5\pi}{2} &\leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{-3\pi \leq x \leq 2\pi}$$

2)

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} & (1) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} & (2) \end{cases}$$

3)

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k &= x + \frac{\pi}{2} \\ 6x &= 2\pi + 10\pi k \end{aligned}$$

$$-18\pi \leq 6x \leq 12\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку прямая симметрична оси Ox ,

для прямой l_2 $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}}$

Чтобы было 4 реш: $\operatorname{tg} \gamma \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; 0) \cup (0; \frac{5}{\sqrt{11}})$,

$$\text{где } \operatorname{tg} \gamma = -\frac{a}{2}$$

также был разломан прямой $\operatorname{tg} \delta = 0$,
($a = 0$)

поэтому достаточно решить след систему:

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{11}} \cdot (-2) \\ -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \cdot (-2) \end{cases} \begin{cases} a < \frac{10}{\sqrt{11}} \\ a > -\frac{10}{\sqrt{11}} \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найти a , при которых сущ. b , такие что

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 реш.

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$2y = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$$

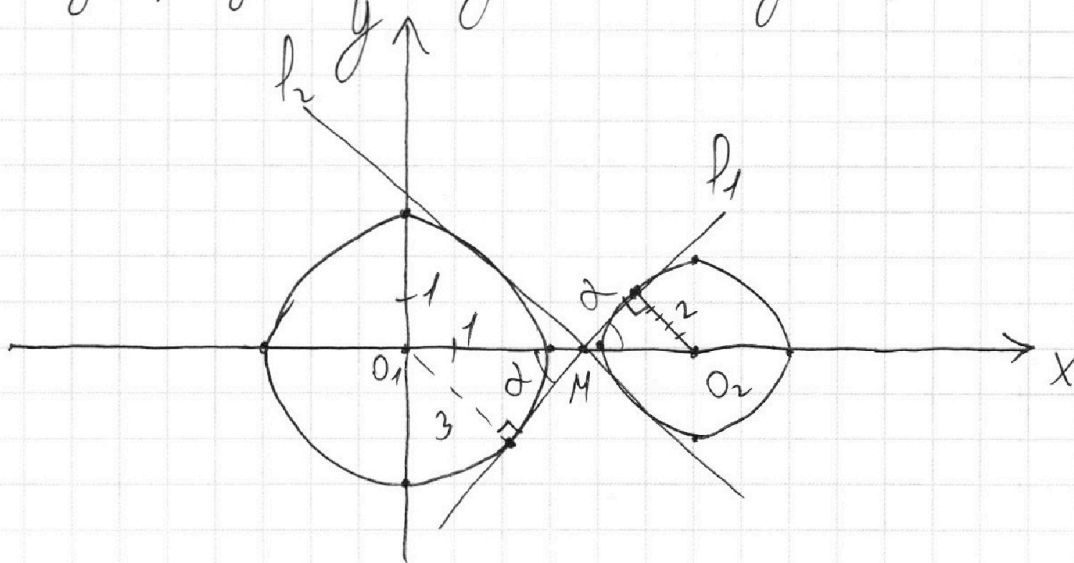
$$\begin{cases} y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Изобразим эту систему графически



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 = 9 \text{ - окружность } R=3, O_1(0;0)$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4 \text{ - окружность } R=2; O_2(6;0)$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \text{ - прямая (если } a \neq 0)$$

1) Рассмотрим особый случай $a=0$:

$$y = \frac{3}{2}b \text{ - прямая параллельная } O_x, \text{ что}$$

4 реш. (например, $b=0$)

$$\boxed{a=0} \text{ в ответ}$$

2) от a зависит наклон прямой,

тогда найдем предельный случай при котором нет 4 реш., - $y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$ является общей внешней касательной

Пусть эта прямая l_1 касается O_x в $(.)M$

$$O_1M + O_2M = 6. \text{ Пусть } \angle 2, \text{ тогда}$$

$$\sin 2 \cdot 6 = \frac{2}{O_2M} = \frac{3}{O_1M}$$

$$\frac{2}{6 - O_1M} = \frac{3}{O_1M}; \quad 2O_1M = 18 - 3O_1M$$

$$5O_1M = 18; \quad O_1M = \frac{18}{5}$$

$$\sin 2 = \frac{18 \cdot 5}{48 \cdot 6} = \frac{5}{6}; \quad \cos 2 = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\tan 2 = \frac{5}{\sqrt{11}} \neq \frac{5}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x < 1$$

$$(2) \quad \frac{7}{2} \log_{5y} 3 = \log_3^4(5y) + 8 > 0$$

$$\log_{5y} 3 > 0$$

$$\log_{5y} 3 - \log_{5y} 1 > 0$$

$$(5y - 1)(3 - 1) > 0$$

$$5y > 1$$

$$(*) \quad (\log_3 5y - \log_3 x) \log_3 x \log_3 5y \underset{>0}{\overbrace{(\log_3^2 5y + \log_3^2 x)}} = \frac{7}{2}$$

$$(1) + (2): \quad \frac{7}{2} (\log_x 3 - \log_{5y} 3)$$

$$\frac{7}{2} (\log_x 3 - \log_{5y} 3) + \log_3^4 x + \log_3^4 5y = -16$$

$$\log_x 3 - \log_{5y} 3 = \frac{2}{7} (-16 - \log_3^4 x - \log_3^4 5y) < 0$$

$$\log_x 3 - \log_{5y} 3 < 0, \text{ тогда}$$

$$\text{н.к. } \log_3^2 5y + \log_3^2 x > 0, \text{ но равенство } (*)$$

$$\text{возможно, только если } \log_3 x \log_3 5y < 0,$$

но по доп-му это не так

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 5.

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (xy) + 2 \log_{xy} 3 = \log_{xy^2} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$xy - ?$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \pm 1 \\ y > 0 \\ y \neq \pm \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \\ \log_3^4 (xy) + 2 \log_{xy} 3 = \frac{11}{2} \log_{xy} 3 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = -8 & (1) \\ \log_3^4 (xy) - \frac{7}{2} \log_{xy} 3 = -8 & (2) \end{cases}$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = \log_3^4 (xy) - \frac{7}{2} \log_{xy} 3$$

$$\log_3^4 (xy) - \log_3^4 x = \frac{7}{2} (\log_x 3 + \log_{xy} 3)$$
$$(\log_3^2 (xy) - \log_3^2 x) (\log_3^2 (xy) + \log_3^2 x) = \frac{7}{2} \left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 xy} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & (\log_3(5y) - \log_3 x) (\log_3(5y) + \log_3 x) (\log_3^2 5y + \log_3^2 x) = \\ & = \frac{7}{2} \left(\frac{\log_3 x + \log_3 5y}{\log_3 x \log_3 5y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \log_3 \left(\frac{5y}{x} \right) \cdot \log_3(5xy) \cdot (\log_3^2 5y + \log_3^2 x) = \\ & = \frac{7}{2} \cdot \frac{\log_3(5xy)}{\log_3 x \log_3 5y} \end{aligned}$$

1) или $\log_3(5xy) = 0$:

$$\log_3(5xy) = \log_3 1$$

Ф-ция $g(t) = \log_3 t$ монотонна на $D(g)$,
поэтому $5xy = 1$

$$xy = \frac{1}{5}$$

2) или $\log_3(5xy) \neq 0$:

$$\log_3 \left(\frac{5y}{x} \right) \cdot \log_3 x \cdot \log_3 5y \cdot (\log_3^2 5y + \log_3^2 x) = \frac{7}{2}$$

$$\frac{7}{2} \log_x 3 = -8 - \log_3^4 x < 0$$

(1) $\log_x 3 < 0$

$$\log_x 3 - \log_x 1 < 0$$

$$(x-1)(3-1) < 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y} 2 (3^{11}) - 8$$

$xy = ?$ $k+t = ?$ $k^2+t^2 = (k+t)^2 - 2kt$

$0 < 3: \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1 \cdot xy - ?}{\log_3 5y} = \log_3 x + \log_3 5y = \log_3 5xy$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{1}{2} \cdot 5 \log_x 3 - 8 = \frac{\log_3 5xy}{\log_3 \log_3 5y}$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{1}{2} \cdot 11 \log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x^2 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y}^2 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 5y - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = \log_3^4 5y - \frac{7}{2} \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y = -\frac{7}{2} (\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$
 $\log_3^4 x - \log_3^4 5y = \log_3 \frac{x}{5y} \log_3 5xy$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\log_3 x = t \neq 0$, $\log_3 5y = k \neq 0$
 $\frac{7}{2} \log_3 x = -8 - \frac{4}{2} \log_3 5y$; $3^k = 5y$; $3^t > 0$
 $\log_3 x < \log_3 5y$ $5xy = 3^{t+k}$; $xy = \frac{3^{t+k}}{5}$
 $x < 5y$ перенесем k на левую часть: $xy = \frac{3^{t+k}}{5}$
 $\log_3 x < 0$ $(k-t)tk(k^2+t^2) = \frac{7}{2}$
 или $k+t = p$, $(x-1)(y-1) \neq 0$ $(\frac{t+k}{2})^2 - 2tk =$
 $t-k = \log_3 \left(\frac{x}{5y}\right)$ $p = k^2 + 2tk + t$ $\log_3 3 \geq \log_3 5xy$ $\log_3 3 \geq \log_3 5xy$
 $\log_3 x \log_3 5y = 2tk = k^2 + t^2$
 $t-k = \log_3 \frac{x}{5y}$ $(k-t)tk(p^2 - 2tk) = \frac{7}{2}$
 $(3 - \frac{7}{2}k + tk^2 - k^3 + \frac{7}{2}tk$
 $t^4 - k^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) = 0$
 $(t^2 - k^2)(t^2 + k^2) + \frac{7(k+t)}{2tk} = 0$
 $(t-k)(t+k)(t^2 + k^2) + \frac{7}{2} \frac{(t+k)}{tk} = 0$
 $(k+t) \left((t-k)(t^2 + k^2) + \frac{7}{2} \right) = 0$
 $k+t=0$; $(t^2 + k^2)(t-k) + \frac{7}{2} = 0$
 $t-k > 0$
 $t-k < 0$

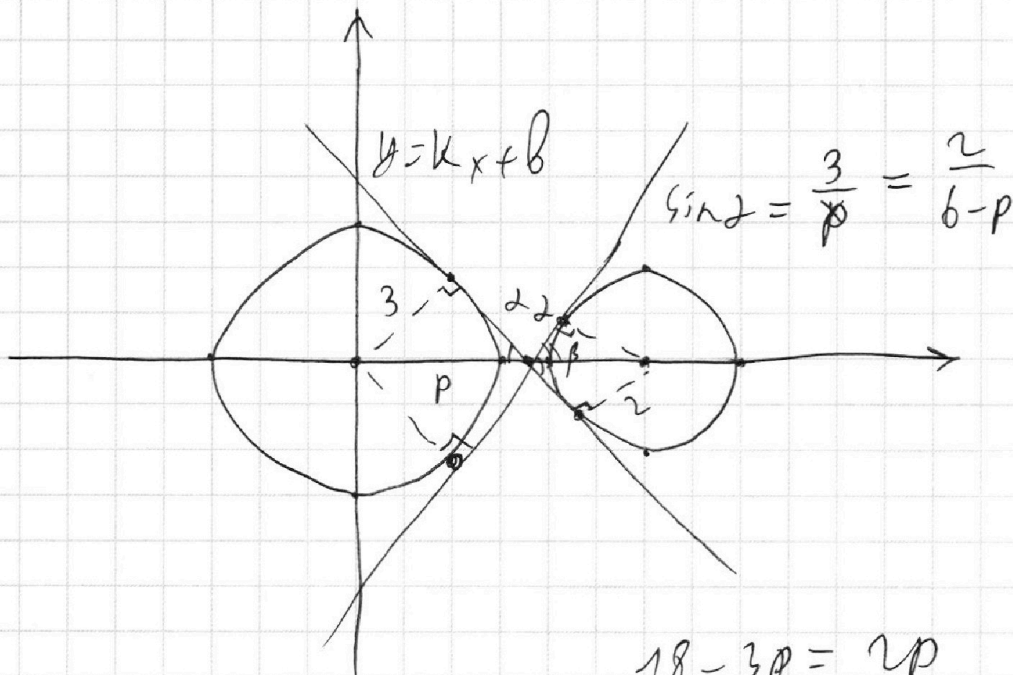
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha = \frac{3}{p} = \frac{2}{6-p}$$

$$18 - 3p = 2p$$

$$5p = 18$$

$$p = \frac{18}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\frac{18}{5}} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$\cos \alpha = \frac{25}{36}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$1 + \sin^2 \alpha = \frac{11}{6^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\tan(180 - \alpha) = -\frac{5}{\sqrt{11}} = -\frac{a}{2}$$

$$\tan \beta = \frac{2}{6-k} = \frac{3}{k}$$

н.к. *мысли* *опт-0 O_x*

$$\begin{aligned} \tan \beta &= -\tan \alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}} \\ &= \tan(180 - \alpha) = -\tan \alpha \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-b)^2 + y^2 - 36 + 32 = 0 \rightarrow (x-b)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$y = -ax + 3b \rightarrow y = -\frac{ax}{2} + \frac{3}{2}b$$

$$A(0; \frac{3}{2}b)$$

$\log_3^4 x + 6 \log_3 x - 8$
 $\frac{81}{3^3} = \frac{27}{1}$
 $\frac{5}{3}$

- 1) следовательно $a = 0$: $y = \frac{3b}{2}$
касательная (центр $b = 0$)
- 2) граница - внутрен. обш. кас.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \sqrt{3} \\ \sin \alpha = \cos x \\ \alpha = x + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k \quad (2)$$

1) ~~$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k = x + \frac{\pi}{2}$~~

~~$\frac{5\pi}{2} = 5x + 10\pi k \rightarrow x + \frac{\pi}{2}$~~

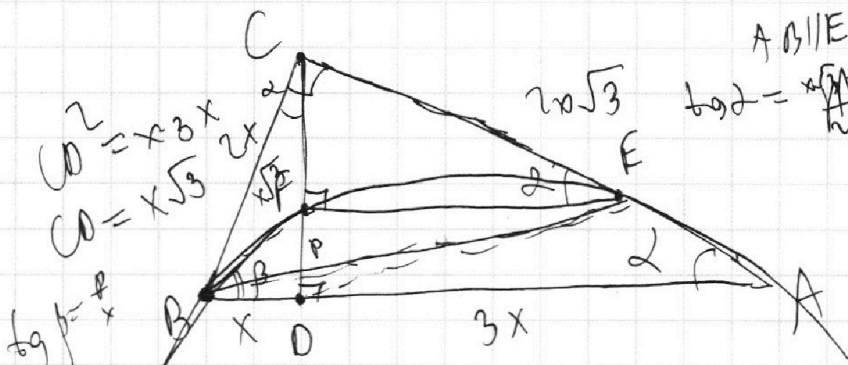
$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5\alpha \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\boxed{-3\pi \leq x \leq 2\pi}$$

2) $\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$

$$-18\pi \leq 6x = 2\pi + 10\pi k \leq 10\pi$$



$AB \parallel EF$
 $\tan \alpha = \frac{x\sqrt{3}}{2x}$
 $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$
 $\triangle ABC$
 $\triangle CEF$

$\Delta - \text{III}$
 по формуле косинусов
 тогда

$$AC = \sqrt{3x^2 + 9x^2} = x\sqrt{12} = 2x\sqrt{3}$$

$$BC = \sqrt{3x^2 + 4x^2} = 2x$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 > 2 \quad - > 0 \quad 31$$

$$2 > 2$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 41$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 20,5$$

$$\text{нужно } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 21 - \min$$

$$\text{нужно } \beta_1 + \beta_2 = 10: \quad \beta_3 = 11$$

$$\beta_2 = 13 - \beta_3 = 2$$

$$\beta_1 = 18 - \beta_3 = 7$$

$$2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 10 + 13 + 30 = 53$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 28 - \min$$

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\gamma_3 = 28 - 10 = 18$$

$$\gamma_2 = 28 - 30 = -2$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x \\ \alpha = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \end{cases}$$

$$(\gamma_1 + \gamma_2)_{\min} = 30$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ + 17 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\gamma_{\min} = 30 \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin \alpha = \cos x, \\ 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5\alpha \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$x + \frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

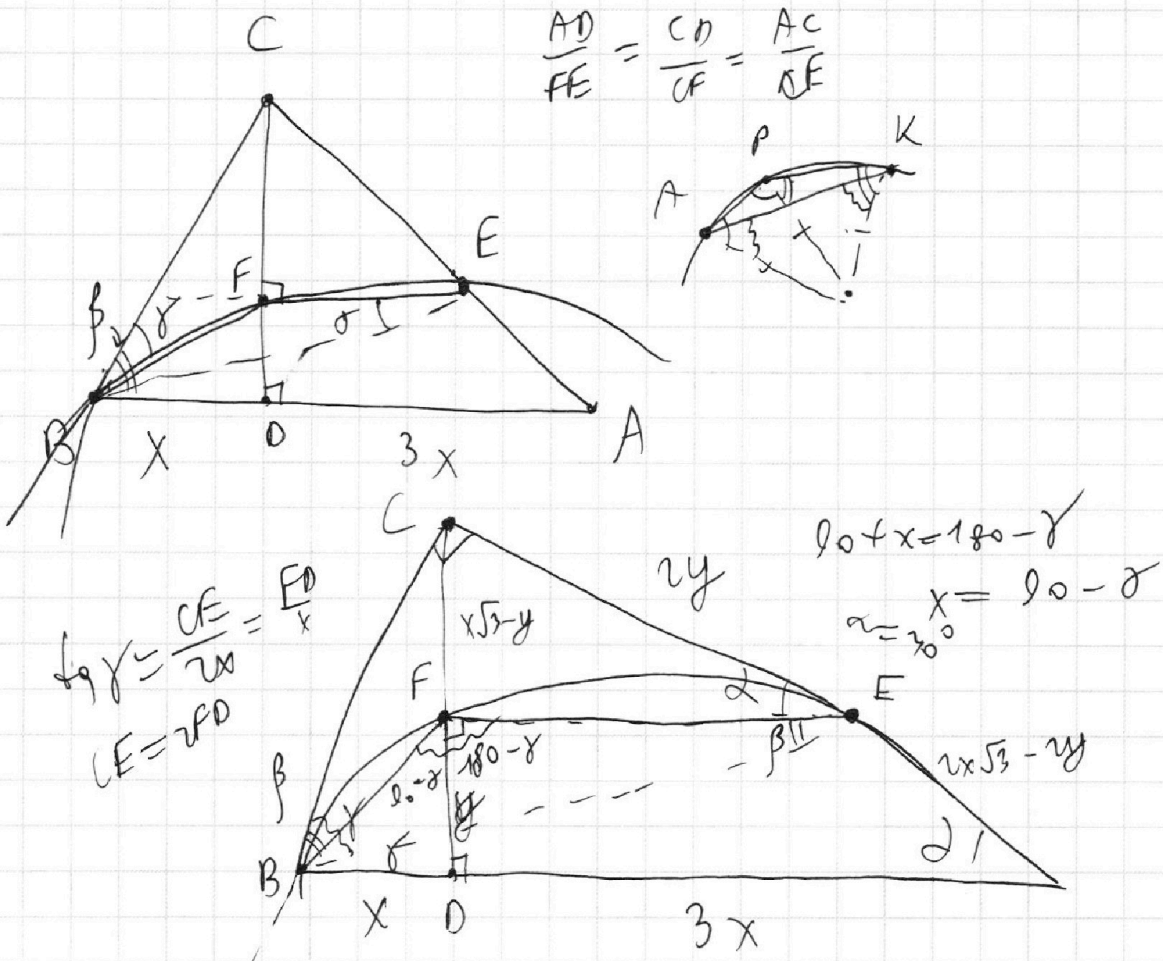
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{FE} = \frac{CD}{CF} = \frac{AC}{CE}$$

$$\sin \gamma = \frac{CE}{2\alpha} = \frac{FD}{x}$$

$$CE = 2FD$$

$$90 + x = 180 - \gamma$$

$$x = 90 - \sigma$$

$$\sin 30 = \frac{x\sqrt{3} - y}{2y} = \frac{1}{2}$$

$$x\sqrt{3} - y = y$$

$$x\sqrt{3} = 2y$$

Или.

$$\begin{cases} ax + y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 11x + 32) = 0 \end{cases}$$

Найти a, при
которых будет b,
что уреш.