



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- † 1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- † 2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- † 3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- † 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- † 5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- † 6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
- а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
- б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BSC$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

р) Решение: Оценка:  
обозначим  $\text{ord}_p(x) \rightarrow$  степень включения  
простого множителя  $p$  в факторизацию  
числа  $x$  ( $p, x \in \mathbb{N}$ ,  $p \rightarrow$  простое) (наибольшая  
степень  $p$ , на которую делится число  $x$ ).

$$\begin{aligned} \text{Тогда по условию } \text{ord}_2(ab) &\geq 9; \quad \text{ord}_3(ab) \geq 10; \\ \text{ord}_2(bc) &\geq 14; \quad \text{ord}_3(bc) \geq 13; \\ \text{ord}_2(ac) &\geq 19; \quad \text{ord}_3(ac) \geq 18; \\ \text{ord}_5(ab) &\geq 10; \quad \text{ord}_5(bc) \geq 13; \quad \text{ord}_5(ac) \geq 30. \end{aligned}$$

(по причине делимости двух чисел в степени  $x$   
включений простых).

Также очевидно свойство:  $\text{ord}_p(xy) = \text{ord}_p(x) + \text{ord}_p(y)$   
(по об-у включений), откуда

$$\begin{aligned} \text{ord}_2(a) + \text{ord}_2(b) &= \text{ord}_2(ab) \geq 9 \\ \text{ord}_2(b) + \text{ord}_2(c) &= \text{ord}_2(bc) \geq 14 \\ \text{ord}_2(a) + \text{ord}_2(c) &= \text{ord}_2(ac) \geq 19 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow 2 \cdot (\text{ord}_2(a) + \text{ord}_2(c) + \text{ord}_2(b)) \geq 42 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 21 &\leq \text{ord}_2(a) + \text{ord}_2(b) + \text{ord}_2(c) = \text{ord}_2(abc). \Rightarrow \\ &\Rightarrow abc : 2^{21}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ord}_3(a) + \text{ord}_3(b) &= \text{ord}_3(ab) \geq 10 \\ \text{ord}_3(b) + \text{ord}_3(c) &= \text{ord}_3(bc) \geq 13 \\ \text{ord}_3(a) + \text{ord}_3(c) &= \text{ord}_3(ac) \geq 18 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow 2 \cdot (\text{ord}_3(a) + \text{ord}_3(c) + \text{ord}_3(b)) \geq 41 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 20,5 &\leq \text{ord}_3(a) + \text{ord}_3(b) + \text{ord}_3(c) = \text{ord}_3(abc) \\ \text{Но т.к. } \text{ord}_3(abc) &\in \mathbb{Z}, \text{ то } \text{ord}_3(abc) \geq 21, \text{ и } \text{e.} \\ &abc : 3^{21}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ord}_5(a) + \text{ord}_5(b) &= \text{ord}_5(ab) \geq 10 \\ \text{ord}_5(b) + \text{ord}_5(c) &= \text{ord}_5(bc) \geq 13 \\ \text{ord}_5(a) + \text{ord}_5(c) &= \text{ord}_5(ac) \geq 30 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow 2 \cdot (\text{ord}_5(a) + \text{ord}_5(c) + \text{ord}_5(b)) \geq 53 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 26,5 &\leq \text{ord}_5(a) + \text{ord}_5(b) + \text{ord}_5(c) = \text{ord}_5(abc) \\ \text{Но т.к. } \text{ord}_5(abc) &\in \mathbb{Z}, \text{ то т.к. } 30 \leq \text{ord}_5(ac) \leq \text{ord}_5(ac) + \\ &+ \text{ord}_5(b) = \text{ord}_5(abc), \text{ то } \text{ord}_5(abc) \geq 30 \rightarrow abc : 5^{30} \\ &(\text{от. } 1/2) \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Вопрос, т.к. числа  $2^{21}; 3^{21}; 5^{30}$  → попарно взаимно-  
просты, то т.к.  $abc; 2^{21}; abc; 3^{21}; abc; 5^{30}$ , то  
 $abc; 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$  а т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  
 $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ .

Пример: пусть  $a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}$  , тогда

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15} \quad (ab : (2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}) \rightarrow \text{верно})$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \quad (bc : (2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}) \rightarrow \text{верно})$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \quad (ac : (2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}) \rightarrow \text{верно})$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \rightarrow \text{совпадает с оценкой}$$

$$\text{Итого: } \{ 1 + 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



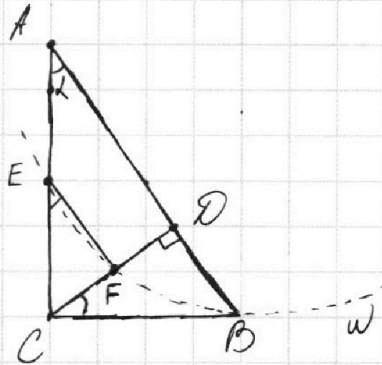
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 Дано:

$\Delta ABC: \angle C = 90^\circ$ ;  
 $\omega$  - Окр.  $(O; R) \rightarrow$  касается  
 прямой  $BC$  в точке  $B$ ;  
 $CD \rightarrow$  высота  $\Delta ABC$ ;  $(DEAB)$ ;  
 $\omega \cap CD = \{F\}$ ;  $\omega \cap AC = \{E\}$ ;  
 $EF \parallel AB$ ;  $AD:DB = 3:1$ ;



$\Delta ABC$ ;  $\Delta OEF \rightarrow ?$

Решение:

Пусть  $\angle BAC = \alpha$  (обозначение), где  $0 < \alpha < 90^\circ$   
 (острый угол в прямоугол. треуго.  $ABC$ ) ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

Т.к.  $BC$  касательная к  $\omega$  в  $B$  т.к.  $EF \parallel AB$  (по усл.),  
 то  $\angle BEF = \angle CAB = \alpha$ ;  $\angle ADC = \angle EFC = 90^\circ$  (по св-у  
 паралл. прямых о соответ. углах при секущей).

Рассмотрим  $\Delta BAC$  и  $\Delta BCD$ :

- $\angle B$  - общий.
- $\angle BCA = 90^\circ = \angle BDC \Rightarrow \Delta BAC \sim \Delta BCD$  (по двум углам)  $\rightarrow$

$$\Rightarrow \angle CAD = \alpha = \angle BCD; \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

(по св-м подобных треугол.)

Отсюда  $BD \cdot AB = BC^2$ ; Аналогично  $AD \cdot AB = AC^2 \rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{1} = 3 \text{ (по условию)} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \sqrt{3};$$

Рассмотрим  $\Delta ABC: \angle C = 90^\circ \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \alpha = 30^\circ$  (по св-м тангенсов острого угла  
 прямоугол. треугол.; известной тангенс известного  
 острого угла).

Т.к.  $BC \rightarrow$  касательная к  $\omega$ , то  $\angle BEF = \beta = \angle CAF$   
 (по теор. об угле между кас. и хордой).

(стр. 1/3)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Отсюда  $F \rightarrow$  точка Шалтая для  $\triangle BCE$  (по определению точки Шалтая треугольника). (последующие свойства точки Шалтая мы докажем).

Пусть  $\rho$  — опис. окруж.  $\triangle CEF$  (дем. постро.), тогда т.к.  $\angle CEF = \alpha = \angle BCF$ , то  $BC \rightarrow$  касательная к  $\rho$  в точке  $C$  (по теор. обратной теор. об угле между касательной и хордой).

Пусть  $EF \cap BC = M$  (дем. постро.), тогда, т.к.

$EE \perp \rho; EE \perp BC; FE \perp \rho; FE \perp BC \rightarrow EF$  — рад. ось  $\omega$  и  $\rho$ .  
(т.к.  $\deg_{\omega}(E) = 0 = \deg_{\omega}(F) = \deg_{\rho}(E) = \deg_{\rho}(F)$ )  
(по определению рад. оси двух окруж.)  
(р.с.  $\deg_{\omega}(X) \rightarrow$  множество точек  $X$ , относительно окружностей  $\omega$ ).

А т.к.  $M \in EF$ , то  $\deg_{\omega}(M) = \deg_{\rho}(M)$  (по определению рад. оси).

Отсюда  $MC^2 = ME \cdot MF = \deg_{\rho}(M) = \deg_{\omega}(M) = ME \cdot MF = MB^2$  (по теор. о квадрате касательной; по свойству множества точек  $M$  относительно отрезка).

Отсюда  $MB = MC \Rightarrow M$  — сер.  $BC$  (по известному свойству точки Шалтая). А т.к.  $EF \parallel AB$  (по условию), а также  $M \rightarrow$  сер.  $BC$ ;  $M \in EF$ , то  $EF$  — ср. линия  $\triangle ABC$  (по признаку ср. линии треугольника). (т.к. если провести четвертую ср. линию треугольника, то она пройдет через  $M$  по определению ср. линии треугольника) и будет паралл.  $AB$  (по теор. о ср. линии треугольника). Поэтому она совпадает с  $EF$  (по аксиоме паралл. прямых).

Отсюда  $E \rightarrow$  сер.  $AC$  (по определению ср. линии треугольника), а  $F \rightarrow$  сер.  $AD$  (по свойству ср. линии треугольника о соответ. медианах).

Отсюда  $EF$  — ср. линия  $\triangle CAD$  (по определению ср. линии треугольника).

Отсюда  $EF = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} AB = \frac{3}{8} AB$ .  
(по теор. о ср. линии треугольника; по аксиоме (стр. 2/3))

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ищ.  $\Delta$   $\text{треуголь.}$  / по условию.

Рассмотрим  $\Delta ABC$ :  $\angle C = 90^\circ$  (по усл.)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = AB \cos A = AB \cdot \cos 30^\circ = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ EF}$$

(по опр. косинуса остроугол. угла прямоугол. треугол.)

Рассмотрим  $\Delta CEF$  и  $\Delta PAC$ :

- $\angle CFE = \angle ACB = 90^\circ$
- $\angle CEF = 30^\circ = \angle PAC \Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta PAC \Rightarrow$  (по двум углам)

$$\Rightarrow \frac{S_{PAC}}{S_{CEF}} = \frac{AC^2}{EF^2} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

(по св-у подобных треугол. об отношении площадей  
относится как квадрат коэфф. подобия).

Ответ:  $5 + 5\frac{1}{3}$ .

(стр. 3/3)

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3 Решение:

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow$$

↑  
т.к. левая и правая части равны, то  
равны и аргументы этих частей.

$$\Leftrightarrow \cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \\ \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}\pi + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \\ -\frac{4}{5}x = \frac{2}{5}\pi + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \\ x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

т.к.  $\arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , где  $y \in \mathbb{R}$  ( $y \in [-1; 1]$ ).

$$\text{то } -\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\pi \leq 5 \arcsin(\cos x) - \frac{\pi}{2} \leq 2\pi, \text{ т.е. } -3\pi \leq x \leq 2\pi.$$

Оммура 1)  $\begin{cases} -3\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}k\pi \leq 2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq 1 + 5k \leq 6 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \leq 5k \leq 5 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq k \leq 1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=0 \\ k=-1 \\ k=-2 \end{cases} \Rightarrow 2\pi; \frac{\pi}{3}; -\frac{4}{3}\pi; -3\pi \rightarrow$$

2)  $\begin{cases} -3\pi \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}k\pi \leq 2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq -1 + 5k \leq 4 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq k \leq 1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=0 \\ k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{(стр. 1/2)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow \pi; -\frac{\pi}{2}; -3\pi \rightarrow$  по порядку значения из этой серии.

Отсюда корни данного уравнения могут быть только числами из множества:

$$\left\{ -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{3}; +2\pi \right\}.$$

Проверка:

1)  $x = -3\pi;$

$$\cos(-3\pi) = \cos \pi = -1;$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2};$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{5\pi}{2}$$

Отсюда  $5 \arcsin(\cos(-3\pi)) = 5 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5\pi}{2} = -3\pi + \frac{\pi}{2};$

2)  $x = -\frac{4\pi}{3};$   $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2};$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6};$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6};$$

Отсюда  $5 \arcsin(\cos(-\frac{4\pi}{3})) = 5 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}.$

3)  $x = -\frac{\pi}{2};$   $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0;$   ~~$\sin$~~

$$\arcsin(0) = 0;$$

$$x + \frac{\pi}{2} = 0;$$

Отсюда  $5 \arcsin(\cos(-\frac{\pi}{2})) = 5 \cdot 0 = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2};$

4)  $x = \frac{\pi}{3};$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6};$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6};$$

Отсюда  $5 \arcsin(\cos(\frac{\pi}{3})) = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3};$

5)  $x = 2\pi;$

$$\cos 2\pi = \cos 0 = 1$$

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{\pi}{2} + x = \frac{5\pi}{2};$$

Отсюда  $5 \arcsin(\cos(\frac{5\pi}{2})) = 5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi;$

Отсюда все эти 5 корней  $\rightarrow$  корни нашего уравн.

Ответ:  $\left\{ -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{3}; +2\pi \right\}.$

(стр. 2/2)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

решение:

$$\begin{cases} ax + 2y - 3z = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (3) \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 & (3) \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 & (4) \end{cases}$$

(3)  $x^2 + y^2 = 3^2 \rightarrow$  ур-е окружности с центром  $(0;0)$   
и радиусом  $3$ .

(4)  $(x-6)^2 + y^2 = 2^2 \rightarrow$  ур-е окружности с центром  
 $(6;0)$  и радиусом  $2$ .

(1)  $ax + 2y - 3z = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}z \rightarrow$  ур-е прямой  
(невертикальной, т.е. коэф. при  $y$  не равен 0).

Т.к. прямая может пересекать окружность  
не более, чем в 2-ух точках, то чтобы  
данная система имела ровно 4 решения,  
то наша прямая должна пересекать  
обе окружности по 2-ух точкам (наискрестно).

$-\frac{a}{2}z \rightarrow$  угловой коэф. нашей прямой.

$z + \frac{3}{2}bz \rightarrow$  свободный член нашей прямой.

Отсюда для фиксированного  $a \in \mathbb{R}$  мы можем  
выбирать  $b$ , т.е. для данного углового коэф.

$-\frac{a}{2}$  мы можем прямую  $y = -\frac{3}{2}a$  пересе-  
сти на любой вектор вида  $(0; \frac{3}{2}b)$ .

Очевидно такими операциями, мы можем добиться  
того, чтобы график (1) проходил через любую  
точку плоскости.

(стр. 1/4)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

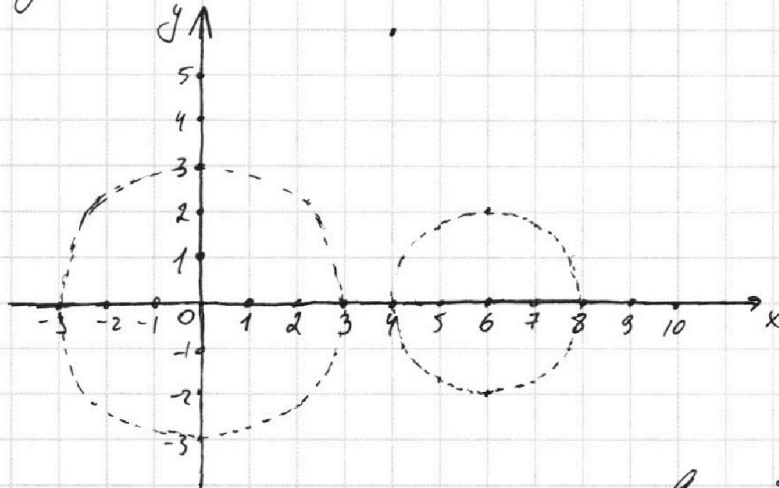
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Изобразим график (2): (2 окружности).



Рассмотрим прямую  $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$   
посмотрим при каких значениях  $b$  она  
может пересекать (3). (р.з. если  $a=0$ , то  $b=0 \rightarrow$   
 $\rightarrow$  ось абсцисс пересекает (3) в 4-х точках  $\rightarrow$   
 $\rightarrow a=0 \rightarrow$  подходит, далее рассмотрим  $a \neq 0$ ).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b\right)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + (ax - 3b)^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + a^2x^2 + 9b^2 - 6abx = 36 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a^2+4)x^2 - 6abx + (9b^2-36) = 0 \rightarrow$  у данного уравнения должно быть 2 решения, поэтому  $\frac{D}{4} > 0$

$$0 < \frac{D}{4} = (3ab)^2 - (a^2+4)(9b^2-36) \Rightarrow a^2b^2 - (a^2+4)(b^2-4) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 - a^2b^2 + 4a^2 - 4b^2 + 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4 > b^2 \Leftrightarrow -\sqrt{a^2+4} < b < \sqrt{a^2+4};$$

Посмотрим при каких значениях  $b$  она  
может пересекать (4).

$$\begin{cases} (x-6)^2 + y^2 = 4 \\ y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \end{cases} \Rightarrow x^2 - 12x + 36 + \left(\frac{a}{2}x - \frac{3}{2}b\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 48x + 128 + a^2x^2 - 6abx + 9b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot (a^2+4) - 2x(24+3ab) + (9b^2+128) = 0;$$

(стр. 2/4)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

у данного ур-я так же должно быть 2 реал.  
корни, т.е.  $D/4 > 0$ , т.е.

$$0 < \frac{D}{4} = (9ab+24)^2 - (a^2+4)(9b^2+128) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 9a^2b^2 + 144ab + 144 \cdot 4 - 9a^2b^2 - 128a^2 - 36b^2 - 512 > 0 &\Leftrightarrow 144ab + 144 \cdot 4 - 128a^2 - 36b^2 - 512 > 0 \\ \Leftrightarrow 36ab + 144 - 32a^2 - 9b^2 - 128 > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -9b^2 + 36ab - 32a^2 + 16 > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9b^2 - 36ab + 32a^2 - 16 < 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (18a)^2 - 9 \cdot (32a^2 - 16) = 6^2 \cdot (9a^2 - 8a^2 + 4) = \\ &= 6^2 \cdot (a^2 + 4) \Rightarrow \frac{18a - \sqrt{a^2+4} \cdot 6}{9} < b < \frac{18a + 6\sqrt{a^2+4}}{9}, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } 2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} < b < 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4};$$

Откуда 2 условия на  $b$ :

$$\begin{cases} 2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} < b < 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}, \\ -\sqrt{a^2+4} < b < \sqrt{a^2+4} \end{cases}$$

Откуда, чтобы такое  $b$  существовало,  
необходимо потребовать:

$$1) \sqrt{a^2+4} > 2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow \frac{5}{3}\sqrt{a^2+4} > 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{a^2+4} > 6a \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 25a^2 + 100 > 36a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 100 > 11a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < \sqrt{\frac{100}{11}} \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < \frac{10}{\sqrt{11}};$$

$$2) 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} > -\sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a > -\frac{5}{3}\sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \leq 0 \\ 36a^2 > 25a^2 + 100 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a > 0 \\ a \leq 0 \\ a > -\sqrt{\frac{100}{11}} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{10}{\sqrt{11}} < a. \quad (\text{стр. 3/4})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Отсюда  $-\frac{10\sqrt{11}}{11} < a < \frac{10\sqrt{11}}{11}$  (при  $a$  в этом  
промежутке 2 данных интервала очевидно  
имеют общую точку  $\rightarrow$  определенное значение  $b$   
для данного  $a$ .)  
Ответ:  $(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; +\frac{10\sqrt{11}}{11})$ .

(реш. стр. 4/4)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \\ 5y > 0 \\ 5y \neq 1 \\ 25y^2 > 0 \\ 25y^2 \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

Пусть  $a = \log_3 x$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ; (на ОДЗ).  
 $b = \log_3(5y)$ , где  $b \in \mathbb{R}$ ; (на ОДЗ).

Тогда  $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{a}$ , т.е.  $a \neq 0$ .

$$\log_{x^2} 243 = \frac{1}{2} \log_x 3^5 = \frac{5}{2} \log_x 3 = \frac{5}{2a}; \quad (\text{т.к. } x > 0)$$

$$\log_{5y} 3 = \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{b}, \text{ т.е. } b \neq 0; \quad \log_{25y^2}(3^4) =$$
$$= \frac{4}{2} \log_{5y} 3 = \frac{4}{2b} \quad (\text{т.к. } 5y > 0)$$

В итоге получаем 2 ур-я:

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{6}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \\ ab \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^5 + 16a = 5 - 16a \\ 2b^5 + 16b = 11 - 16b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^5 + 16a + 7 = 0 \\ 2b^5 + 16b - 7 = 0 \end{cases}; \quad \text{В итоге}$$

$$2(a^5 + b^5) + 16(a+b) = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) +$$
$$+ (a+b) \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 8 = 0 \end{cases}$$

(стр. 1/2)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $a^4 - a^2b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 8 = 0$ , тогда

$$a^4 + \frac{a^2b^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^4 \cdot a^2b^2}{4}} = \sqrt{a^6b^2} = |a^3b| \geq a^3b$$

(по нер-ву Коши).

$$b^4 + \frac{a^2b^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{b^4 \cdot a^2b^2}{4}} = \sqrt{a^2b^6} = |ab^3| \geq ab^3$$

(по нер-ву Коши).

$$\begin{aligned} \text{Откуда } a^4 - a^2b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 8 &= \\ &= (a^4 + \frac{a^2b^2}{4} - a^3b) + (b^4 + \frac{a^2b^2}{4} - ab^3) + \frac{a^2b^2}{2} + 8 \geq 8 \end{aligned}$$

(разбили на неотрицательные слагаемые)

Получили противоречие, т.е.  $a^4 + a^2b^2 + b^4 - a^3b - ab^3 + 8 = 0$   
а это значит, что  $a + b = 0$ , т.е.

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0 \Leftrightarrow \log_3 5xy = 0 \Leftrightarrow 5xy = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{5}$$

→ единственное возможное значение  $xy$ .

Пример задачи  $x$  и  $y$ :

Р. 2. Такие  $x$  и  $y$  существуют, т.к.  $3a^5 + (6a+7) = 0$   
уравнение 5-ой (нечётной степени) → имеет  
какая бы 1 корень (превышко 0 → не корень),  
тогда  $x = 3^a \rightarrow$  исконое. Аналогично  $y = 3^b \rightarrow$   
→ исконое).

Ответ:  $\frac{1}{5}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

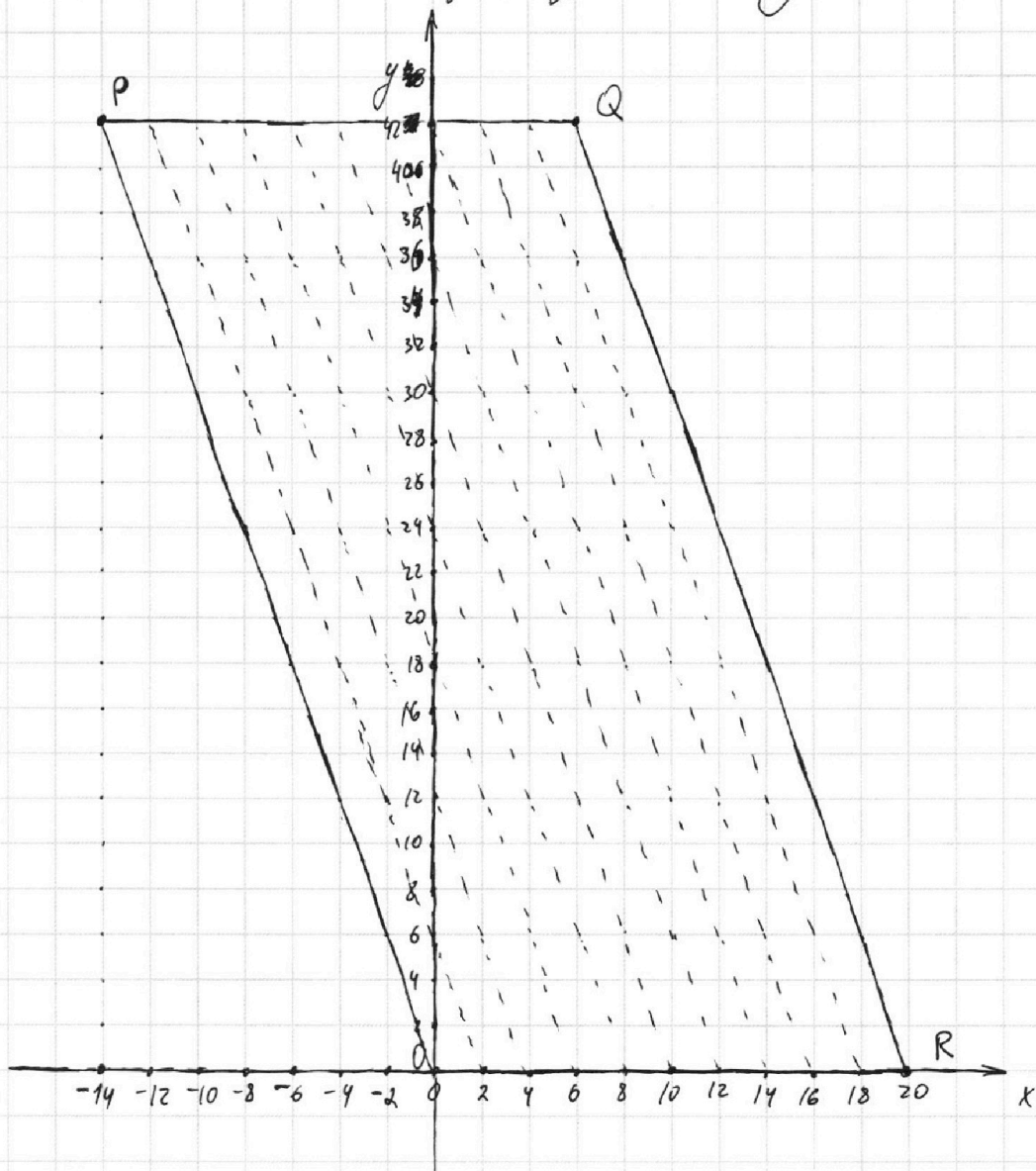
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 Решение: Изобразим исходный параллелограмм.



$$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33 \Leftrightarrow (y_2 - y_1) = 33 - 3 \cdot (x_2 - x_1)$$

Т.е. для каждой точки  $(x_2; y_2)$  все такие точки  $(x_1; y_1)$  лежат на прямой с угловым коэффициентом  $-3/4$ , проходящей через точку  $(x_2 - 11; y_2)$  (лишь проверится подстановка в уравнение).

Рассмотрим все прямые с угловым коэффициентом  $-3/4$ , проходящие через целочисленные точки, (стр. 1/2)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

имеющие хотя бы 1 общую точку с нашим параллелограммом.)

Заметим, что прямые  $OP$  и  $OQ$  (границы параллелога.) подхватывают под это условие.

(их уравнение  $xy = 0$  равно  $y = 3x$  и они проходят через целочисленные точки  $(0;0)$  и  $(0;20)$ , например)

Тогда все рассмотренные прямые будут параллельны (или совпадают) сторонам  $OP$  и  $OQ$  этого параллелога, причём очевидно на каждой такой прямой будет ровно 15 целочисленных точек.

(р.э.  $(0;0); (-1;3); (-2;6); \dots; (-14;42) \rightarrow$

$\rightarrow 15$  целочисленных точек на  $OP$ , а остальные  $m$ -ва точек (прямые) получаются из  $OP$  паралл. переносом на векторы  $(i;0)$ , где  $i \in \mathbb{N}; i \leq 20$ . (при  $i=20$  получится  $OQ$ ).

Пронумеруем все такие прямые по  $i$  слева (от 0 до 20)

Тогда для всех точек  $O$  прямой будут подхватывать все точки  $O$ -ой прямой. (на 0-ой прямой будут точки  $(x; y)$ , а на  $n$ -ой  $(x; y)$ , причём никакие более точки не будут подхватывать (показали ранее).  
для точек  $n$ -ой прямой  $\rightarrow$  точки  $1$ -ой прямой.  
для точек  $13$ -ой прямой  $\rightarrow$  точки  $2$ -ой прямой  
и т.д.

для точек  $20$ -ой прямой  $\rightarrow$  точки  $9$ -ой прямой.  
для точек  $j$ -ой прямой, где  $j \in \mathbb{N}; j \leq 10$   
никакие точки не будут соответствовать, т.е. такая прямая не пересекает параллелограмм).  
(ничья)

Откуда мы получили 10 групп из 2-ух прямых.  
На каждой из 2-ух прямых по 15 точек, а значит 225 пар точек, а т.к. групп 10, то всего 2250 нулевых пар точек (очевидно, каждую нулевую пару мы посчитали, причём ровно 1 раз).  
Итого: 2250 2250 пар. (стр. 2/2)



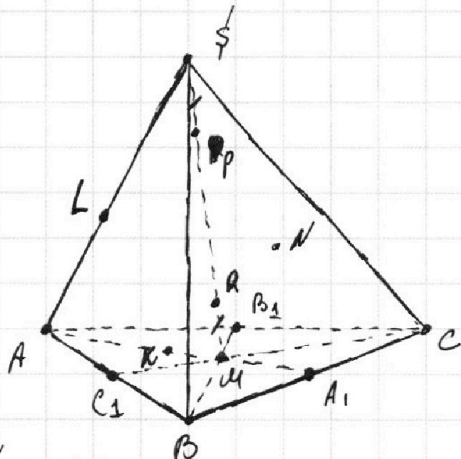
1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7 ~~Решение~~: Дано:

$\angle ABC = 90^\circ$ ;  $\angle A = \angle C = 12^\circ$ ;



г)  $\angle N = 4^\circ$ ;  $R = 5 \rightarrow$  радиус  $\Omega$ .

- а)  $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$
- б)  $\Phi_{\text{пл.}} = ?$  (при  $\angle C$ )

Решение: Пусть  
 $\text{deg}_\omega(x) \rightarrow$  элемент  
 точки  $x$ , ортогонально  
 сферы  $\omega$ , тогда

$\text{deg}_\Omega(A) = AL^2 = AK^2 \Rightarrow AL = AK$   
 (по св-у емен. точки о сф. касательной).

$\text{deg}_\Omega(M) = MK^2 = MQ \cdot MP$   
 (по св-у емен. точки о сф. касательной;  
 по св-у емен. точки о сф. ~~отрезках~~).

Аналогично  $\text{deg}_\Omega(PQ) =$   
 $= \angle L^2 = \angle P \cdot \angle Q \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle P \cdot \angle Q = MP \cdot MQ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle L = MK$ .

(по условию ( $MQ = \angle P$ ); по аналогии изм. отрезков  
 ( $MP = \angle M - \angle P = \angle M - MQ = \angle Q$ ))

Отсюда  $AL + L \angle = AK + MK \Rightarrow A \angle = AM$  (по аналогии изм. отрезков)

Отсюда  $KM = A \angle = 12$  (по условию)

Т.к.  $M \rightarrow$  центр масс  $\Delta ABC$  (по условию), то  
 $AM : MA_1 = 2 : 1$  (известное св-во центра 'масс').

Отсюда  $AA_1 = \frac{3}{2} \cdot AM = 18$  (по аналогии изм. отрезков).

Рассмотрим отдельно  $\Delta AB \angle$ . Пусть  $\angle_{\text{пл.}}$   
 $= \angle(A; BC) \rightarrow$  расстояние от точки  $A$  до прямой  
 $BC$ , тогда  $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle(A; BC) \cdot BC$  (пр. 1/3)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



по формуле площади треугол. через высоту  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S(ABC) = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{180}{12} = 15 \text{ (по условию)}$$

$$\text{Заметим, что } 4AA_1^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$$

$$4BB_1^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2$$

$$4CC_1^2 = 2AC^2 + 2BC^2 - AB^2$$

(по формуле медианы треугол.)

$$\text{Откуда } AB^2 + AC^2 = 2AA_1^2 + \frac{BC^2}{2} = 2 \cdot 18^2 + \frac{12^2}{2} =$$

$$= 2 \cdot 324 + 72 = 648 + 72 = 720;$$

$$\text{Рассмотрим } 16S_{ABC}^2 = (AB+BC+AC)^2 \cdot (AB+AC-BC)^2 \cdot$$

$$\cdot (AB+BC-AC)^2 \cdot (AC+BC-AB)^2 \text{ (из формулы Герона)}$$

$$\text{Откуда } 16 \cdot 90^2 = ((AB+BC)^2 - BC^2) (BC^2 - (AB-BC)^2)$$

$$= (720 - 144 + 2AB \cdot BC) (144 - 720 + 2AB \cdot BC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 90^2 = (360 - 72 + AB \cdot BC) \cdot (72 - 360 + AB \cdot BC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 180^2 = (AB \cdot BC + 288) \cdot (AB \cdot BC - 288) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 180^2 = AB^2 \cdot BC^2 - 288^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 180^2 + 288^2 = (AB \cdot BC)^2 = 9^2 \cdot (20^2 + 32^2) =$$

$$= 9^2 \cdot 4^2 \cdot (5^2 + 8^2) = 36^2 \cdot (25 + 64) = 36^2 \cdot 89 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB \cdot BC = 36\sqrt{89} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB - BC)^2 = 720 - 2 \cdot 36\sqrt{89} \Rightarrow |AB - BC| = \sqrt{720 - 72\sqrt{89}}$$

$$= 6 \cdot \sqrt{20 - 2\sqrt{89}}$$

$$(AB + BC)^2 = 720 + 2 \cdot 36\sqrt{89} \Rightarrow AB + BC =$$

$$= 6 \cdot \sqrt{20 + 2\sqrt{89}}$$

$$\text{Откуда } |AB^2 - BC^2| = 36 \cdot 2 \cdot \sqrt{100 - 89} = 72\sqrt{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB^2 = 72 \cdot \frac{10 + \sqrt{11}}{2} = 360 + 36\sqrt{11}$$

$$BC^2 = 72 \cdot \frac{10 - \sqrt{11}}{2} = 360 - 36\sqrt{11}$$

(или наоборот)

$$\text{Откуда } 4BB_1^2 = 2BC^2 + 720 + 72\sqrt{11} - 360 + 36\sqrt{11} =$$

$$= 2BC^2 + 360 + 108\sqrt{11}$$

$$4CC_1^2 = 2BC^2 + 720 - 72\sqrt{11} - 360 - 36\sqrt{11} =$$

$$= 2BC^2 + 360 - 108\sqrt{11} \quad (\text{стр. 2(3)})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(или наоборот).

$$\text{Откуда } BV_1^2 = 72 + ~~10~~ 10 + 27\sqrt{11} \quad (\text{или наоборот})$$

$$CV_1^2 = 72 + 90 - 27\sqrt{11}$$

(или наоборот). (далее  $AA_1 \cdot BV_1 \cdot CV_1 \rightarrow$  считается вручную)

$$AA_1 \cdot BV_1 \cdot CV_1 = 18 \cdot \sqrt{162^2 - (27\sqrt{11})^2} \quad (\text{ответ})$$

(почти точно-  
точно)

(ср. 3/3)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$9 + \frac{9}{k^2} > d^2 \Rightarrow \frac{32}{k^2} = \frac{4}{k^2 + 1}$$

$$99 + \frac{99}{k^2} > 32 = \frac{4}{k^2} \quad (\text{уст.})$$

$$12k^2d - k^2d^2 - 32k^2 + 4 > 0$$

$$12d - d^2 - 32 + \frac{4}{k^2} > 0$$

$$d^2 - 12d + 32 - \frac{4}{k^2} < 0$$

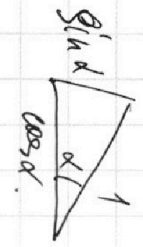
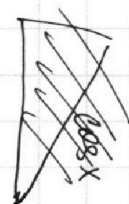
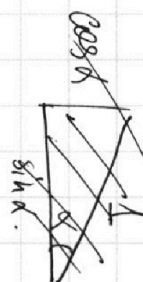
$$\frac{D}{4} = 36 - (32 - \frac{4}{k^2}) = 4 + \frac{4}{k^2} \Rightarrow 6 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} < d < 6 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$$

$$9 + 0/k^2 > 6 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$$

$$9t^2 > 6 - 2t$$

$$9t^2 + 2t - 6 > 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 54 = 55 \Rightarrow t >$$



$$\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - x$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3,3 → совб. точка.

~~$(x=3,3)$~~   $y = k(x-d)$   
 $y^2 + x^2 = 9$

$$x^2 + k^2(x-d)^2 = 9$$

$$x^2 + k^2 x^2 - 2k^2 x d + k^2 d^2 = 9$$

$$(k^2 + 1)x^2 - 2k^2 x d + k^2 d^2 - 9 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (k^2 d)^2 - (k^2 + 1)(k^2 d^2 - 9) =$$

$$= k^4 d^2 - k^4 d^2 + 9k^2 - k^2 d^2 + 9 =$$

$$= 9k^2 + 9 > k^2 d^2$$

$$9 + \frac{9}{k^2} > d^2$$

$$(x-6)^2 + k^2(x-d)^2 = 4$$

$$x^2 - 12x + 36 + k^2 x^2 - 2k^2 x d + k^2 d^2 = 0$$

$$x^2(1+k^2) - 2x(6+k^2 d) + (k^2 d^2 + 36) = 0$$

$$\frac{D}{4} = (6+k^2 d)^2 - (1+k^2)(k^2 d^2 + 36) =$$

$$= 36 + k^4 d^2 + 12k^2 d - k^2 d^2 - 36 - k^4 d^2 - 36k^2 =$$

$$= 12k^2 d - 36k^2 > 0$$

$$k^2 d > 32k^2 + 36$$

$$9 + \frac{9}{k^2} > d > 32 + \frac{36}{k^2} \rightarrow \text{нельзя}$$

$$= 14k^2 d - 32k^2 + 4 > 0$$

$$14k^2 d > 32k^2 - 4 \Rightarrow d > \frac{32}{14} - \frac{4}{14k^2}$$