МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

$ab \vdots 2^{9}3^{10}5^{10}$

$ac \vdots 2^{14}3^{13}5^{13}$

$abc \to \min$

Пусть $a = 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$ $(\alpha \le 9;\ \beta \le 10;\ \gamma \le 10)$

Тогда $b \ge 2^{9-\alpha}3^{10-\beta}5^{10-\gamma}$; $c \ge 2^{14-\alpha}3^{13-\alpha}5^{13-\alpha}$

Т.е. $abc \ge 2^{23-\alpha}3^{23-\beta}5^{23-\gamma}$

$2^{23-\alpha}3^{23-\beta}5^{23-\gamma} \to \min$

$\alpha \le 9;\ \beta \le 10;\ \gamma \le 10 \Rightarrow 2^{23-\alpha}3^{23-\beta}5^{23-\gamma} \ge 2^{14}3^{13}5^{13}$

(оценка достигается при $a = 2^{9}3^{10}5^{10}$; $b = 1$; $c = 2^{5}3^{3}5^{3}$)

Ответ: $2^{14}3^{13}5^{13}$

№ 1

$ab \vdots 2^{9}3^{10}5^{10}$

$bc \vdots 2^{14}3^{13}5^{13}$ $\Rightarrow$ ~~$abc \vdots 2^{19}3^{18}5^{30} \Rightarrow abc \ge 2^{19}3^{18}5^{30}$~~

$ac \vdots 2^{19}3^{19}5^{30}$ ~~Оценка достигается при $b=1$~~

Пусть α, β, γ – степень вхождения 2 в a, b, c.

Тогда $\begin{cases} \alpha+\beta \ge 9 \\ \beta+\gamma \ge 14 \\ \alpha+\gamma \ge 19 \end{cases}$ (очев., что нам выгоден случай равенства, поэтому $\alpha+\beta+\gamma = 21$). Проводя аналог. рассуждения для 3 и 5 получаем $abc \ge 2^{21}3^{21}5^{27}$ Ответ: $2^{21}3^{21}5^{27}$

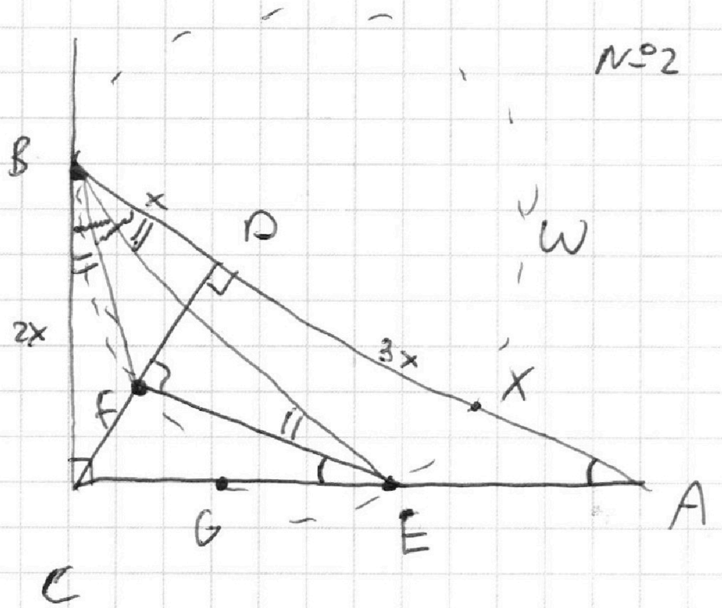
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

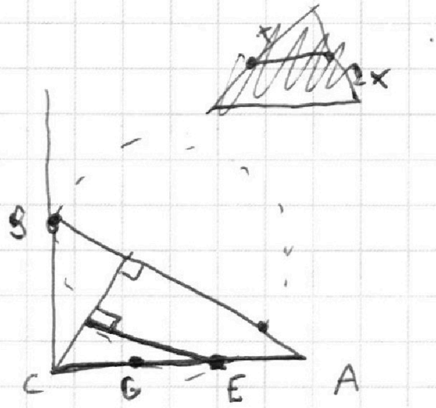
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2





$CE = 2FD$

1) $CD = \sqrt{BD \cdot AD} = x\sqrt{3} \Rightarrow AC = \sqrt{3x^2 + 9x^2} = 2x\sqrt{3}$; $BC = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$

2) $\triangle CEF \sim \triangle BAC$ $\left(\begin{array}{l}\angle FEC = \angle BAC \text{ из } EF \parallel AB \\ \angle CFE = \angle BCA = 90^\circ \text{ из } EF \parallel AB\end{array}\right)$

$\angle EBA = \angle BEF$ (из $EF \parallel AB$) $= \angle CBF$ (из кас. w и BC) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EBA = \angle CBF \Rightarrow \angle DBF = CBE \Rightarrow \triangle BDF \sim \triangle BCE \Rightarrow$

$\Rightarrow CE = \frac{FD \cdot BC}{BD} = 2FD$

3) из $\triangle CEF \sim \triangle BAC$

$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) FD = x\sqrt{3} \Rightarrow FD = x\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{3}{2+\sqrt{3}} x \Rightarrow$

$\Rightarrow CF = x\sqrt{3} - \frac{3}{2+\sqrt{3}} x = \frac{2x\sqrt{3} + 3x - 3x}{2+\sqrt{3}} = \frac{2x\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$\frac{CF}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CBA}} = \frac{3}{7+4\sqrt{3}}$ Ответ: $\frac{3}{7+4\sqrt{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3) из $\triangle CEF \sim \triangle BAC$ $\quad CF = CE \cdot \frac{1}{2} = FD \Rightarrow$

$\Rightarrow CE = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{4} AB \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{BCA}} = \frac{3}{16}$

Ответ: $\frac{3}{16}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\sin \alpha)$

$x + \frac{\pi}{2} \in [-5; 5] \Rightarrow x \in [-5 - \frac{\pi}{2}; 5 - \frac{\pi}{2}]$

$\sin(\arcsin$

1) $x = \alpha + 2\pi k;\ \alpha \in [0; \pi]$

$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow 5\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} - 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi - 5\alpha = x \Rightarrow 2\pi - 5\alpha = \alpha + 2\pi k \Rightarrow$

$\Rightarrow 6\alpha = 2\pi - 2\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi k}{3}$

$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi k}{3} \in [0; \pi] \Rightarrow k = -2; -1; 0 \Rightarrow x = -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2) $x = \beta + 2\pi n$, $\beta \in [\pi; 2\pi]$

$\cos x = \cos \beta \Rightarrow 5\arcsin(\cos\beta) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin\left(\sin\left(\beta - \frac{3\pi}{2}\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\beta - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$

$5\beta - 8\pi = x = \beta + 2\pi n$

$4\beta = 8\pi + 2\pi n$

$\beta = 2\pi + \frac{\pi n}{4} \in [\pi; 2\pi] \Rightarrow n = -4; -3; -2; -1; 0$

$x = -7\pi; -4\frac{3}{4}\pi; -2\frac{1}{2}\pi; -\frac{\pi}{4}; 2\pi$

Ответ: $-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; -7\pi; -\frac{19\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; 2\pi$

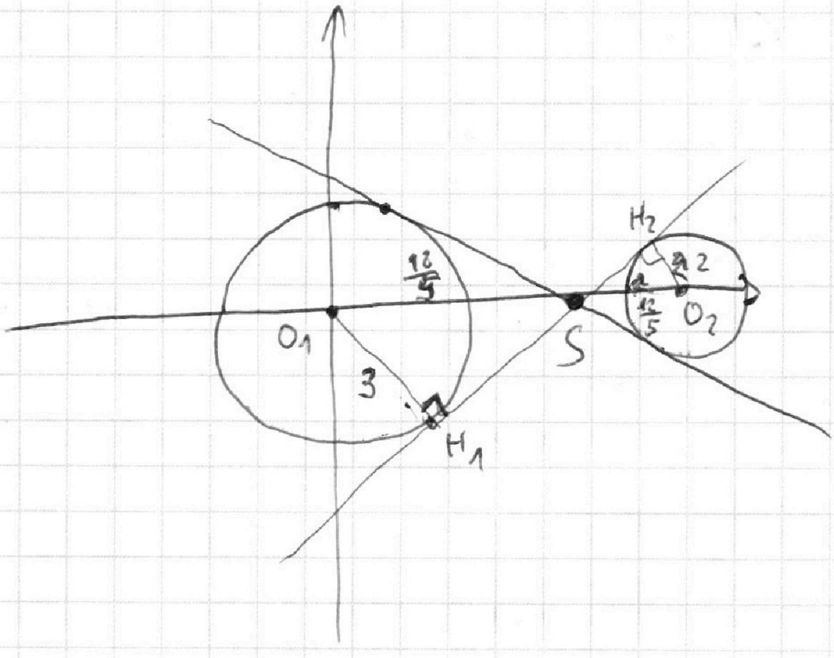
№4

$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$

$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \quad (1) \\ (x-6)^2+y^2=4 \quad (2) \end{array}\right.$ — две окр-ти

(1) $O(0;0)$ $r=3$

(2) $O(6;0)$ $r=2$



$ax+2y-3b$ — прямая $y=-\frac{a}{2}x+\frac{3b}{2}$ при $a\neq0$

Если $a=0$, то, очевидно, можно получить 4 реш.

Рассмотрим общую внутреннюю касательную этих двух окр-тей (с полож. угловым коэф.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если уменьшить угловой коэф. этой прямой, то она пересечёт окр-ти по 4-м точкам, а значит из любой прямой с таким наклоном можно получить ~~[illegible]~~ требуемую параллельным переносом. ~~[illegible]~~ Если же его увеличить или не поменять, то в любом положении при параллельном переносе будет не более двух точек ~~[illegible]~~ пересечения. Значит, при ~~[illegible]~~ $a<0$ $-\frac{a}{2}<K$, где K – угловой коэф. касательной. Аналогично, при $a>0$ $-\frac{a}{2}>-K$ (из симметрии относительно Ox), т.е. $\frac{a}{2}<K$

~~из геометрии~~ Из геометрии $K=\frac{5}{6}$ (подобие O_1H_1S и O_2H_2S, $O_1O_2=6$)

т.е.
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<0\\ \frac{a}{2}>-\frac{5}{6}\end{cases}\\ \begin{cases}a>0\\ \frac{a}{2}<\frac{5}{6}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: ~~[illegible]~~ $a\in\left(-\frac{5}{12};\frac{5}{12}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
				x		

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$x>0 \Rightarrow \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8$$

$$\log_3 x = t$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$$

$$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$$

$$5y>0 \Rightarrow \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \frac{11}{2}\log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3 5y = u$$

$$u^4 + \frac{2}{u} = \frac{11}{2u} - 8$$

$$u^5 + 8u - \frac{7}{2} = 0$$

$$t^5 + 8t + u^5 + 8u = 0$$

$$(u+t)(8 + \underbrace{t^4 - t^3u + t^2u^2 - tu^3 + u^4}_{>0}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$u = -t$$

$$\log_3 x = -\log_3 5y$$

$$\log_3 x = \log_3 \frac{1}{5y} \Rightarrow x = \frac{1}{5y} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

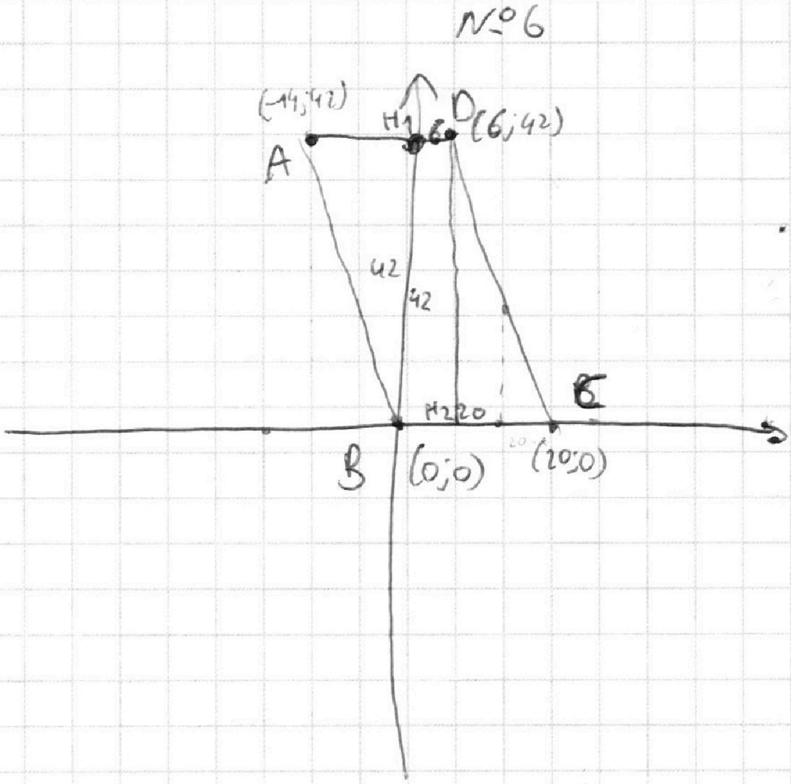
Ответ: $\frac{1}{5}$

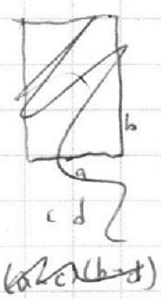
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6





$3(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=33$

$x_2-x_1=\{-3;-2;\dots;20\}$

$y_2-y_1=\{42;39;\dots;-27\}$

~~Множество точек с фиксированными разностями абсцисс и ординат задаёт вид параллелограмма~~

~~Задача сводится к нахождению кол-ва точек с один. разностями абсцисс и ординат в $\triangle AH_1B$, $\triangle CH_2D$ и прямоугольнике H_1DH_2B~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

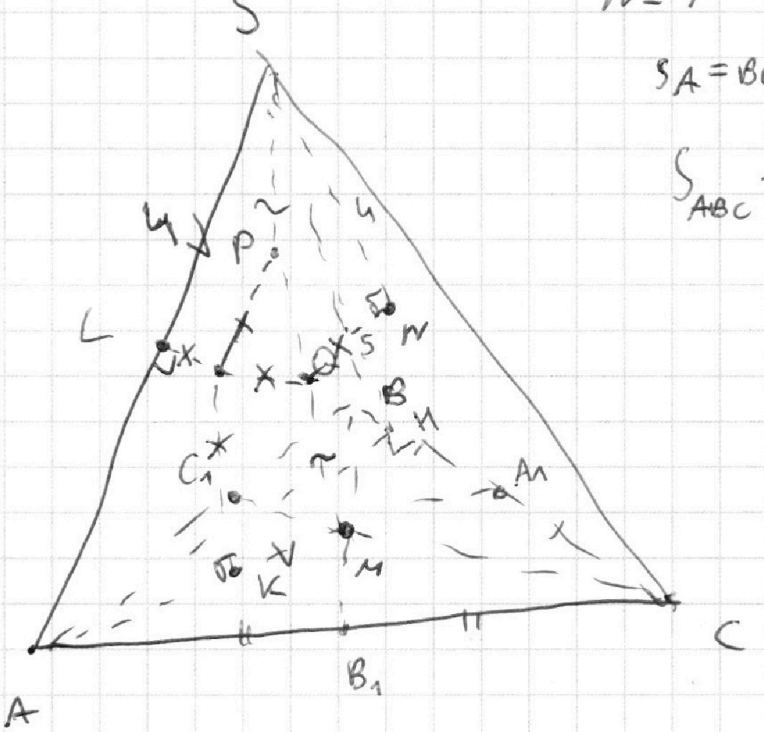
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

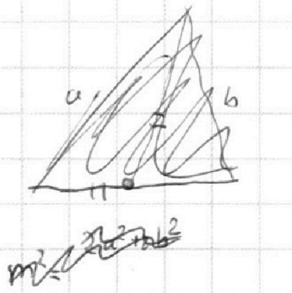
МФТИ

№7

$SA = BC = 12$

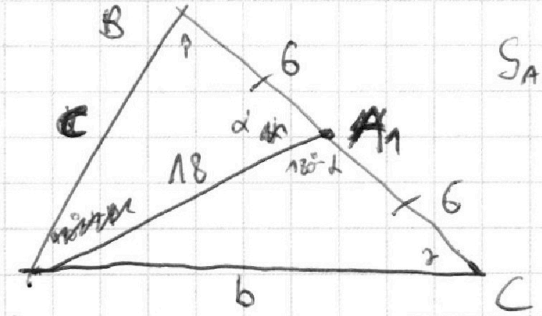
$S_{ABC} = 90$





а) $MQ \cdot MS = KM^2$
$SP \cdot SM = SL^2$ $\Rightarrow KM = SL$ $\Rightarrow AS = AM \Rightarrow AM = 12 \Rightarrow AA_1 = 18$

$AL = AK$ (отр. кас.)



$S_{ABC} = 90$

$6 \cdot 18 \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow$

$\sin\alpha = \frac{45/2}{6 \cdot 18} = \frac{5}{6}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sin\alpha = \frac{45\cdot 2}{6\cdot 18} = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$ $\left(S_{AA_1B} = \frac{90}{2} = \frac{6\cdot 18\cdot \sin\alpha}{2}\right.$

~~по~~ по т. кос.

$AB^2 = 324 + 36 - 2\cdot 18\cdot \cancel{6}\cdot \frac{\sqrt{11}}{\cancel{6}} = 360 - 36\sqrt{11}$

$AC^2 = 360 + 36\sqrt{11}$

по ф. медианы:

$m_{AB}^2 = \frac{720 + 72\sqrt{11} + 288 - 360 + 36\sqrt{11}}{4} = 162 + 27\sqrt{11}$

$m_{AC}^2 = \frac{720 - 72\sqrt{11} + 288 + 360 - 36\sqrt{11}}{4} = 162 - 27\sqrt{11}$

$m_{BC}^2\, m_{AB}^2\, m_{AC}^2 = 18\,(162^2 - 27^2\cdot 11) \Rightarrow m_{BC}\, m_{AB}\, m_{AC} =$

$= \sqrt{18(162^2 - 27^2\cdot 11)} = \sqrt{18\cdot 18225} = \cancel{30\sqrt{\ldots}}$

$\cancel{= 3\sqrt{36450} = 30}$

162
×162
324
972
162
26244

$27^2 = 729$

729
×11
729
729
8019

$= 3\sqrt{36450} = 15\sqrt{1458} =$

36450 | 25
25 | 1458
114
100
145
125
200

$\cancel{= 15\cdot 729}$

$15\cdot 27\sqrt{2} =$

$= 405\sqrt{2}$

15
×27
105
30
405

Ответ: $405\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!