МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \cdot p_1$, $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \cdot p_2$,

$c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} p_3$, где $\forall i: \alpha_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \geq 0$,

$\beta_i \in \mathbb{Z}$, $\beta_i \geq 0$, $\gamma_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i \geq 0$, $p_i \in \mathbb{N}$,

$(p_i, 2) = (p_i, 3) = (p_i, 5) = 1$

По усл: $abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} \cdot p_1 p_2 p_3$

$$\min(abc) \Leftrightarrow \begin{cases} \min(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i) \ \forall i, \\ \min(p_1 p_2 p_3) \end{cases}$$

Заметим, что условие не зависит от выбора

$p_1, p_2, p_3 \Rightarrow \min(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) = 1$ $(p_1 = p_2 = p_3 = 1)$

По условию:

$$\begin{matrix} 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \mid ab \\ 2^{13} 3^{15} 5^{18} \mid bc \\ 2^{14} 3^{17} 5^{43} \mid ac \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 7 \ (1) \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 11 \ (2) \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 14 \ (3) \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 13 \ (4) \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 15 \ (5) \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 18 \ (6) \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 \ (7) \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 17 \ (8) \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 43 \ (9) \end{cases}$$

$(1)+(4)+(7)$: $2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geq 7+13+14$

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 17$

$(2)+(5)+(8)$: $2(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) \geq 11+15+17$

$\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq 21,5 \Rightarrow \min(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) = 22$

$(3)+(6)+(9)$: $2(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3) \geq 14+18+43 \Rightarrow \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 37,5$

$\Rightarrow \min(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3) = 38$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\Rightarrow$ №1 (продолжение

$\min(abc) = 2^{17} 3^{22} 5^{38}$

Ответ: $2^{17} 3^{22} 5^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$\arccos(\sin x) \in [0; \pi]\ \forall x \Leftrightarrow 5\arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]\ \forall x$

$\Rightarrow 5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi]$

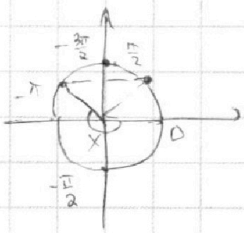
$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$, $\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$

$\frac{5\pi}{2} - \arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\pi = \arcsin(\sin x) + x$

1) При $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = -x - \pi$



$\pi = -\pi - x + x$

$\pi \neq -\pi$, нет корней

~~2). $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = -x - \pi$~~

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = x$

$2x = \pi$

$x = \frac{\pi}{2}$

3) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = -x + \pi$

$\pi = -x + \pi + x$

$\pi = \pi$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ – мн-во корней

4) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$: $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$

$\pi = x - 2\pi + x$

$x = \frac{3\pi}{2}$

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

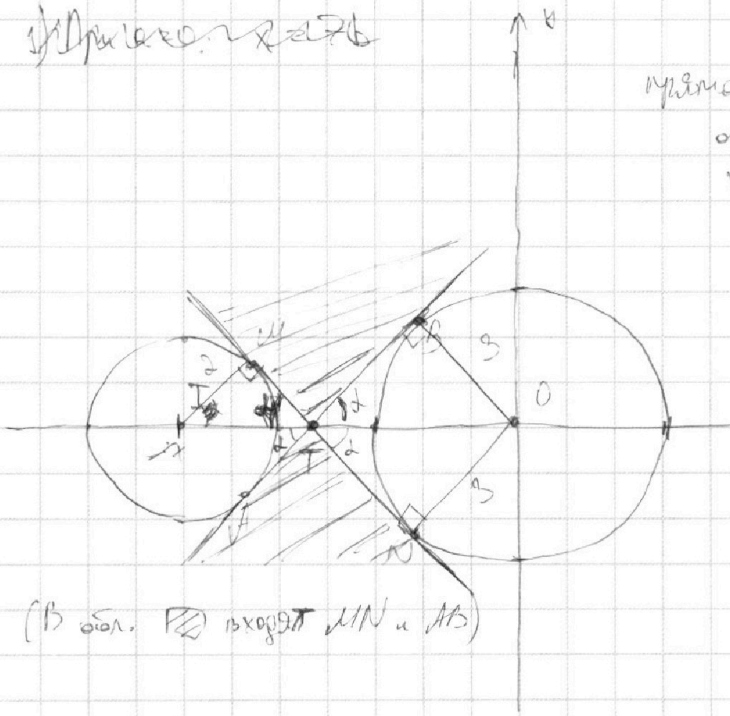
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 $\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ ((x+7)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3ay-7b+x=0 \ (1) \\ \left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=4 \ (2) \\ x^2+y^2=9 \ (3) \end{array}\right. \end{cases}$

~~1) При a=0: x=7b~~



Решения системы — пересечения прямой, задаваемой (1) и окр-ей, задаваемых (2) и (3). Прямая пересек. одну окр-ть в ≤ 2 точках $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 4 решения, когда прямая пересечёт обе окр-ти в 2-ух точках

(В обл. [штриховка] входят MN и AB)

I) $a=0$: $x=7b$ — вертик. прямая на Oxy, но она может пересечь только одну окр-ть $\Rightarrow$ не подходит

II) $3ay-7b+x=0$

$y=-\frac{x}{3a}+\frac{7b}{3a}$ Пусть $q=-\frac{1}{3a}$, $p=\frac{7b}{3a}$

Тогда можно переформ. задачу:

При каких q: $\exists p$: система имеет 4 реш-ия

Пусть AB и MN — кас-ые к окр-ям (2) и (3)

Заметим, что p влияет только на расположение прямой, а q — к-нт угла наклона (тангенс).

Рассмотрим пучок прямых из т. T. Прямые, проходящие через [штриховка] имеют ≤ 2 пересеч. с окр-ми, а так же все прямые им параллельные. Остальные же имеют 4 пересеч-ия, а все им пар-ые можно в эту точку T перенести параллельно $\Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (прод.)

$\Rightarrow$ ~~все~~ т.е. для всех прямых с k-ом тех прямых найдётся такое p, что будет 4 реш-ия (причём только для них)

$$\Rightarrow p \in (-\operatorname{tg}\alpha; \operatorname{tg}\alpha), \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{BO}{BT}$$

$$\triangle IMT \sim \triangle TBO \Rightarrow \frac{IT}{TO} = \frac{IM}{OB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{IT+TO}{TO} = \frac{5}{3} = \frac{IO}{TO} \Rightarrow TO = \frac{3}{5} IO = \frac{21}{5}$$

$$TB = \sqrt{TO^2 - BO^2} = \frac{\sqrt{21^2 - (3\cdot 5)^2}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{7^2-5^2} = \frac{3}{5}\sqrt{49-25} = \frac{3}{5}\sqrt{24}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{\frac{3}{5}2\sqrt6} = \frac{5}{2\sqrt6}$$

$$-\frac{5}{2\sqrt6} < \frac{-1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt6}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3a} > -\frac{5}{2\sqrt6} \\ \frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt6} \end{cases}$$

~~$-\frac{15}{2\sqrt6} < \frac{1}{a} < \frac{15}{2\sqrt6}$~~

~~$-\frac{2\sqrt6}{15} < a < \frac{2\sqrt6}{15}$~~ ~~Ответ $a \in (-\frac{2\sqrt6}{15}$~~

$$\begin{cases} \dfrac{1 + \frac{15}{2\sqrt6}a}{a} > 0 \\ \dfrac{1 - \frac{15}{2\sqrt6}a}{a} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\frac{2\sqrt6}{15} + a}{a} > 0 \\ \dfrac{\frac{2\sqrt6}{15} - a}{a} < 0 \end{cases}$$

$-\frac{2\sqrt6}{15}$ 0 a

0 $\frac{2\sqrt6}{15}$ a

$$a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt6}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt6}{15}; +\infty\right)$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt6}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt6}{15}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}7^3 - 4 \\ \log_7^4(y) + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 6x} - 4 \\ \log_7^4(y) - \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2}\frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

Пусть $u = \log_7 6x$, $v = \log_7 y$, тогда $u, v \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow xy = \frac{7^{u+v}}{6}$, нужно найти все $u+v$

$$\begin{cases} 2u^5 + 8u = 7 \\ 2v^5 + 8v = -7 \\ uv \neq 0 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \begin{cases} 2(u^5+v^5) + 8(u+v) = 0 \\ uv \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)(u^4 - uv^3 + u^2v^2 - u^3v + v^4 + 4) = 0 \\ uv \neq 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} u + v = 0 \quad (1) \\ u^4 - uv^3 + u^2v^2 - u^3v + v^4 + 4 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

2) $(u^2 + v^2 - \sqrt{2}uv)(u^2 + v^2 + \sqrt{2}uv) - uv(u^2 + v^2 - uv) + 4 = 0$

Пусть $\alpha = v^2 + u^2$, $\alpha > 0$

$\beta = uv$, тогда $(u+v)^2 = \alpha + 2\beta$

$$(\alpha - \sqrt{2}\beta)(\alpha + \sqrt{2}\beta) - \beta(\alpha - \beta) + 4 = 0$$

$$\alpha^2 - 2\beta^2 - \beta\alpha + \beta^2 + 4 = 0$$

$$\alpha^2 - \beta^2 - \beta\alpha + 4 = 0$$

$D = \beta^2 - 4(-\beta^2 + 4) = \beta^2 + 4\beta^2 - 16 = 5\beta^2 - 16$,

$$\alpha = \frac{\beta \pm \sqrt{5\beta^2 - 16}}{2}$$

$$\alpha + 2\beta = \frac{5\beta \pm \sqrt{5\beta^2 - 16}}{2} > 0 \Rightarrow \alpha + 2\beta = \frac{5\beta \pm \sqrt{5\beta^2 - 16}}{2}$$

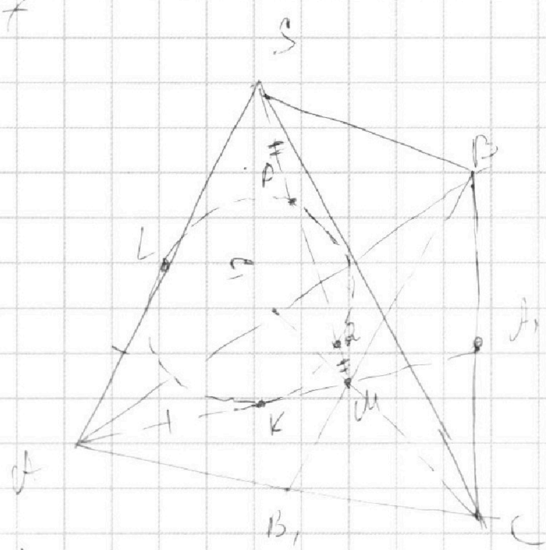
1) $u + v = 0 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



1) Рассмотрим сечение пл-ью (ASM) – ω – окр-ть, кас-щаяся в т. L и R от-ов AS и AM соот-но и перес-ая SM в т. P и Q

2) $KM^2 = MQ \cdot MP$ (по св-ву отр-ов кас-ых)

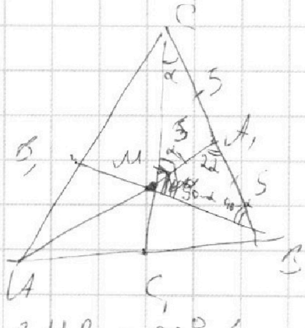
$LS^2 = SQ \cdot SP$; $SQ = SP + PQ = MQ + PQ = MP$

$LS^2 = MQ \cdot MP = RM^2$,

$AL = AR$ (т.к. отр-ки кас-ых из одной т. A)

$\Rightarrow AS = AL + LS = AR + RM = AM = 10$

3)



$A_1M = \frac{1}{2} AM = 5$ (по св-ву центра тяжести M)

$CA_1 = A_1B = \frac{BC}{2} = 5$

$\triangle CMB$:

A_1M – медиана, $A_1M = CA_1 = A_1B$

$\Rightarrow \angle CMB = 90^\circ$ (по пр-ку)

$S(CMB) = 2S(CA_1M)$ (т.к. A_1M – медиан) $= \frac{S(ABC)}{6} \cdot 2 = \frac{S(ABC)}{3} = 20$ (по св-ву медиан)

$\frac{1}{2} CM \cdot MB = 20 \Rightarrow CM \cdot MB = 40$, по т. Пифагора

$CM^2 + MB^2 = 10^2 \Rightarrow (CM + MB)^2 = 140$, $(CM - MB)^2 = 60$

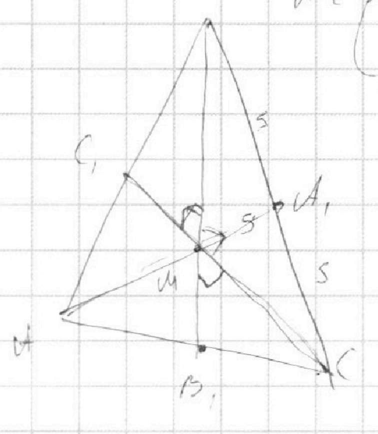
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\triangle ABC$:



~~По т. Пифагора:~~

~~$AC = 2B_1C = 2\sqrt{MC^2 + MB_1^2}$,~~

~~$AB = 2BC_1 = 2\sqrt{MC_1^2 + BM^2}$~~

~~По ф. Герона находим~~

$\frac{h_A \cdot BC}{2} = 60 \Rightarrow h_A = \frac{120}{BC} = 12$

$\Rightarrow$ $\operatorname{tg}\alpha =$ $\angle S(BC)A = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{15}{24}\right)$

Ответ: а) 15, $\frac{3}{2}(\sqrt{35} - \sqrt{15})$, $\frac{3}{2}(\sqrt{35} + \sqrt{15})$

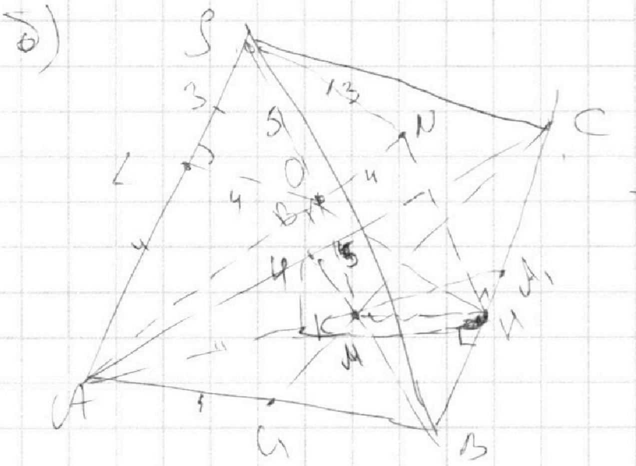
б) $2\operatorname{arctg}\left(\frac{15}{24}\right)$

$$\begin{cases} CM+MB=2\sqrt{35} \\ CM-MB=2\sqrt{15} \end{cases} \Rightarrow CM=\sqrt{35}+\sqrt{15},\ MB=\sqrt{35}-\sqrt{15}$$

По св-ву медиан: $B_1M=\frac{1}{2}BM \Rightarrow BB_1=\frac{3}{2}BM=\frac{3}{2}\cdot(\sqrt{35}-\sqrt{15})$

аналогично $CC_1=\frac{3}{2}(\sqrt{35}+\sqrt{15})$, $AA_1=15$

б)



Пусть O — ц-р Ω_2

$OM=ON=OL=4$ — радиусы Ω,

$ON\perp(BCS)$, $OK\perp(ABC)$

$\Rightarrow ON, OK\perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow BC\perp(OKN) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Пусть $H=BC\cap(OMN) \Rightarrow BC\perp KH, NH \Rightarrow$

$\Rightarrow$ угл $\angle S(BC)A=\angle NHK$

$\Rightarrow$ Пусть $\alpha=\angle OHK \Rightarrow$ угол $\angle S(BC)A=2\alpha$ (т.к. $\Delta ONH=\Delta OKH$ по III пр-ку ($NH=HK$, $OK=ON$))

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{KH}$ (т.к. $OK\perp(ABC)$, то ΔOKH — прямоуг.)

$\frac{KH}{h_A}=\frac{KA_1}{AA_1}$ (из подобия) $\Rightarrow KH=\frac{KA_1}{AA_1}h_A$ (h_A - высота в ΔABC из т. A)

$SL=SN=3$ (т.к. кас-ые из одной точки S)

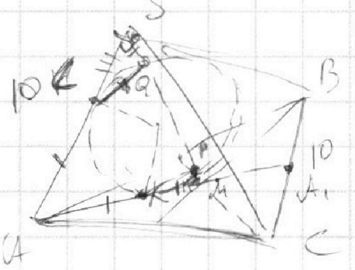
$OM=5$ (из симметрии отн-но AC)

$\Rightarrow KM=3=\sqrt{OM^2-OK^2}$ (по т. Пифагора), $KA_1=$
$=KM+MA_1=8 \Rightarrow \frac{KA_1}{AA_1}=\frac{8}{15} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{KH}=\frac{4AA_1}{h_A A_1K}=$
$=\frac{15}{2h_A}$, $\operatorname{tg}\angle S(BC)A=2\operatorname{arctg}\alpha=2\operatorname{arctg}\left(\frac{15}{2h_A}\right)$

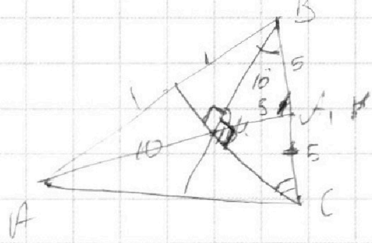
Черновик

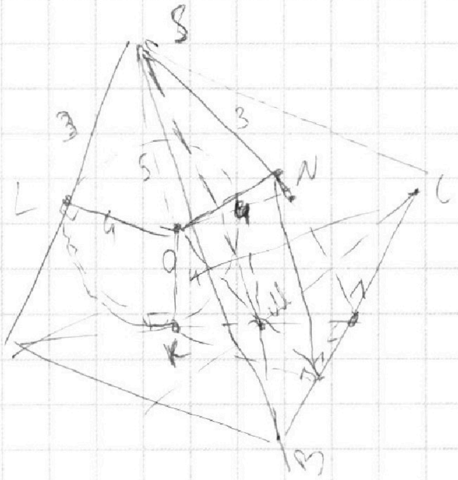
$S(ABC) = 60$

$AS = AM$



$AM = 10 \to MA_1 = 5$





$BC \perp (OKN)$

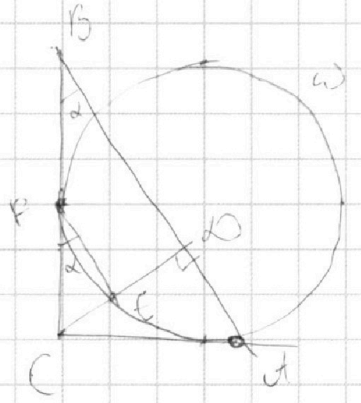
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



1) Заметим, что BC кас-ся ω $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $CF = CA$, как отр-ки кас-ых

2) $CD = \sqrt{BD \cdot DA} =$

$= \sqrt{BD(AB - BD)} = \sqrt{BD \cdot 0,3 \cdot BD}$

$= \sqrt{0,3}\, BD$

По т. Пифагора:

3) $BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = BD\sqrt{1,3}$,

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{1,3^2 - 1,3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

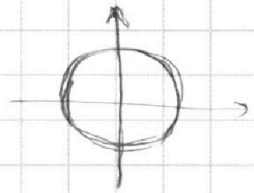
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик



Б4 $a = ? : \exists b :$ 4 решения

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ ((x+7)^2 + y^2 + 45 - 49 - 4)(x^2+y^2-9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ \left[\begin{array}{l} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array}\right. \end{cases}$$

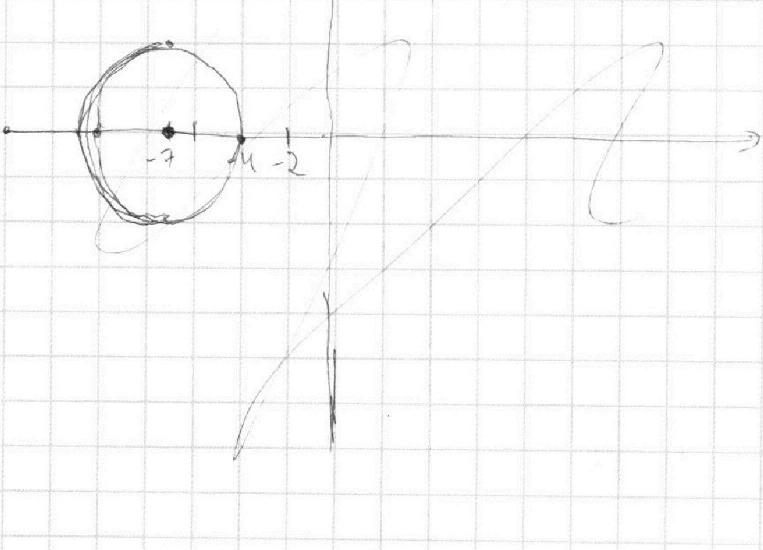
← прямой, с любыми k-ми по сути
… 3 …

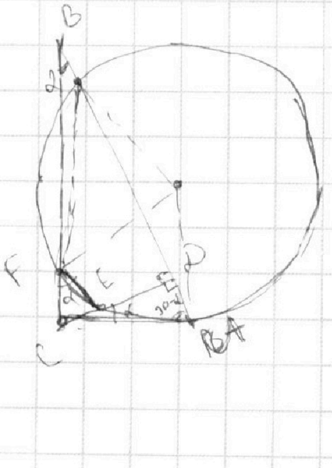
← окр-ти

I) $a = 0$: $x = 7b$ $\nexists$ X

II) $a \neq 0$. Пусть $\frac{7b}{3a} = q$, $-\frac{1}{3a} = p$

$y = px - \frac{q}{p}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

a, b, c $\quad 2^7 3^{11} 5^{14} | ab$, $2^{13} 3^{15} 3^{18} | bc$,

$2^{14} 3^{17} 5^{43} \| ac$, $\quad \min(abc) = ?$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}$, b, c аналогично

$\min(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = ?$ $\forall i$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 7$ $\qquad \beta_1 + \gamma_1 \geq 13$

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 11$ $\qquad \beta_2 + \gamma_2 \geq 15$

$\alpha_3 + \beta_3 \geq 14$ $\qquad \beta_3 + \gamma_3 \geq 18$

$\gamma_1 + \alpha_1 \geq 14$

$\gamma_2 + \alpha_2 \geq 17$

$\gamma_3 + \alpha_3 \geq 43$

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 14 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 18 \\ \gamma_3 + \alpha_3 \geq 43 \end{cases} \quad (+)$$

$\beta_3 \geq 18 - \gamma_3$

$\beta_3 \geq 14 - \alpha_3$ $\quad (+)$

$\beta_3 \geq 9 + 7 - \frac{\alpha_3 + \gamma_3}{2} \geq 16 - \frac{43}{2}$ $\quad 21,5$

$2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) \geq 7 + 9 + \frac{43}{2}$

№ 3 $\quad 5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\in [0; \pi] \Rightarrow 5\arccos\ldots \in [0; 5\pi]$

$\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi]$

$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ и Разобрать случаи

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$u^4+v^4-uv(v^2-uv+u^2)+4=0$

$u^4+2u^2v^2+v^4-2u^2v^2=(u^2+v^2-\sqrt{2}uv)(u^2+v^2+\sqrt{2}uv)$

$\alpha=u^2+v^2$

$\beta=uv$

$\alpha+2\beta=(u+v)^2$

$(\alpha-\sqrt{2}\beta)(\alpha+\sqrt{2}\beta)-\beta(\alpha-\beta)+4=0$

$\alpha^2-2\beta^2+\beta^2-\alpha\beta+4=0$

$\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2+4=0$

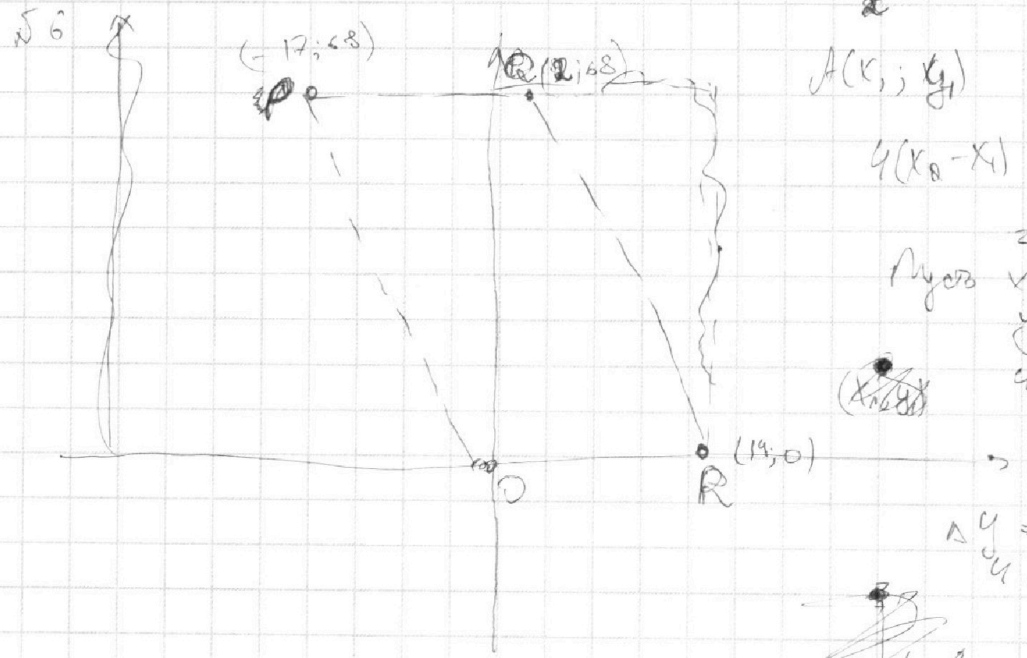
$\alpha=\frac{\beta+\sqrt{4\beta^2+4\beta^2}}{2}=\frac{\beta}{2}+\sqrt{\beta+\beta^2}$

~~$\alpha^2+2\alpha\beta-3\alpha\beta-\beta^2=0$~~

$\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2+4=0$

$\alpha=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\beta^2-16}}{2}$

№6



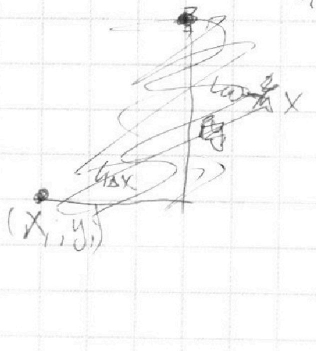
$A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$

$4(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=40$

Пусть $x_2=\Delta x+x_1$, $y_2=\Delta y+y_1$

$4\Delta x+\Delta y=40$

$\Delta y=40-4\Delta x$

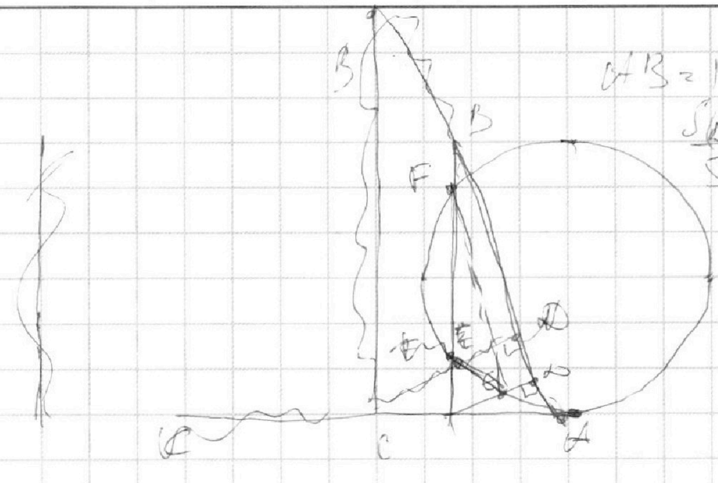


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



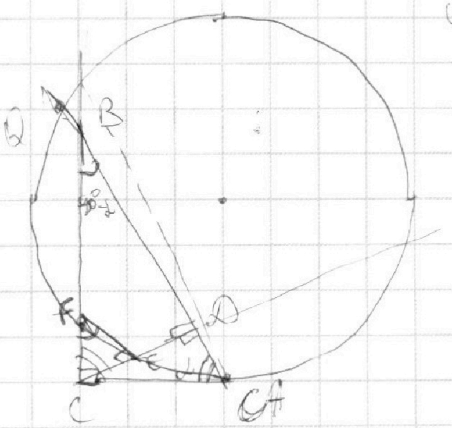
$AB = 1{,}3BD$

$\frac{S(ACD)}{S(CEF)} = ?$

$\smile AQ = 2\alpha$

$AD = 0{,}3BD$

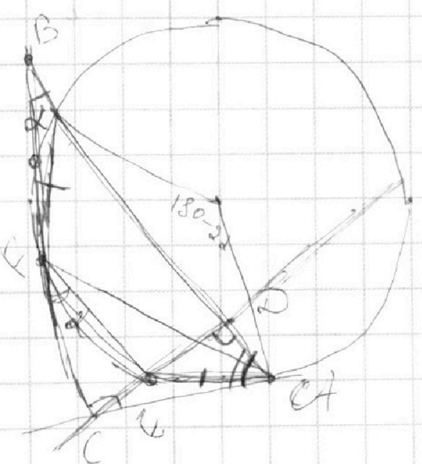
$CD = \sqrt{1{,}3 \cdot 0{,}3}\,BD$

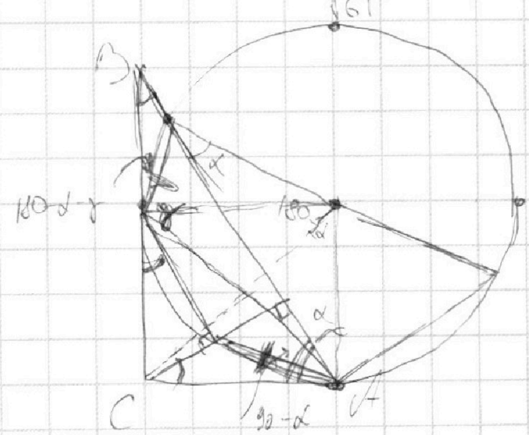


$BC = \sqrt{1 - 1{,}3 \cdot 0{,}3}\,BD$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-1{,}3 \cdot 0{,}3}} = \frac{10}{\sqrt{61}}$

$\frac{13 \cdot 3}{100} = \frac{39}{100}$





$90 - \alpha - (180 - \gamma) =$

$= \gamma - \alpha + 90°$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

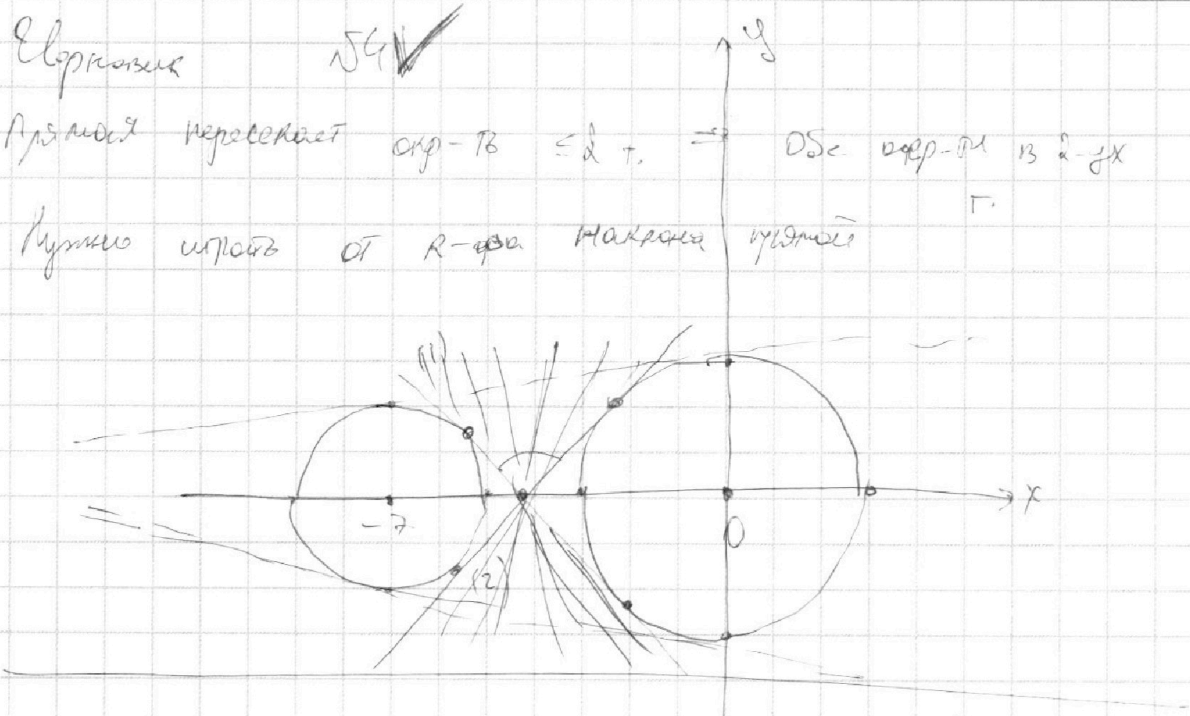
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик №4

Прямая пересекает окр-ть ≤ 2 т. ⇒ Общ. окр-ти в 2-ух т.

Нужно играть от k-та наклона прямой



№5 $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}7^3 - 4$

$\log_7^4(6x) - \dfrac{2}{\log_7 6x} = \dfrac{3}{2}\log \dfrac{1}{\log_7 6x} - 4$

$u^4 - \dfrac{2}{u} = \dfrac{3}{2u} - 4 \,|\, 2u$

$v^4 + \dfrac{6}{v} = \dfrac{5}{2v} - 4 \,|\, 2v$

$u + v = \log_7 6x + \log_7 y = \log_7 6xy$

$\dfrac{7^{u+v}}{6} = xy \Leftrightarrow u + v = ?$

$2u^5 - 4 = 3 - 8u$
$2v^5 + 12 = 5 - 8v$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} 2u^5 + 8u = 7 \\ 2v^5 + 8v = -7 \end{cases} \quad (+)$$

$$\cancel{2}(u^5+v^5) + \cancel{8}^{4}(u+v) = 0$$

$$u^5+v^5 = -4(u+v)$$

$$(u^5+v^5) = (u+v)(u^4 - uv^3 + u^2v^2 - u^3v + v^4)$$

$$(u+v)(u^4 - uv^3 + u^2v^2 - u^3v + v^4) = u^5+v^5 +$$

$$+ \cancel{u^2v^3} + \cancel{u^3v^2} - \cancel{u^4v} + uv^4 - uv^4 + \cancel{u^2v^3} - \cancel{u^3v^2} + u^4v$$

$$(u+v)(u^4 - uv^3 + u^2v^2 - u^3v + v^4) + 4(u+v) = 0$$

$$(u+v)(u^4 - uv^3 + u^2v^2 - u^3v + v^4 + 4) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} u+v=0 \quad (1) \Rightarrow x+y=\frac{1}{6} \\ u^4 - v^3u + u^2v^2 - u^3v + v^4 + 4 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

2) $u^4+v^4 + vu(uv - v^2 - u^2) + 4(v+u) = 0$

$$u^4+v^4 - uv\frac{(v^3+u^3)}{v+u} + 4(v+u) = 0 \quad \Big| \cdot v+u$$

$$\frac{u^5+v^5}{u+v} + \frac{4(v+u)^2}{u+v} = 0$$

$$u^5+v^5 + u^4v + v^4u - uv^4 - u^4v + 4(u+v)^2 = 0$$

$$u^5+v^5 + 4(u+v)^2 = 0$$

$$4(u+v)^2 - 4(u+v) = 0$$

$$(u+v)(u+v-1) = 0$$

$$u+v=1$$

$$u^4 - v^3u + u^2v^2 - u^3v + v^4 + 4 = 0$$

$$\geq 3u^2v^2 - v^3u - u^3v = 3uv(3uv - v^2 - v^2)$$