МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = a_1 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$ $\qquad a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{N}$

$b = b_1 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$ $\qquad a_1, b_1, c_1 \not\vdots\, 2, 3, 5$

$\qquad \forall i\ \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z}$

$c = c_1 \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$ $\qquad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geqslant 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geqslant 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geqslant 14 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geqslant 16 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geqslant 13 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geqslant 21 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geqslant 25 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geqslant 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geqslant 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geqslant 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geqslant 18 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geqslant \frac{59}{2} \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geqslant 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geqslant 18 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geqslant 30 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geqslant 28 \end{cases}$$

$abc = a_1 b_1 c_1 \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \geqslant 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \beta_1 = 2 \\ \gamma_1 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 14 \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 8 \\ \beta_2 = 5 \\ \gamma_2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 13 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 22 \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = 11 \\ \gamma_3 = 17 \\ \beta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 17 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{cases}$$

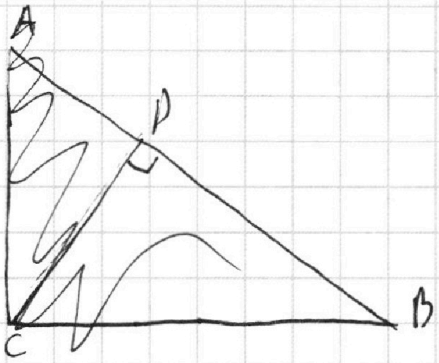
Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

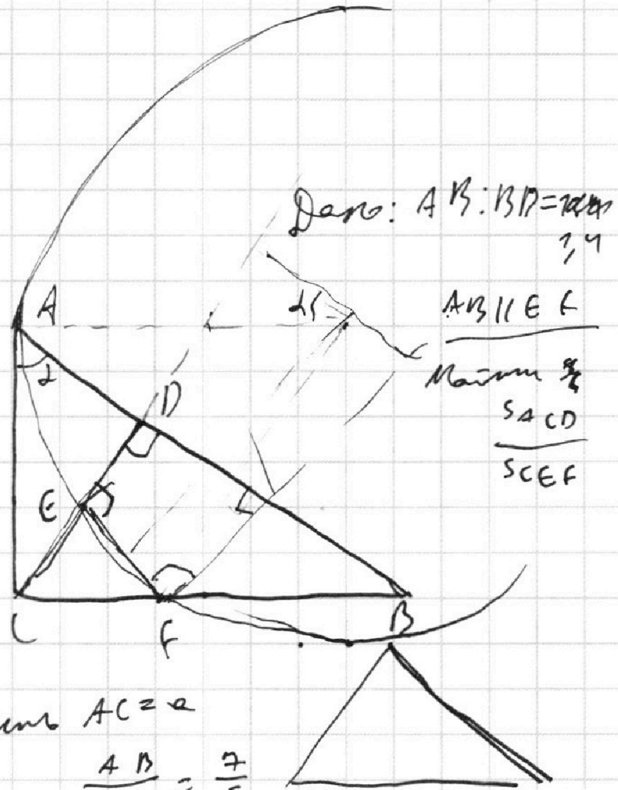
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

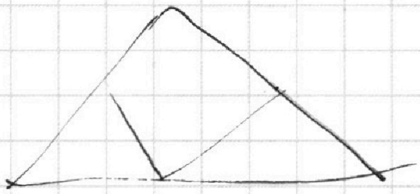




Дано: $AB:BD=7:5$

$AB \parallel EF$

Найти $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$



$EF \parallel AB \Rightarrow$

$\angle DEF = 90°$

Пусть $AC = a$

$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$

$\frac{AD}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow BD = \frac{5}{2}AD$

Пусть $\angle CAB = \alpha$

$tg\,\alpha = \frac{CD}{AD}$

$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{CD}{BD} = \frac{CD}{\frac{5}{2}AD} =$

$= \frac{2}{5}tg\,\alpha$

$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$

$tg^2\alpha = \frac{5}{2}$

$tg\,\alpha > 0$

$tg\,\alpha = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{7}{2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{7}}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

Сделаем замену $x = \frac{\pi}{2} - t$. Тогда $t = \frac{\pi}{2} - x$.

Решим ур-е $10 \arccos(\sin(\frac{\pi}{2} - t)) = 9\pi - 2(\frac{\pi}{2} - x)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 \arccos(\cos t) = 8\pi + 2t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 \arccos(\cos t) = 4\pi + t$

~~5 arccos(cos t)~~

$0 \leq 5 \arccos(\cos t) \leq 5\pi \Rightarrow -4\pi \leq t \leq \pi$

1. Пусть $0 \leq t \leq \pi$

$5t = 4\pi + t \Leftrightarrow t = \pi$

2. Пусть $-\pi \leq t < 0$

$5 \arccos(\cos t) = -5t$

$-5t = 4\pi + t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6t = -4\pi \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}\pi$

3. Пусть $-2\pi \leq t < -\pi$

$5 \arccos(\cos t) = 5(t + 2\pi) = 5t + 10\pi$

$5t + 10\pi = 4\pi + t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4t = -6\pi \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2}\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Пусть $-3\pi \le t < -2\pi$

$5\arccos(\cos t) = 5(-t-2\pi) = -5t-10\pi$

$-5t-10\pi = 4\pi+t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6t = 14\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = -\frac{7}{3}\pi$

5. Пусть $-4\pi \le t < -3\pi$

$5\arccos(\cos t) = 5(t+4\pi) = 5t+20\pi$

$5t+20\pi = 4\pi+t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4t = -16\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = -4\pi$

Итак, исходное ур-е равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}-x=\pi \\ \frac{\pi}{2}-x=-\frac{2}{3}\pi \\ \frac{\pi}{2}-x=-\frac{3}{2}\pi \\ \frac{\pi}{2}-x=-\frac{7}{3}\pi \\ \frac{\pi}{2}-x=-4\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{7\pi}{6} \\ x=2\pi \\ x=\frac{17}{6}\pi \\ x=\frac{9}{2}\pi \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2};\ \frac{7}{6}\pi;\ 2\pi;\ \frac{17}{6}\pi;\ \frac{9}{2}\pi\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Существует коэффициент k; гомотетия с центром в точке T и коэф. k переведёт ~~окружность O_1~~ нижнюю окружность в верхнюю. Тогда $-2k=5$, $-kTO_2=O_1T$. $k=-\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}TO_2=O_1T \Rightarrow 5TO_2=2O_1T$

$TO_2=\frac{2}{7}\cdot 9=\frac{18}{7}$, $TO_1=\frac{5}{7}\cdot 9=\frac{45}{7}$. Значит T координаты $(0;-\frac{45}{7})$

Пусть угол наклона касательной равен α.

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{5}{\frac{45}{7}}=\frac{7}{9}$

$\cos\alpha=\frac{7}{9}$

$\sin\alpha=\sqrt{\frac{32}{81}}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{7}$

Эти касательные имеют ур-я $y=\frac{4\sqrt{2}}{7}x-\frac{45}{7}$ и $y=-\frac{4\sqrt{2}}{7}-\frac{45}{7}$

~~Н.к. Условие~~

Пусть $\left|-\frac{5}{6a}\right| > \frac{4\sqrt{2}}{7}$. Найдём b: $\frac{b}{6a}=-\frac{45}{7}$ и проведём прямую $y=\frac{6-5x}{6a}$. Она пересечёт обе окружности в двух точках

Пусть $\left|-\frac{5}{6a}\right| \le \frac{4\sqrt{2}}{7}$. Если b такое, что $y=\frac{6-5x}{6a}$ проходит через точку T, то она пересечёт каждую окружность не более, чем в 1 точке. Выше T — не пересечёт нижнюю. Ниже T — не пересечёт верхнюю.

$\left|-\frac{5}{6a}\right| > \frac{4\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow \left|\frac{5}{6a}\right| > \frac{4\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

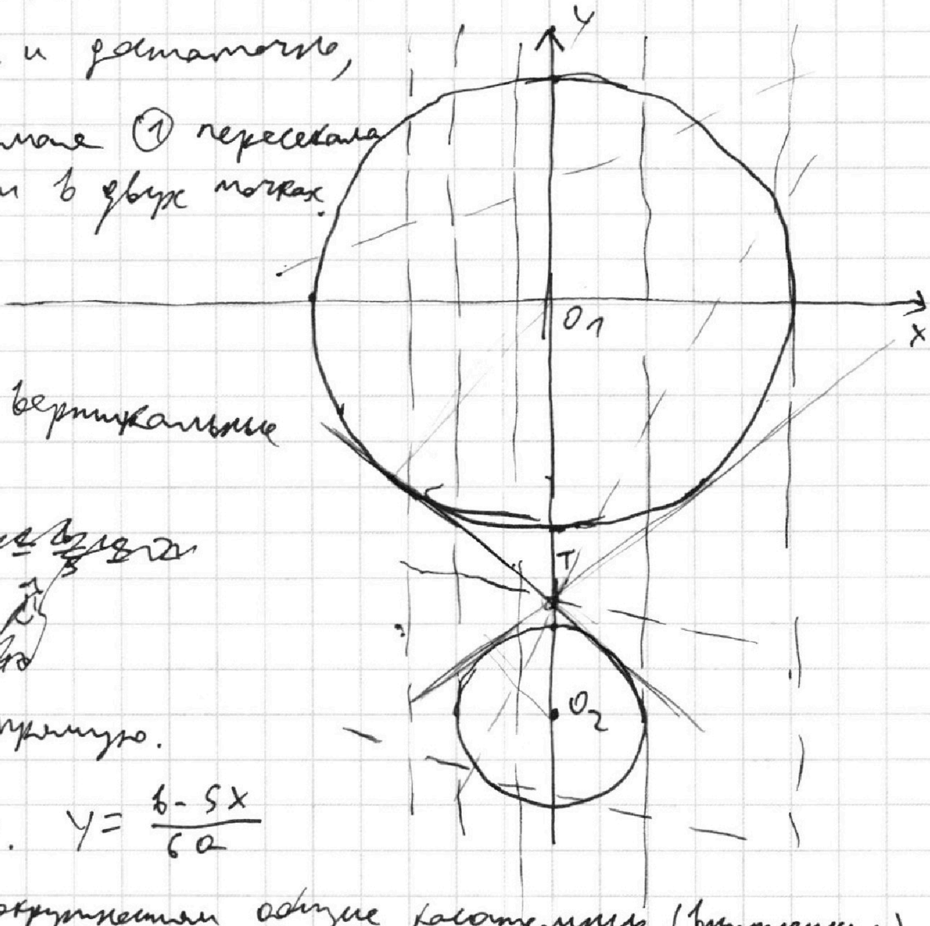
$$\begin{cases} 5x+6ay-6=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

$$x^2+y^2+18y+77 = y^2+18y+81+x^2-4 = x^2+(y+9)^2-4$$

Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 5x+6ay-6=0 \quad (1) \\ (x^2+y^2-25)(x^2+(y+9)^2-4)=0 \end{cases}$$

Необходимо и достаточно,



чтобы прямая (1) пересекала обе окружности в двух точках.

Пусть $a=0$

$5x-6=0$

$x=\frac{6}{5}$. Это вертикальные

прямые. ~~...~~

$6=0$ задает ~~...~~

проходящую прямую.

Пусть $a\neq0$. $y=\frac{6-5x}{6a}$

Проведём к окружностям общие касательные (внутренние)

Пусть центр верхней окружности - ~~...~~ точке O_1, центр

нижней - O_2, ~~...~~ точке пересечения касательных

T, ~~...~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ a > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \\ a < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{5}{6} < \frac{4\sqrt{2}}{7}a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35\sqrt{2}}{48} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ a > -\frac{35\sqrt{2}}{48} \end{cases} \end{array}\right.$$

$a = 0$ подходит.

Ответ: $\left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

~~Приме~~ $x \neq 1,\ y \neq 2$

~~Исходная система равносильна системе~~

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11} x} - 5 \\ \log_{11}^4\left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}y} 11} = -\frac{13}{3}\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}y} 11} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{16}{3\log_{11} x} + 5 = 0 \\ \log_{11}^4\left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{16}{3}\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}y} 11} - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_x 11 \neq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}y} 11 \neq 0 \end{cases}$$

Сделаем замену $\frac{y}{2} = y_1$ и решим систему

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\log_{11} x} - 5 \\ \log_{11}^4 y_1 + \frac{1}{\log_{11} y_1} = -\frac{13}{3}\frac{1}{\log_{11} y_1} - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{11}^5 x - \frac{16}{3} = -5\log_{11} x \\ \log_{11}^5 y_1 + \frac{16}{3} = -5\log_{11} y_1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\log_{11}^4 x = 26$~~

Сделаем замену $\log_x 11 = u$, и решим систему
$\log_{y_1} 11 = v$

$$\begin{cases} \frac{1}{u^4} - 6u = -\frac{2}{3}u - 5 \\ \frac{1}{v^4} + v = -\frac{13}{3}v - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16}{3}u = \frac{1}{u^4} + 5 \\ \frac{16}{3}v + \frac{1}{v^4} + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{u^4} - \frac{16}{3}u + 5 = 0 \quad (1) \\ \frac{1}{v^4} + \frac{16}{3}u + 5 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

t - решение (1) $\Leftrightarrow$ $-t$ - решение (2)

$f(u) = 1 - \frac{16}{3}u^5 + 5u^4$

$$\frac{df}{du} = -\frac{80}{3}u^4 + 20u^3 = -\frac{20}{3}u^3(4u-3)$$

$u = 0$

$f(0) = 1$

$\forall u \leq \frac{3}{4}$ $f(u) > 0$

$f(100000) < 0 \Rightarrow f(u)$ имеет 1 корень (ненулевой)

Итак, тогда $\log_{11} X = -\log_{11} Y_1$

$\log_{11} XY_1 = 0 \Rightarrow XY_1 = 1 \Rightarrow XY = 2$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5 & (1) \\ \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3}(11^{-73}) - 5 & (2) \end{cases}$$

(1) ~~Область определ~~

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5 \Leftrightarrow$

$\log_{x^3}\frac{1}{121} = -\frac{2}{3}\log_x 11$

Пусть $x = 11$

$1 - 6 = -\frac{2}{3} - 5$ — не выполняется.

Тогда $\log_x 11 \neq 0$

Сделаем замену $\log_x 11 = u$ и решим ур-е

$\frac{1}{u^4} - 6u = -\frac{2}{3}u - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{u^4} - \frac{16}{3}u + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{u^4} - 16u + 15 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3 - 16u^5 + 15u^4}{u^4} = 0$

$f(u) = -16u^5 + 15u^4 + 3$

$f'(u) = -80u^4 + 60u^3 = -20u^3(4u - 3)$

$\widehat{u_1u_2u_3u_4u_5} = 0$

$u^5 - \frac{15}{16}u^4 - \frac{3}{16} = 0$

$1 - \frac{16}{3}u^5 + 5u^4 = 0$

$\frac{1}{u^4} - \frac{16}{3}u + 5 = 0$

$\frac{1}{v^4} + \frac{16}{3}v + 5 = 0$

$\frac{1}{u^4} - \frac{1}{v^4} - \frac{16}{3}(u + v) = 0$

$v^4 - u^4 - \frac{16}{3}(u + v) = 0$

$(v - u)(v + u)(v^2 + u^2) - \frac{16}{3}(v + u) = 0$

$(v - u)(v^2 + u^2) - \frac{16}{3} = 0$

$v^3 - v^2u + vu^2 - u^3 = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [X] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1

$a = a_1 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$,

$b = b_1 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$

$c = c_1 \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$, $c_1 \not\vdots 2$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{-\frac{2}{3}}{\log_{11} x} - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{\frac{16}{3}}{\log_{11} x} = -5$

$\log_{11}^5 x + 5\log_{11} x - \frac{16}{3} = 0$

$\log_{11}^5 \left(\frac{1}{2}y\right) + 5\log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{16}{3} = 0$

$\log_{11}^5 x + \log_{11}^5\left(\frac{1}{2}y\right) + 5\log_{11}\left(\frac{xy}{2}\right) = 0$

$\log_{11}\left(\frac{xy}{2}\right)\left(\log_{11}^4 (x) - \log_{11}^3 x \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{11}^2 x \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{11} x \log_{11}^3\left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{11}^4\left(\frac{y}{2}\right) + 5\right)$

$\log_{11}\left(\frac{xy}{2}\right)\left(\left(\frac{\log_{11} x}{\log_{11}\frac{y}{2}}\right)^4 +\right.$

$\log_{11}\left(\frac{xy}{2}\right)\left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 6\right) = 0$

$(t-1)(t^2+1) + 2$

$(t-1)(t^2+1)$

$\log_{11}\left(\frac{xy}{2}\right)\left(\log_{11}^4 x + \log_{11}^4\left(\frac{y}{2}\right) - \log_{11}\left(\frac{xy}{2}\right)\left(\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 \frac{y}{2}\right) = \right.$

$=$

13 5 12

12 5 13

10 5 15

9 6 15

8 5 17

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X					

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_{11} x = 4$

$\log_{11} y_1 = 2$

$2\cdot 2 = 4$

Пусть $\log_{11} x + \log_{11} y_1 = a$

$\log_{11} x \cdot \log_{11} y_1 = b$

$\log_{11}^4 x + \log_{11}^4 y_1 = (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1)^2 -$

$u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4 =$

$= (u^2+v^2)^2 - 2u^2v^2 - u^3 v - u v^3 + u^2v^2 = (u^2+v^2)^2 - u^3 v - uv^3 - u^2v^2 =$

$((u+v)^2 - 2uv)^2 - u^3 v - uv^3 - u^2v^2$

$= (a^2-2b)^2 - uv(u^2+v^2) - u^2v^2 =$

$= (a^2-2b)^2 - b(a^2-2b) - b^2$

$= (a^2-2b)(a^2-3b) = a^4 - 5ba^2 + 6b^2 - b^2 =$

$= a^4 - 5ba^2 + 5b^2 = 0$

$a^2 = \frac{5b \pm \sqrt{20b^2}}{2} = \frac{5b \pm 2\sqrt{5}\, b}{2}$

$\cancel{(a^2+b)(a^2-6b)}$

$\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1 - 4\log_{11} x \log_{11} y_1 = 0$

$\log_{11} x \log_{11} y_1 = \log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y$

$(\log_{11} x + \log_{11} y_1)^2 = \frac{(5 \pm 2\sqrt{5})}{2} \log_{11} x \log_{11} y_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = a_1 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$, $a_1 \not\vdots 2$, $a_1 \not\vdots 3$, $a_1 \not\vdots 5$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$

$b = b_1 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$, $b_1 \not\vdots 2$, $b_1 \not\vdots 3$, $b_1 \not\vdots 5$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$

$c = c_1 \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$, $c_1 \not\vdots 2$, $c_1 \not\vdots 3$, $c_1 \not\vdots 5$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{Z}$

$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall i\ \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16 \end{cases}$$

$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 36$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$

Пусть такая

$\frac{1}{u^4} - 6u = -\frac{2}{3}u - 5$

$\frac{1}{v^4} + v = -\frac{13}{3}v - 5$

$\frac{1}{u^4} - \frac{16}{3}u - 5 = 0$

$\frac{1}{v^4} + \frac{16}{3}v - 5 = 0$

$\frac{1}{u^4} - \frac{1}{v^4} + \frac{16}{3}(u - v) = 0$

$\frac{v^4 - u^4}{u^4 v^4} + \frac{16}{3}(u - v) = 0$

$y = -6x$

$y \geq -6x \quad (x < 0)$

$\frac{1}{u^4} + \frac{1}{v^4} + \frac{16}{3}(v - u) - 10 = 0$

$\frac{v^4 + u^4}{u^4 v^4} + \frac{16}{3}(v - u)$

$5x + 6ay - 1 = 0$

$6ay = 6 - 5x$

$y = \frac{6 - 5x}{6a}$

$[\ 5x = 6$

min $x + y$

$-15; 30$

$0; 0$

$y = -6x$

min $y + 6x = 0$

min $x + y$

$t + 5x = 0$

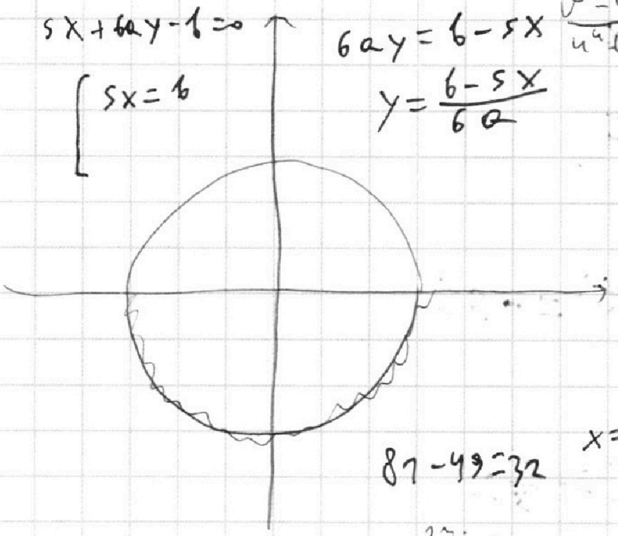
$102 = x + 6y$

max $x + y$

$x \leq 0$

$102 = t + 5y$

$t \geq 0$



$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \frac{3\pi + 4\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$87 - 49 = 32$

$17; 0$

$7; 30$

$\frac{7}{3}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{14 + 3}{6}\pi = \frac{17}{6}\pi$

$y_2 + y_1 + 48 = 6(x_2 + y_2)$

$-15a = 30$

$3a + 6 = 0$

$a = -6$

$13a + 6 = 0$

$b = 108$

$-6x + 102 = y$

$u = \frac{3}{4}$

$3 - \frac{16 \cdot 3^5}{4^5} + \frac{15 \cdot 3^5}{4^4} =$

$= 3 - \frac{3^5}{2^6} + \frac{3^6 \cdot 5}{2^8} = \frac{2^8 - 3^5 \cdot 2^2 + 3^6 \cdot 5}{2^8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 [X] 4 5 [X] 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\Leftrightarrow (\log_{11} x + \log_{11} y_1)(\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \log_{11} y_1 + \log_{11}^2 x \log_{11}^2 y_1 -$

$- \log_{11} x \log_{11}^3 y_1 + \log_{11}^4 y_1 + 5) = 0$ ①

$\log_{11}^4 x + \log_{11}^4 y_1 = (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1)^2 - 2\log_{11}^2 x \log_{11}^2 y_1$

① $\Leftrightarrow \log_{11} xy_1 ((\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1)^2 - \log_{11} x \log_{11} y_1 \cdot$

$\cdot (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1 + \log_{11} x \log_{11} y_1) + 5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{11} xy_1 ((\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1)^2 - \log_{11} x \log_{11} y_1 ((\log_{11} x + \log_{11} y_1)^2 -$

$- \log_{11} x \log_{11} y_1) + 5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{11} xy_1 ((\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1)^2 - \log_{11}$

Сделаем замену $\log_{11} x = u$

$\log_{11} y_1 = v$

И введём функции $f(t) = t^5 + 5t + \frac{16}{3} = 0$

$g(t)$