



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$\begin{aligned} a, b, c \in \mathbb{N}^+ & \\ a, b, c & \\ a, b, c & \end{aligned}$$

$a, b, c \in \mathbb{N}^+$
 a, b, c
 a, b, c

Заметим, что если a, b, c делятся ещё на 4 или 5, то прежде чем, в формуле $2, 3, 5$, то их можно разложить на эти числа и учесть их в первом вычитании.

Значит, a, b, c делятся только на $2, 3, 5$.

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$$

$$\text{тогда из (1): } a_1 + b_1 \geq 8 \quad (2): b_1 + c_1 \geq 12$$
$$a_2 + b_2 \geq 14 \quad b_2 + c_2 \geq 20$$
$$a_3 + b_3 \geq 12 \quad b_3 + c_3 \geq 17$$

$$(3): a_1 + c_1 \geq 14$$
$$a_2 + c_2 \geq 21$$
$$a_3 + c_3 \geq 39$$

Рассмотрим случаи 2:

Заметим, что при $a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = 9$ все неравенства выполняются, т.е. достигаются наименьшие случаи 2 $\Rightarrow a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = 9$

Случай 3:

Заметим, что если все три неравенства выполняются, то

$$2a_2 + 2b_2 + 2c_2 = 55, \text{ что невозможно, так как сумма нечётная}$$

$$\text{тогда увеличим } a_2 + c_2 \text{ на } 1, \text{ т.е. } a_2 + c_2 \geq 22 \text{ тогда } a_2 + c_2 + 2b_2 = 14 + 20 = 34$$
$$\Rightarrow b_2 = 9$$
$$\Rightarrow a_2 = 7 \Rightarrow c_2 = 13$$

т.е. равенства (минимального значения) не достигаются, а это означает минимальное значение на 10 от минимального

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случаи 5:

Заметим, что если ^{возможные} ~~возможные~~ равенства в первом случае, т.е. ~~первые равен~~

$a_3 + c_3 = 39$, то при $a = 12, c = 27, b = 0$ ^{или}
первое и второе равенства верны, а если второе меньше, то
не выполняются первые \Rightarrow это лучший вариант.

Получаем, что:

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^{12}$$
$$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^0 = 2^3 \cdot 3^7$$
$$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3} = 2^9 \cdot 3^{18} \cdot 5^{27} \quad \text{и это наилучший вариант}$$

$$\text{тогда } abc = 2^{(5+3+9)} \cdot 3^{(2+7+18)} \cdot 5^{(12+0+27)} = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$$

$$\underline{\underline{Ответ: 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

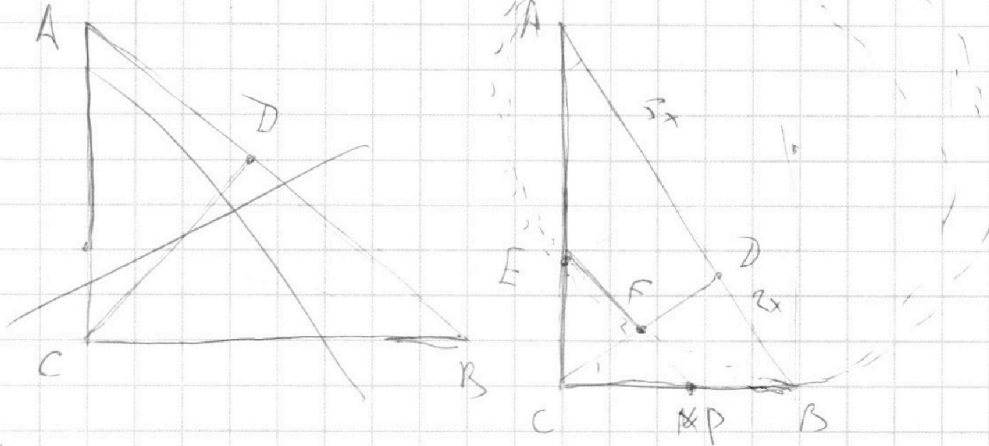
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.



Дано:

$\triangle ABC$,
 $\angle ACB = 90^\circ$,
 $CD \perp AB, D \in AB$,
 Опр-ство $\omega \cap BC = B$,
 (кас.)
 $\omega \cap CD = F$,
 $\omega \cap AC = E$,
 $AB \parallel EF$,
 $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$
 Найти: $\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle CFE)}$

Решение: 1) Пусть $AD = 5x$, тогда $DB = 2x$

2) ~~т.к. CB касательная к ω ,~~

~~$CE \perp AC$~~

т.к. $EF \parallel AB$, то $CD \perp EF \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$,

$\angle CFE = \angle CAD$ или $\angle CFE = \angle CBA$ при $EF \parallel AB$, следовательно AE

3) по св-ву ~~касательной~~ хорды CD $\angle CFE$ и $\angle CAD$ вписаны, следовательно $\angle CFE = \angle CAD$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{10}$$

тогда $CB = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = x\sqrt{14}$ (в $\triangle DBC$ по теореме Пифагора)

$AC = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = x\sqrt{35}$ (в $\triangle ADC$ по теореме Пифагора)

4) $EF \parallel BC \Rightarrow \angle CFE = \angle CBA$

5) $\triangle PCF \sim \triangle BCF$ (по двум углам, т.к. $AB \parallel EF$)

$$\Rightarrow \frac{PF}{CF} = \frac{CP}{CB} \Rightarrow \frac{PF}{CF} = k$$

тогда $PF = k \cdot CF$, $CF = \frac{PF}{k}$

~~$\triangle PCF \sim \triangle BCF$~~ $\triangle PCF \sim \triangle BCD$ (по двум углам, " - ")

$$\Rightarrow \frac{PF}{CF} = \frac{CP}{CB} = k$$

$$\Rightarrow PF = k \cdot CF = k \cdot \frac{PF}{k} = PF$$

6) $PB = BC - CP = BC - BC \cdot k = BC \cdot (1 - k)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7) Замечают, что PB -кас. к ω ,
 $P-F-E$ - секущая к ω } из точки P

$$\Rightarrow PB^2 = PF \cdot PE$$

$$BC \cdot (1-k)^2 = k^2 \cdot 2x \cdot 7x$$

$$(4x^2 \cdot (1-k)^2 = 14x^2 \cdot k^2$$

$$14x^2 \cdot (k^2 - (1-k)^2) = 0$$

Т.к. $x \neq 0$ (иначе $AB=0$), то

$$k^2 = (1-k)^2$$

$$k^2 = k^2 - 2k + 1$$

$$1 - 2k = 0$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow CP = \frac{BC}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ $PE \parallel AB$, P - сеп. BC , то PE - сеп. ΔABC
(по признаку.)

\Rightarrow ~~S~~ E - сеп. AC , $EP = \frac{9x}{2}$, $FP = \frac{2x}{2} = x \Rightarrow FF = \frac{9x - 2x}{2} = \frac{5x}{2}$

8) Замечают, что $S(\Delta CFF) = \frac{FF}{EP} \cdot S(\Delta PEC) = \frac{FF}{EP} \cdot S(\Delta ABC) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{5}{2 \cdot 4} \cdot S(\Delta ABC) = \frac{5}{28} S(\Delta ABC)$$

$$\Rightarrow \frac{S(\Delta CFF)}{S(\Delta ABC)} = \frac{28}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{28}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3.

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

т.к. $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$

$$10 \cdot \frac{\pi}{2} - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$4\pi = 10 \arccos(\cos x) - 2x$$

$$x + 2\pi = 5 \arccos(\cos x)$$

$$y = \arccos(\cos x)$$

1. $x \in [0; \pi)$

$$\Rightarrow \arccos(\cos x) = x$$

$$x + 2\pi = 5x$$

$$2\pi = 4x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

2. $x \in [\pi; 2\pi)$

$$\arccos(\cos x) = 2\pi - x$$

$$x + 2\pi = 10\pi - 5x$$

$$6x = 8\pi$$

$$x = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

3. $x \in [2\pi; 3\pi)$

$$x + 2\pi = 5x - 10\pi$$

$$12\pi = 4x$$

$$x = 3\pi, \text{ но } \pi \text{ всегда промежуток.}$$

4. $x \in [3\pi; 4\pi)$: $\arccos(\cos x) = 4\pi - x$

$$x + 2\pi = 20\pi - 5x$$

$$6x = 18\pi \quad x = 3\pi$$

5. $x \in [-\pi; 0)$: $\arccos(\cos x) = -x$

$$2\pi + x = -x - 5$$

$$2x = -2\pi - 5$$

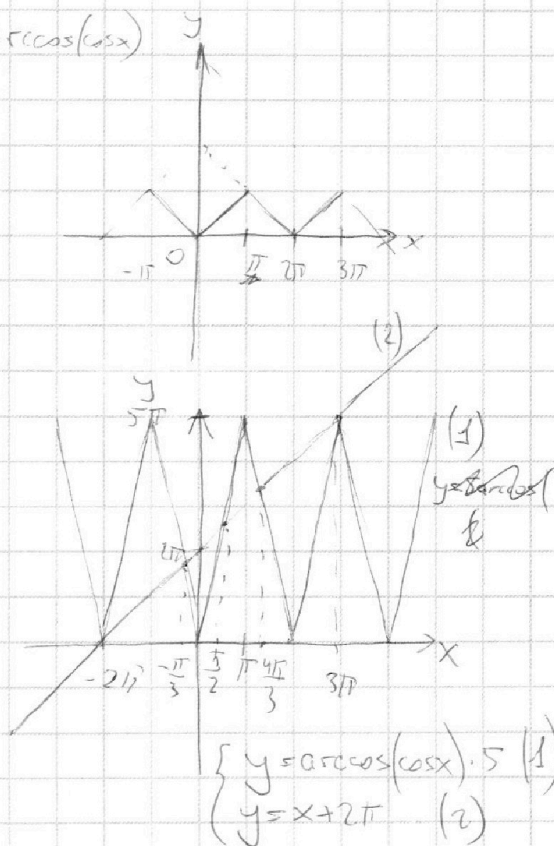
$$x = -\frac{\pi}{3}$$

6. $x \in [-2\pi; -\pi)$: $\arccos(\cos x) = x + 2\pi$

$$x + 2\pi = 5 \cdot (x + 2\pi)$$

$$4 \cdot (x + 2\pi) = 0$$

$$x = -2\pi$$



$$\begin{cases} y = \arccos(\cos x) \cdot 5 & (1) \\ y = x + 2\pi & (2) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что т.ч. область значений
 $\arccos(x)$ — $[0; \pi]$, то

область значений $\arccos(\cos x)$ — $[0; \pi]$

$$\text{при } x > 3\pi \quad x + 2\pi > 5\pi$$

$$\text{при } x < -2\pi \quad x + 2\pi < 0$$

\Rightarrow на $(-\infty; -2\pi) \cup (3\pi; +\infty)$ нет корней

\Rightarrow на $[2\pi; 3\pi]$ и $[-2\pi; -\pi]$ рассмотрим

законного уравнения

$$\Rightarrow \text{Ответ: } -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



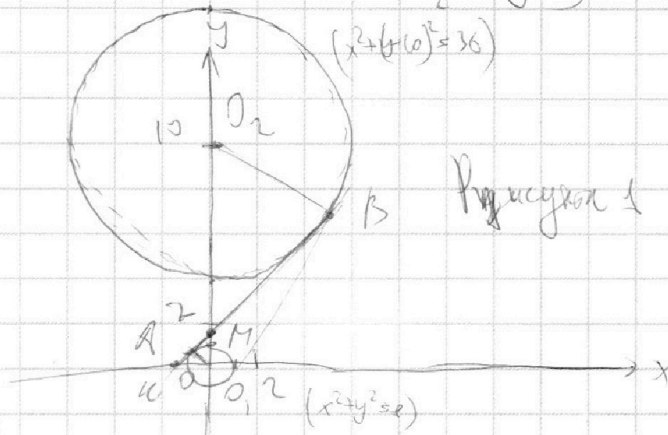
Задача 4.

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

Также $a, b \neq 0$ найдутся \forall при которых
имеет 4 решения

Закладываем $(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \\ y = \frac{ax}{3} + \frac{4b}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$$



Закладываем
сдвигаемся в систему, где
центр-связи, а прямая AB - нормаль
к окружности $\frac{a}{3}$ и тогда пересечение
с осью абсцисс

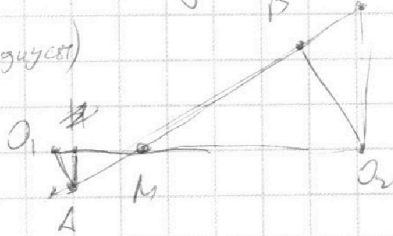
(Рассмотрим при $a=0$)

Найдем AB - осевую высоту касательной к двум окружностям:

O_1, O_2 - центры, A, B - точки касания, $M = O_1 O_2 \cap AB$

Рисунок 2

$O_1 A = 1$ (радиус)
 $O_2 B = 6$
 $O_1 O_2 = 10$



$\triangle O_1 A M \sim \triangle O_2 B M$ (по 2 углам, один-общий
по углам-верши.)

$$\Rightarrow \frac{O_1 M}{O_1 A} = \frac{O_2 M}{O_2 B} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow O_1 M = \frac{1}{6+1} \cdot 10 = \frac{10}{7}$$

Тогда $AM = O_1 M = \frac{10}{7}$, $O_1 A = 1$
 $O_1 M^2 = O_1 A^2 + AM^2 = 1 + \frac{100}{49} = \frac{149}{49}$

Тогда $AM \perp O_1 A$ и $\angle A O_1 M = 90^\circ$

$\angle A M A = \angle M A O_1 = 90^\circ$ - $\angle A O_1 A = \angle A O_1 M$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



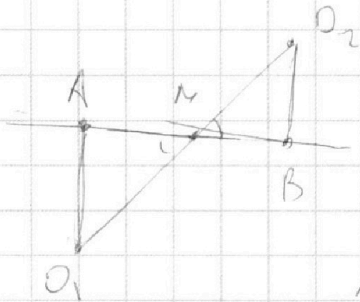
Тогда т.к. $\cos \angle A_1 M$ при $\angle A_1 M \times$ в ур-н прямой равен \tan угла $\angle A_1 M$ - этот угол, то

$$\frac{a}{3} = \tan \angle A_1 M = \frac{\sqrt{51}}{7}, \text{ а } \frac{4b}{3} = \frac{10}{7} - \text{ордината точки } M$$

$$\Rightarrow a = \frac{3\sqrt{51}}{7}, \quad b = \frac{30}{7}$$

Заметим, что рассмотрим

Рисунок 3.



В данном случае это же \cos а \cos перпендикуляр

$$O_1 M = O_1 M \cdot \cos \angle A_1 M$$

$$O_2 B = O_2 M \cdot \cos \angle M O_2 B = O_2 M \cdot \cos \angle A_1 M$$

т.к. углы равны

$$\Rightarrow O_1 M + O_2 B = \cos \angle A_1 M \cdot (O_1 M + O_2 M) = \cos \angle A_1 M \cdot O_1 O_2 = 6 \cos \angle A_1 M$$

Заметим, что при $\tan \angle A_1 M = \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\cos \angle A_1 M = \frac{7}{10}$

значит, при $\tan \angle A_1 M \leq \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\cos \angle A_1 M \geq \frac{7}{10}$ (так \tan $\in [0; \frac{\sqrt{51}}{7}]$, \cos $\in [\frac{7}{10}; 1]$)

Получаем, что $O_1 M + O_2 B \geq 7 = \text{радиус окружностей}$

Значит, хотя бы из рассуждений о прямой $y = \frac{a}{3}x + \frac{b \cdot 4}{3}$

будет касательная к окружностям, или пересекается

\Rightarrow будет 1 или 2 точки пересечения, а нам нужно, чтобы с каждой окружностью было 2 точки пересечения (то есть всего 4

Теперь заметим, что при $\tan \angle A_1 M = \frac{\sqrt{51}}{7}$ прямая, проходящая через $M(0; \frac{40}{7})$ и являющаяся касательная к окружностям, касается окружностей с рисунка 2, т.е., касается окружностей

касается окружностей \Rightarrow имеет 4 точки пересечения \Rightarrow система имеет 4 решения

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Получаем, что при $a > \frac{3\sqrt{54}}{7}$ ~~и~~
можно ~~есть~~ ~~здесь~~ при $b = \frac{30}{28}$ и будет 4 точки пересечения,
и при $a \leq \frac{3\sqrt{54}}{7}$ не получится, тогда было 4 точки
пересечения

~~и~~ Ответ: график или
Заметим, что $у = 0$ симметричен $ош.$ ~~и~~ ~~орудина~~
симметричен ~~свойствами~~

Значит, при $a < 0$ будет всё то же самое, но с минусом,
т.е., если получилось a , то $-a$ тоже получится

Значит, при $a < 0$ получится $a \leq -\frac{3\sqrt{54}}{7}$

Ответ: $(-\infty; -\frac{3\sqrt{54}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{54}}{7}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x} 3625 - 3$$

Пусть $\log_5(2x) = t$, тогда

$$\text{т.е. } \log_{2x} 5 = \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{1}{t}$$

$$\log_5 t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} - 3 \quad , \text{ т.е. } \log_{8x} 3625 = \log_{(2x)^3} 5^4 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5$$

$$\frac{3t^5 - 9 - 4 + 9t}{3t} = 0$$

$$\frac{3t^5 + 9t - 13}{3t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^5 + 9t - 13 = 0 & (1) \\ 3t \neq 0 \end{cases}$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$$

Пусть $\log_5 y = p$, тогда

$$p^4 + \frac{4}{p} = -\frac{1}{3p} - 3$$

$$\frac{3p^5 + 12 + 1 + 9p}{3p} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3p^5 + 9p + 13 = 0 & (2) \\ p \neq 0 \end{cases}$$

Заметим, что
для этого $f(t) = 3t^5 + 9t - 13$
 $g(p) = 3p^5 + 9p + 13$

Значит тогда $f'(t) = 15t^4 + 9$
 $g'(p) = 15p^4 + 9$

Заметим, что при $f'(t) > 0$ при всех t , $g'(p) > 0$ при всех p , то
Ф-н и во зр., значит, у них не более одного корня на \mathbb{R}
(т.е. область значений логарифма $-\mathbb{R}$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Также заметим, что если есть $t = t_0$, y является решением системы (1), то $x = -t_0$ является решением системы (2): \checkmark

Заметим, что $3t_0^5 + 9t_0 - 13 = 0$ — первое уравнение системы (1) (используем t_0 в уравнении)

логарифмируем в 5 первое уравнение системы (2) в $-t_0$:

$$\checkmark -3t_0^5 - 9t_0 + 13 = 0 \quad 3(-t_0) + 9(-t_0) + 13 = 0$$

$$\checkmark 3t_0^5 + 9t_0 + 13 = 0 \quad -3t_0^5 - 9t_0 + 13 = 0$$

$$3t_0^5 + 9t_0 - 13 = 0$$

↑ вверх и предположим.

Заметим, что $f(1) = 3 + 9 - 13 = -1 < 0$

$f(2) = 3 \cdot 32 + 9 \cdot 2 + 13 = 96 + 5 = 101 > 0$

\Rightarrow в силу непрерывности f и g (т.к. это многочлены) существует t_0 в интервале $1 < t_0 < 2$: $f(t_0) = 0$

Значит, $\begin{cases} \log_5 2x = t_0 \\ \log_5 y = -t_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \log_5 2x + \log_5 y = 0$

$\begin{cases} \log_5 2xy = 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2xy = 1$
 $xy = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

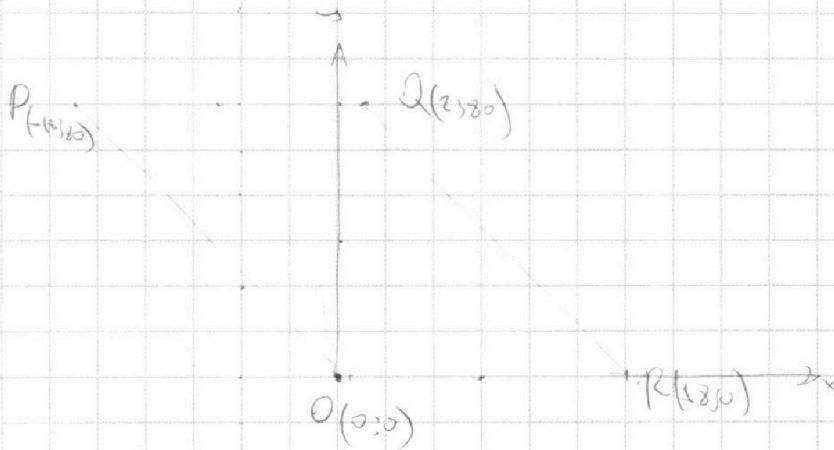
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



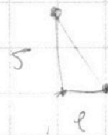
Задача 6.



Заметим, что PO:

$$y = -5x$$

т.е. $y + 5x = 0$



Рассмотрим прямые вида

$$y + 5x = 5 \cdot n, \quad 0 \leq n \leq 18$$

при $n=0$ — OP, $n=18$ — RQ, при $0 < n < 18$ — прямая, перпендикулярная к OP, проходящая через целочисленные точки на OR

таким образом, y ~~на~~ ~~прямых~~ ~~в~~ ~~длинах~~ ~~всех~~ ~~точек~~ ~~на~~ ~~прямых~~

на прямой l_1 : $y + 5x = 5n$

l_2 : $y + 5x = 5n + 45$

Какая ~~в~~ ~~длинах~~ ~~где~~

Абсциссы $A_1 \in l_1, B_1 \in l_2$ равны из условия $(5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45)$

Выводим

Значит, какова бы ни была пара прямых

l_1 : $y + 5x = 5n$
 $y + 5x = 5(n+9)$

Каково? $150; 1; 233; 4; 516; 7; 8; 9$

таких пар 10

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Далее рассмотрим, сколько вариантов выбрать точку с $y/2$ координатой на каждой прямой

$$y + 5x = 5n$$

Значит, $0 \leq y \leq 80$, а значит, 200

$$x \leq n - \frac{y}{5} \quad \text{Значит,}$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 80 \\ y \equiv 5 \end{cases}$$

$$y = 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80$$

17 вариантов выбрать точку с $y/2$ координатой на прямой
значит вариантов 2 точки (на каждой из 2 прямых по одному)

$$17 \cdot 17 = 289 \text{ вариантов}$$

Значит, y как ~~10~~ ¹⁰ вариантов по 289 вариантов каждой, ~~никуда~~
из вариантов не повторяется ¹⁰

$$\Rightarrow \text{всего способов } 10 \cdot 289 = 2890$$

$$\text{Ответ: } 2890$$

~~289~~
~~289~~
2890

