



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



51

Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \cdot p_1$, $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \cdot p_2$,
 $c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} \cdot p_3$, где $\forall i: d_i \in \mathbb{Z}, d_i \geq 0$,

$\beta_i \in \mathbb{Z}, \beta_i \geq 0, \gamma_i \in \mathbb{Z}, \gamma_i \geq 0, p_i \in \mathbb{N}$,

$(p_i, 2) = (p_i, 3) = (p_i, 5) = 1$

По условию: $abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot p_1 p_2 p_3$

Дл. $\min(abc) \Leftrightarrow \begin{cases} \min(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) \forall i, \\ \min(p_1 p_2 p_3) \end{cases}$

Заметим, что условие не зависит от выбора

$p_1, p_2, p_3 \Rightarrow \min(p_1 p_2 p_3) = 1 (p_1 = p_2 = p_3 = 1)$

По условию:

$2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \mid ab$
 $2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \mid bc$
 $2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \mid ac$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 7 & (1) \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 11 & (2) \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 14 & (3) \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 13 & (4) \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 15 & (5) \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 18 & (6) \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 & (7) \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 17 & (8) \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 43 & (9) \end{cases}$

$(1) + (4) + (7): 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 7 + 13 + 14$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17$

$(2) + (5) + (8): 2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 11 + 15 + 17$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 21, 5 \Rightarrow \min(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = 22$

$(3) + (6) + (9): 2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) \geq 14 + 18 + 43 \Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 37, 5$
 $\Rightarrow \min(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) = 38$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

⇒ $\sum_{i=1}^n (a_i b_i)$ ≈ 17 ≈ 22 ≈ 30
 $\min(a_i b_i) \approx 2$ ≈ 3 ≈ 5

Ответ: 2^{17} 3^{22} 5^{30}

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



53

$$\text{arccos}(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\text{arccos}(\sin x) \in [0; \pi] \forall x \Leftrightarrow \text{arccos}(\sin x) \in [0; 5\pi] \forall x$$

$$\Rightarrow \text{arccos}(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi]$$

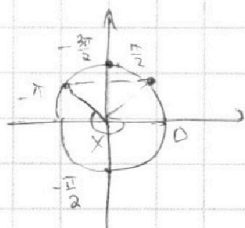
$$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right], \text{arccos}(\sin x) + \text{arcsin}(\sin x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \text{arccos}(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \text{arcsin}(\sin x)$$

$$\frac{5\pi}{2} - \text{arcsin}(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi = \text{arcsin}(\sin x) + x$$

1) Пусть $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$: $\text{arcsin}(\sin x) = -x - \pi$



$$\pi = -\pi - x + x$$

$\pi \neq -\pi$, нет корней

2) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $\text{arcsin}(\sin x) = x$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]: \text{arcsin}(\sin x) = x$$

$$2x = \pi$$

3) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$: $\text{arcsin}(\sin x) = -x + \pi$

$$\pi = -x + \pi + x$$

$$\pi = \pi, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] - \text{корней}$$

4) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$: $\text{arcsin}(\sin x) = x - 2\pi$

$$\pi = x - 2\pi + x$$

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

ОТВЕТ: $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

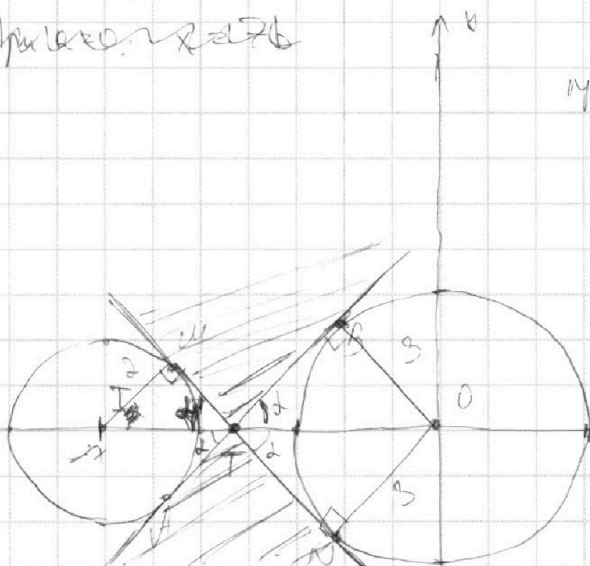


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Delta 4 \begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ ((x+2)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \begin{cases} 3ay - 7b + x = 0 \quad (1) \\ (x+2)^2 + y^2 = 4 \quad (2) \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (3) \end{cases}$$

Ищем касательные



(В бол. кр-е выходят MN и AB)

Решения системы — пересечение прямой, заданной (1) и окр-ей, заданной (2) и (3). Прямая пересекает одну окр-ю ≤ 2 точек \Rightarrow \Rightarrow 4 решения, когда прямая пересекает обе окр-ти в 2-ух точках

II) $a=0: x=7b$ — вертикаль.

Прямая на Ox, но она не пересекает только одну окр-ю \Rightarrow две подходящие

II) $3ay - 7b + x = 0$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

Пусть $q = -\frac{1}{3a}, p = \frac{7b}{3a}$

Всегда можно преобразм. задачу:

При каких a, b : $\exists p$: система имеет 4 решения

Пусть AB и MN — кас-ые к окр-ям (2) и (3)

Заметим, что p имеет только две расположения: прямая, а q — кас-ая к-ит угла наклона (тангенс)

Тогда рассмотрим пучок прямых из т. T

Прямые, проходящие через T имеют ≤ 2 касательных, а так же как все прямые из пучка параллельные

касательные не имеют 4-х точек пересечения, а все из пучка можно за B эту точку T перенести параллельно \Rightarrow

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

54 (чуж.)

⇒ $\rho \in (-\text{tg} \alpha; \text{tg} \alpha)$ для всех значений α в R -ом \forall ^{тех} ρ будет 4 решения (применяя только для них)

$$\Rightarrow \rho \in (-\text{tg} \alpha; \text{tg} \alpha), \quad \text{tg} \alpha = \frac{BO}{TO}$$

$$\Delta IMT \sim \Delta TBO \Rightarrow \frac{IT}{TO} = \frac{IM}{OB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{IT+TO}{TO} = \frac{5}{3} = \frac{IO}{TO} \Rightarrow TO = \frac{3}{5} IO = \frac{21}{5}$$

$$TB = \sqrt{TO^2 - BO^2} = \frac{\sqrt{21^2 - (3 \cdot 5)^2}}{5} = \frac{3}{5} \sqrt{7^2 - 5^2} = \frac{3}{5} \sqrt{49 - 25} = \frac{3}{5} \sqrt{24}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{TB}{TO} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\sqrt{6}} < \frac{1}{3a} < \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} < \frac{1}{3a} < \frac{1}{2\sqrt{6}} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{3a} < \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{15}{2\sqrt{6}} a > 0 \\ \frac{1}{a} - \frac{15}{2\sqrt{6}} a < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{15a}{15} + a > 0 \\ \frac{2\sqrt{6}}{15} - a < 0 \end{array} \right.$$

$$a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



55

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 7^3 - 4 \\ \log_7^4(y) + 6 \log_{y^2} 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 7^3 - 4 \\ \log_7^4(y) + 6 \log_{y^2} 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \frac{1}{\log_7(6x)} - 4 \\ \log_7^4(y) - \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

Пусть $u = \log_7 6x$, $v = \log_7 y$, тогда $u, v \neq 0 \Rightarrow xy = \frac{7^{u+v}}{6}$, нужно найти все u, v

$$\begin{cases} 2u^5 + 6u = 7 \\ 2v^5 + 6v = -7 \\ uv \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(u^5 + v^5) + 6(u+v) = 0 \\ uv \neq 0 \end{cases}$$

$$(u+v)(u^4 - uv^3 + u^2v^2 - u^3v + v^4) + 4 = 0$$

1) $u+v=0$ (1)

$$u^4 - uv^3 + u^2v^2 - v^3u + v^4 + 4 = 0$$

$$2) (u^2 + v^2 - \sqrt{2}uv)(u^2 + v^2 + \sqrt{2}uv) - uv(u^2 + v^2 - uv) + 4 = 0$$

Пусть $\alpha = u^2 + v^2$, $\alpha > 0$

$\beta = uv$, тогда $(u+v)^2 = \alpha + 2\beta$

$$(\alpha - \sqrt{2}\beta)(\alpha + \sqrt{2}\beta) - \beta(\alpha - \beta)^2 = 0$$

$$\alpha^2 - 2\sqrt{2}\beta\alpha - \beta\alpha + \beta^2 + 4 = 0$$

$$\alpha^2 - \beta^2 - \beta\alpha + 4 = 0$$

$$D = \beta^2 - 4(-\beta^2 + 4) = \beta^2 + 4\beta^2 - 16 = 5\beta^2 - 16$$

$$\alpha = \frac{\beta \pm \sqrt{5\beta^2 - 16}}{2}$$

$$\alpha + 2\beta = \frac{5\beta \pm \sqrt{5\beta^2 - 16}}{2} > 0 \Rightarrow \alpha + 2\beta = \frac{5\beta \pm \sqrt{5\beta^2 - 16}}{2}$$

1) $u+v=0 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

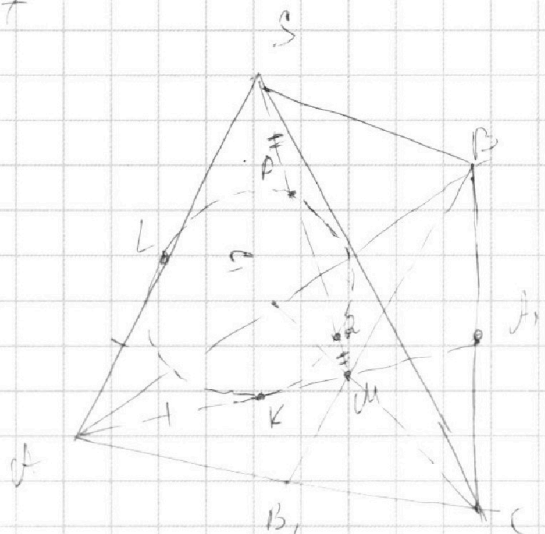
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



57



1) Рассмотрим четырехугольник $APBQ$ —

— $OPBQ$, кас-угол OPB

B т. L и R от OB

AS и AM (одн-угол)

и перес-ая SM в т. P и Q

2) $KM = MQ \cdot MP$ (по с-ву OPB кас-угол)

$LS = SQ = SP$; $SB = SP = PQ = MQ + PQ =$

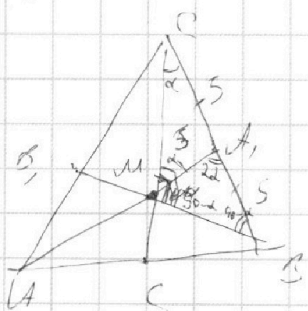
$LQ = MQ \cdot MP = KM$, $= MP$

$AL = AR$ (т.к. OPB кас-угол уг-ой окружн)

т. А)

$\Rightarrow AS = AL + LS = AK + KM = AM = IC$

3)



$d, M = \frac{1}{2} AM = 5$ (по с-ву медиан M)

$S_{AMB} = \frac{1}{2} AB = \frac{10}{2} = 5$

$\angle CMB = 90^\circ$ (т.к. d, M — медиана, $d, M = \frac{1}{2} AB$)

$\Rightarrow \angle CMB = 90^\circ$ (по пр-ву)

(т.к. d, M — медиана) $= \frac{S_{ABC}}{6} \cdot 2 = \frac{S_{ABC}}{3} = 20$

(по с-ву медиан)

$\frac{1}{2} CM \cdot MB = 20 \Rightarrow CM \cdot MB = 40$, по т. Пифагора

$CM^2 + MB^2 = 10^2 \Rightarrow (CM + MB)^2 = 140, (CM - MB)^2 = 60$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

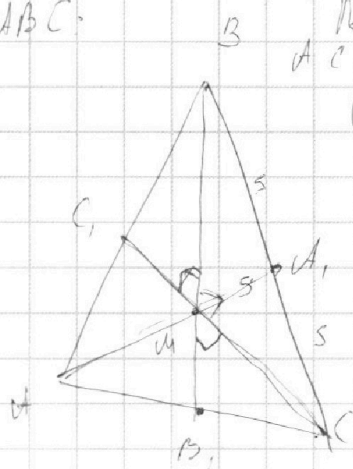
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC$



По т. Пифагора:
 $AC = 2B_1C_1 = 2\sqrt{AC_1^2 - OB_1^2}$
 $AB = 2BC_1 = 2\sqrt{AC_1^2 + BC_1^2}$

По т. Пифагора находим

$$\frac{h_A - BC}{2} = 60 \Rightarrow h_A = \frac{120}{BC} = 12$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = S(BC) \cdot h_A = 24 \cdot 12 = 288$$

Ответ: а) $15 \cdot \frac{3}{2} (\sqrt{35} - \sqrt{15})$ б) $\frac{3}{2} (\sqrt{35} + \sqrt{15})$

в) $24 \cdot 12 = 288$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

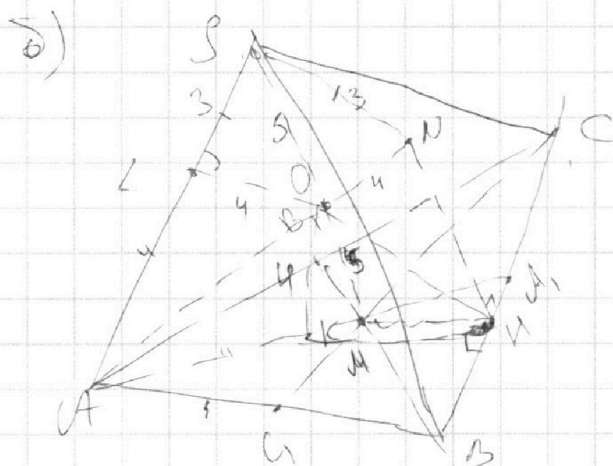
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} CM + MB = 2\sqrt{35} \\ CM - MB = 2\sqrt{15} \end{cases} \Rightarrow CM = \sqrt{35} + \sqrt{15}, MB = \sqrt{35} - \sqrt{15}$$

По СВ-му медиан: $h_B M = \frac{1}{2} BM \Rightarrow BB_1 = \frac{3}{2} BM = \frac{3}{2} (\sqrt{35} - \sqrt{15})$

аналогично $CC_1 = \frac{3}{2} (\sqrt{35} + \sqrt{15}), AA_1 = 15$



Пусть O - центр Ω

$OM = ON = OL = 4$ - радиусы Ω ,

$ON \perp (BCS), OL \perp (APC)$

$\Rightarrow ON, OL \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow BC \perp (OKN)$

\Rightarrow Пусть $H = BC \cap (OMN) \Rightarrow BC \perp KH, NH \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle S(BC)A = \angle NKH$

\Rightarrow Пусть $\alpha = \angle ONK \Rightarrow \angle S(BC)A = 2\alpha$ (т.к. $ON \perp BC$)
 $ON \perp BC \Rightarrow \triangle ONK \sim \triangle ONH$ (по кат. и гипотенузе)

$\tan \alpha = \frac{4}{KH}$ (т.к. $OK \perp (ABC)$, то $\triangle OKH$ - прямоугольн.)

$$\frac{KH}{h_A} = \frac{KA_1}{AA_1} \text{ (из подобия)} \Rightarrow KH = \frac{KA_1}{AA_1} h_A \text{ (} h_A \text{ - высота } \triangle ABC \text{ из т. } A_1 \text{)}$$

$OL = ON = 3$ (т.к. кас-кас из одной точки S)

$OM = 5$ (из симметрии относительно AC)

$\Rightarrow KM = 3 = \sqrt{OM^2 - OK^2}$ (по т. Пифагора), $KA_1 =$

$$= KM + MA_1 = 8 \Rightarrow \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{8}{15} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{KH} = \frac{4 AA_1}{h_A KA_1} =$$

$$= \frac{15}{2 h_A}, \text{ т.к. } \angle S(BC)A = 2\alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{15}{2 h_A}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

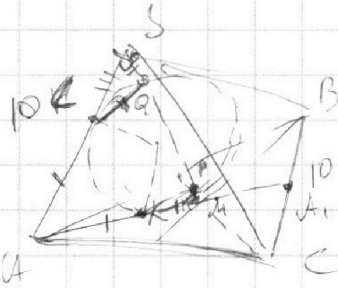
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



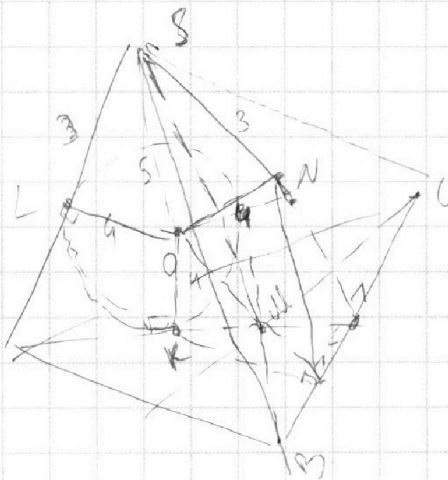
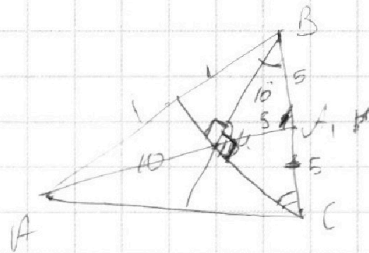
Черновик



$$S(\triangle ABC) = 60$$

$$AS = AM$$

$$AM = 10 \rightarrow \text{высота} = 5$$



$$BC \perp (OKN)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

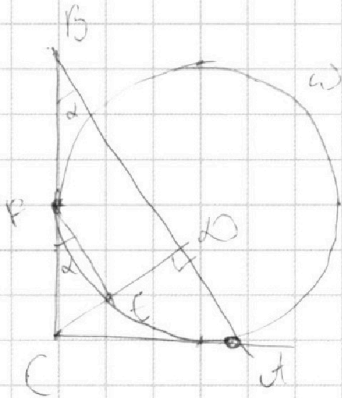
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



SQ



1) Заметим, что

$$BC \text{ кас - } CE \text{ и } \omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF = CA, \text{ так как } \text{втр-ку}$$

$$BC \text{ - кас}$$

$$2) CD = \sqrt{BD \cdot AD} =$$
$$= \sqrt{BD \cdot (AB - BD)} = \sqrt{BD \cdot 0,3 \cdot BD}$$

$$= \sqrt{0,3} \cdot BD$$

3) По т. Пифагора:

$$BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = BD \sqrt{1,3}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{1,3^2 - 1,3}$$



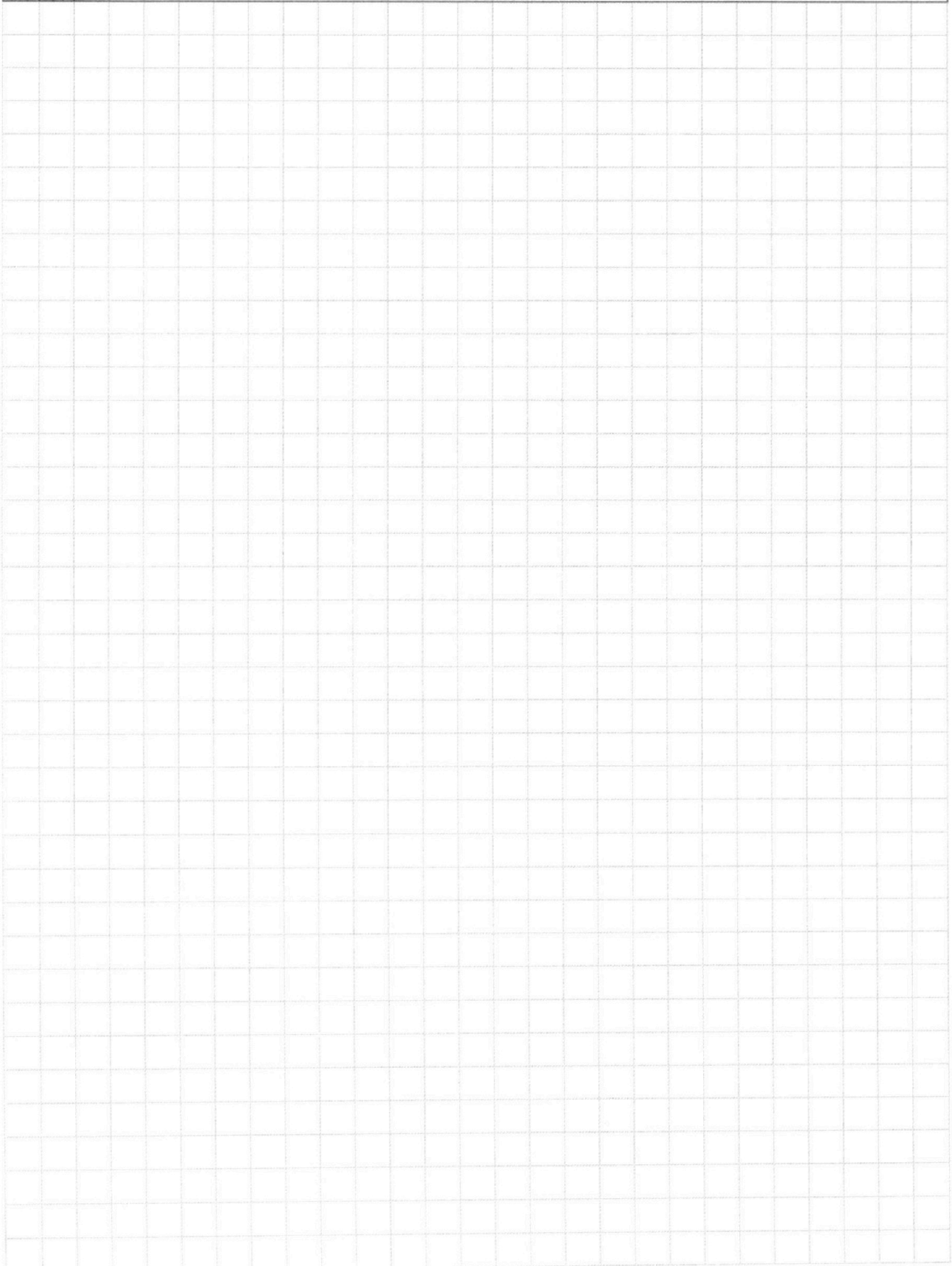
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,

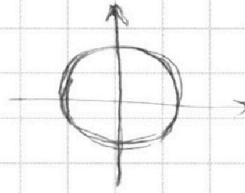
* страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

54

$a = ? : \exists b : \text{крестик}$



$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ ((x+7)^2 + y^2 + 45 - 49) (x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

прямая, с радиусом $R=3$ по оси Ox

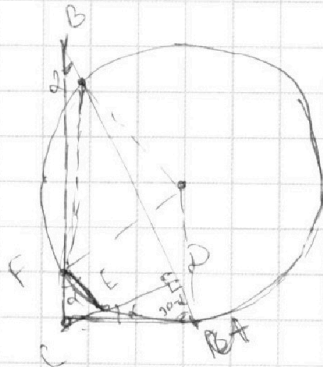
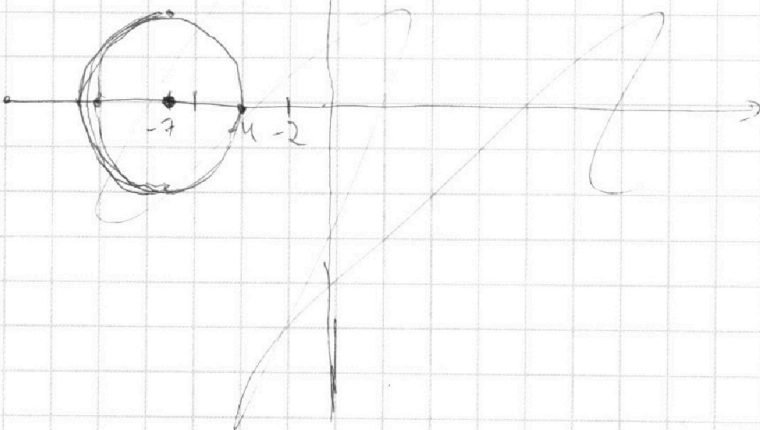
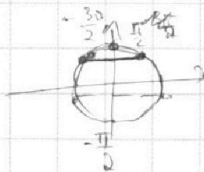
окруж

окруж $R=2$

I) $a = 0: x = 7b \notin X$

II) $a \neq 0$. Пусть $\frac{7b}{3a} = q, -\frac{1}{3a} = p$

$$y = \frac{p}{p^2 + 1} - px - \frac{q}{p}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$a, b, c \quad 2^7 3^{11} 5^{14} \mid ab, \quad 2^{13} 3^{15} 5^{18} \mid bc, \\ 2^{14} 3^{17} 5^{43} \mid ac, \quad \min(abc) = ? \iff$$

$$\iff a = 2^{x_1} 3^{x_2} 5^{x_3}, \quad b, c \text{ относительно } \text{просто} \\ \min(x_i + \beta_i + \gamma_i) = ? \quad \forall i$$

$$x_1 + \beta_1 \geq 7$$

$$\beta_1 + \gamma_1 \geq 13$$

$$x_2 + \beta_2 \geq 11$$

$$\beta_2 + \gamma_2 \geq 15$$

$$x_3 + \beta_3 \geq 14$$

$$\beta_3 + \gamma_3 \geq 18$$

$$\gamma_1 + \alpha_1 \geq 14$$

$$\gamma_2 + \alpha_2 \geq 17$$

$$\gamma_3 + \alpha_3 \geq 43$$

$$\begin{cases} x_3 + \beta_3 \geq 14 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 18 \quad (+) \\ \gamma_3 + \alpha_3 \geq 43 \end{cases}$$

$$\beta_3 \geq 18 - \gamma_3 \quad (+) \\ \beta_3 \geq 14 - \alpha_3 \quad (+)$$

$$\beta_3 \geq \frac{\gamma_3 + 7 - x_3 + \gamma_3}{2} \geq \frac{8}{2} = 4$$

$$\beta_3 \geq \frac{\gamma_3 + 9 + \frac{43}{2}}{2}$$

5 3

$$\arccos(\cos x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x \in [0, \pi] \rightarrow \cos x \in [0, 5\pi]$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [0, 5\pi]$$

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \cup \text{Разобраны случаи}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$u^4 + v^4 - 2uv(v^2 - uv + u^2) + 4 = 0$$

$$u^4 + 2u^2v^2 + v^4 - 2u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 - 2uv(u^2 + v^2 + \sqrt{2}uv)$$

$$(d - \sqrt{2}\beta)(d + \sqrt{2}\beta) - \beta(d - \beta) = 0$$

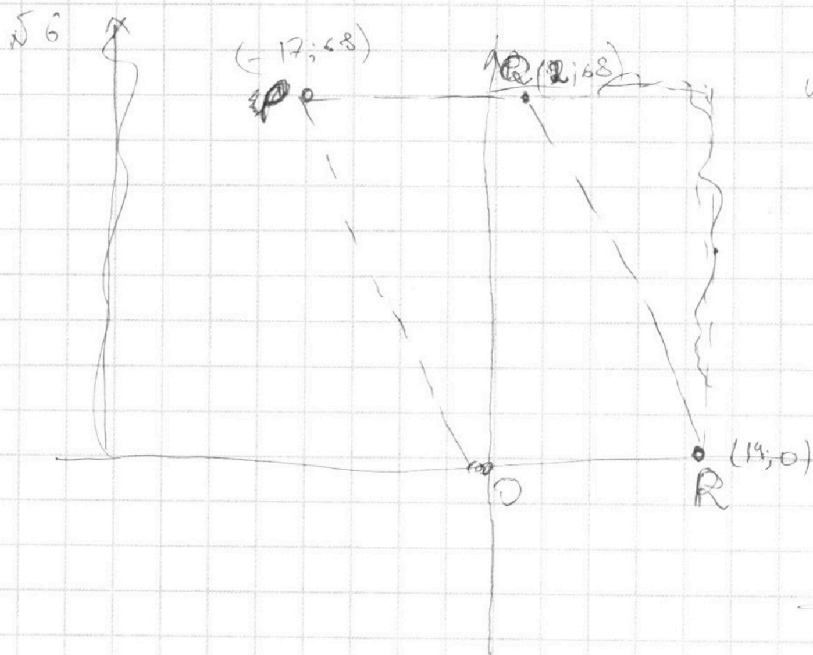
$d = u^2 + v^2$
 $\beta = uv$
 $d + 2\beta = (u+v)^2$

$$d^2 - 2\beta^2 + \beta^2 - d\beta = 0$$

$$d^2 - d\beta - \beta^2 = 0$$

$$d^2 - d\beta - \beta^2 + 4 = 0$$

$$d = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\beta^2 - 16}}{2}$$

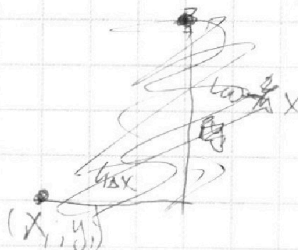


$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{02} &= 20x + x_1 \\ y_2 &= 20x - y_1 \\ 4\Delta x + \Delta y &= 40 \end{aligned}$$

$$\Delta y = 40 - 4\Delta x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

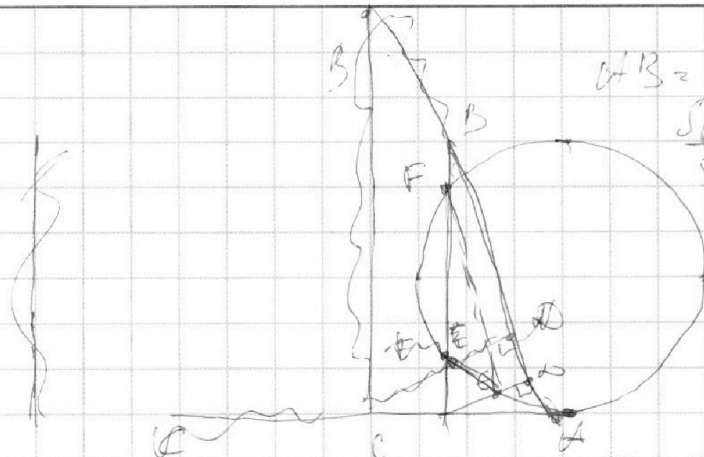
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



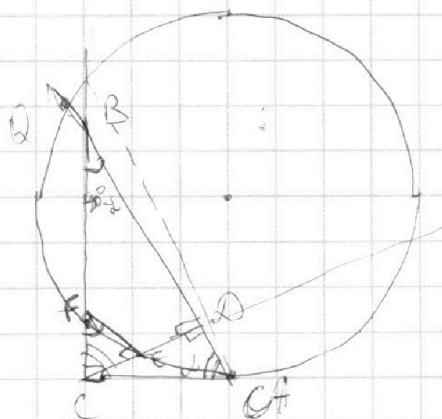
Черновик



$$CF = 1,3BD$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = ?$$

$$AD = 2d$$



$$AD = 0,2 \cdot BD$$

$$CD = \sqrt{1,3 \cdot 0,3} \cdot BD$$

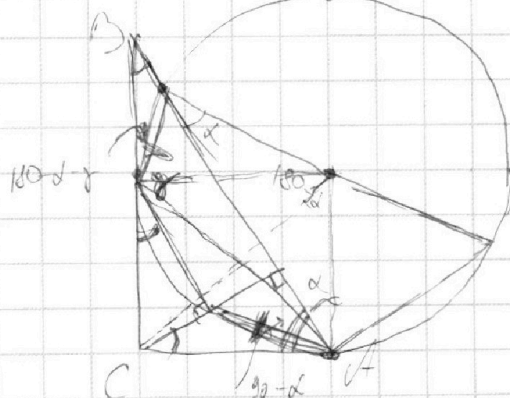
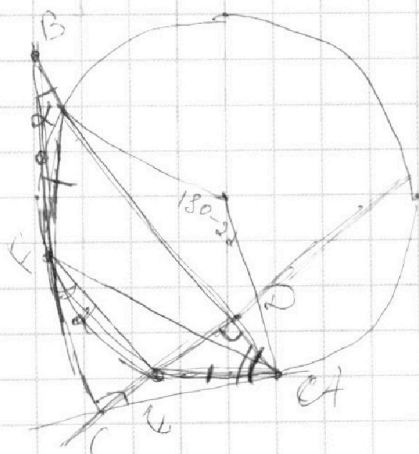
чтобы

$$BC = \sqrt{1 - 1,3 \cdot 0,3} \cdot BD$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - 1,3 \cdot 0,3}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{61}}$$

$$\frac{13 \cdot 3}{100} = \frac{39}{100}$$



$$90 - \alpha - (180 - \beta) = \beta - \alpha + 90^\circ$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

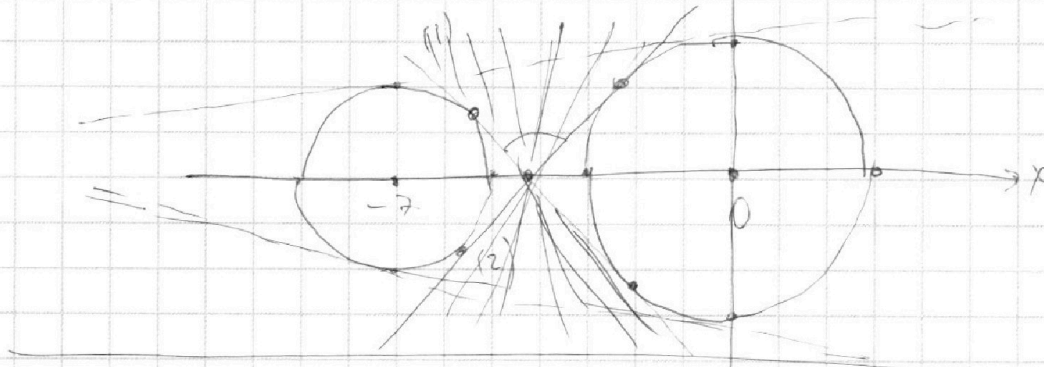


Евклид

54 ✓

Прямая пересекает окружность ≤ 2 т. \Rightarrow Две вершины в 2-ух

нужно идти от R-фа наклоняя прямую



$$55 \quad \log_7^4(6x) - 2 \log_7 7 = \log_{36x^2} 7^3 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \log \frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

$$u^4 - \frac{2}{2u} = \frac{3}{2u} - 4/2u$$

$$v^4 + \frac{6}{v} = \frac{5}{2v} - 4/2v$$

$$u+v = \log_7 6x + \log_7 y = \log_7 6xy$$

$$\frac{7^{u+v}}{6} = 6xy \Leftrightarrow u+v=?$$

$$\begin{aligned} 2u^5 - 4 &= 3 - 8u \\ 2v^5 + 3/2 &= 5 - 8v \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2u^5 + 8u = 7 & (1) \\ 2v^5 + 8v = -7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \cancel{2(u^5 + v^5)} + \cancel{8(u+v)} = 0 \\ & (u^5 + v^5) \stackrel{4}{=} -4(u+v) \\ & (u^5 + v^5) \cancel{=} (u+v) \cdot (3u^4 - 2uv^3 + \\ & + u^2v^2 - u^3v + v^4) \end{aligned}$$

$$(u+v)(u^4 - 2uv^3 + u^2v^2 - u^3v + v^4) = u^5 + v^5 +$$

$$+ \cancel{u^2v^3} + \cancel{u^3v^2} - \cancel{u^4v} + \cancel{uv^4} - \cancel{2uv^4} + \cancel{u^2v^3} - \cancel{u^3v^2} + \cancel{u^4v}$$

$$(u^5 + v^5)(u^4 - 2uv^3 + u^2v^2 - u^3v + v^4) + 4(u+v) = 0$$

$$(u+v)(u^4 - 2uv^3 + u^2v^2 - u^3v + v^4 + 4(u+v)) = 0$$

$$\begin{cases} u+v=0 & (1) \Rightarrow x+y = \frac{1}{6} \\ u^4 - v^3u - u^2v^2 - u^3v + v^4 + 4(u+v) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$u^4 + v^4 + 4uv(uv - v^2 - u^2) + 4(u+v) = 0$$

$$u^4 + v^4 - uv \frac{(v^3 + u^3)}{u+v} + 4(u+v) = 0 \quad | \cdot (u+v)$$

$$\frac{u^5 + v^5}{u+v} + \frac{4(u+v)^2}{u+v} = 0$$

$$u^5 + v^5 + u^4v + v^4u - 2v^4 - 2u^4v + 4(u+v)^2 = 0$$

$$u^5 + v^5 + 4(u+v)^2 = 0$$

$$4(u+v)^2 - 4(u+v) = 0$$

$$(u+v)(u+v-1) = 0 \quad u+v=1$$

$$u^4 - v^3u + u^2v^2 - u^3v + v^4 + 4 = 0$$

$$\equiv 3u^2v^2 - v^3u - u^3v + 3uv(uv - v^2 - u^2)$$