



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{Пусть } a &= 2^{\alpha_a} \cdot 3^{\beta_a} \cdot 5^{\gamma_a} \cdot k_a \\ b &= 2^{\alpha_b} \cdot 3^{\beta_b} \cdot 5^{\gamma_b} \cdot k_b \\ c &= 2^{\alpha_c} \cdot 3^{\beta_c} \cdot 5^{\gamma_c} \cdot k_c \end{aligned}$$

Где $\alpha_a, \beta_a, \gamma_a, k_a, \alpha_b, \beta_b, \gamma_b, k_b, \alpha_c, \beta_c, \gamma_c, k_c$ - ~~натур.~~ целые неотриц. числа

Заметим, что ~~k_a, k_b и k_c~~ не равны нулю, т.е.

И k_a, k_b, k_c не кратны 2, 3 и 5
Т.к. a, b и c натуральные числа,
то k_a, k_b и k_c не равны нулю

Тогда из условия следует, что:

$$1) \begin{cases} \alpha_a + \alpha_b \geq 7 \\ \alpha_b + \alpha_c \geq 13 \\ \alpha_c + \alpha_a \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq \frac{7+13+14}{2} = 17$$

$$2) \begin{cases} \beta_a + \beta_b \geq 11 \\ \beta_b + \beta_c \geq 15 \\ \beta_c + \beta_a \geq 17 \end{cases} \Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{11+15+17}{2} = 21,5$$

Т.к. $\beta_a, \beta_b, \beta_c$ - целые, то

$$\beta_a + \beta_b + \beta_c \geq 22$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \begin{cases} x_a + x_b \geq 14 \\ x_b + x_c \geq 16 \\ x_c + x_d \geq 43 \end{cases} \Rightarrow x_a + x_b + x_c \geq x_a + x_c \geq 43$$

В 1) равенство достигается при $a = 4$,
 $b = 3$, $c = 10$

В 3) равенство достигается, например, при
 $x_a = 20$, $x_c = 23$, $x_b = 0$

В 2) равенство достигается, например, при
 $a = 7$, $b = 5$, $c = 10$

$$\text{Тогда } abc = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot 2^{a+b+c} \cdot 3^{b+c} \cdot 5^{a+b+c}$$
$$\geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

$$\text{Пример: } a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^{20}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{23}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

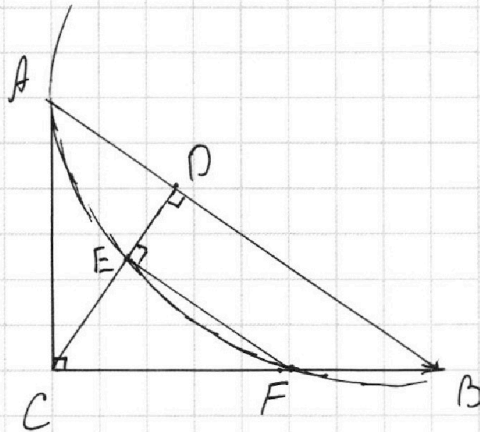
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $S_{ABC} = a$

$S_{CEF} = b$

$S_{ACD} = c$, $S_{CDB} = d$

$$\frac{AB}{BD} = 1,3 \quad \Rightarrow \quad BD = \frac{AB}{1,3} \quad \Rightarrow \quad AD = AB - BD = 0,3 \frac{AB}{1,3}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{AD}{AB} = \frac{0,3}{1,3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{0,3}{1,3} a$$

$$\frac{d}{a} = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{1,3} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a}{1,3}$$

Т.к. $EF \parallel AB$, то $\frac{b}{d} = \left(\frac{CE}{CD}\right)^2 \Rightarrow b = \frac{a}{1,3} \cdot \left(\frac{CE}{CD}\right)^2$

\Downarrow
 $\triangle CEF \sim \triangle CDB$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi]$$

$$x \in \overset{\parallel}{\sqrt{}} \left[-\frac{3\pi}{2}; 3\frac{1}{2}\pi \right]$$

При $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right)$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

При $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right]$

$$5 \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 5 \arccos\left(\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 5\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\overset{\parallel}{\sqrt{}} \\ x = -\frac{3\pi}{2}$$

При $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$

~~$$5 \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 5\left(\pi - \arccos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) + x$$
$$= 5\left(\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{5\pi}{2} + 5x$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{5\sqrt{5}}{2} + 5x \quad \frac{3\sqrt{5}}{2} + x$$

$$4x \quad 5 - \sqrt{5}$$

$$x \quad 5 \quad \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

$$5 \arccos \left(\cos \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right) = 5 \arccos \left(\cos \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - x \right) \right) =$$

$$5 \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - x \right) = \frac{5\sqrt{5}}{2} - 5x$$

$$\frac{5\sqrt{5}}{2} - 5x = \frac{3\sqrt{5}}{2} + x \quad 6x = 5\sqrt{5} \quad x = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

При $x \in \left(\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{3\sqrt{5}}{2} \right]$

$$5 \arccos \left(\cos \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right) = 5x - \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$5x - \frac{5\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} + x \quad 4x = 4\sqrt{5} \quad x = \sqrt{5}$$

При $x \in \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}; \frac{5\sqrt{5}}{2} \right]$

$$5 \arccos \left(\cos \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right) = 5 \arccos \left(\cos \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - x \right) \right) =$$

$$5 \arccos \left(\cos \left(\frac{5\sqrt{5}}{2} - x \right) \right) = \frac{25\sqrt{5}}{2} - 5x$$

$$\frac{25\sqrt{5}}{2} - 5x = \frac{3\sqrt{5}}{2} + x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$6x \leq \frac{22\pi}{2} \leq 11\pi$$
$$x \leq \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{При } x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$$

$$5 \arccos \left(\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \leq 5 \arccos \left(\cos \left(x - \frac{5\pi}{2} \right) \right) \leq$$

$$\leq 5x - \frac{25\pi}{2}$$

$$5x - \frac{25\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x \leq \frac{28\pi}{2} \leq 14\pi$$

$$x \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2} \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

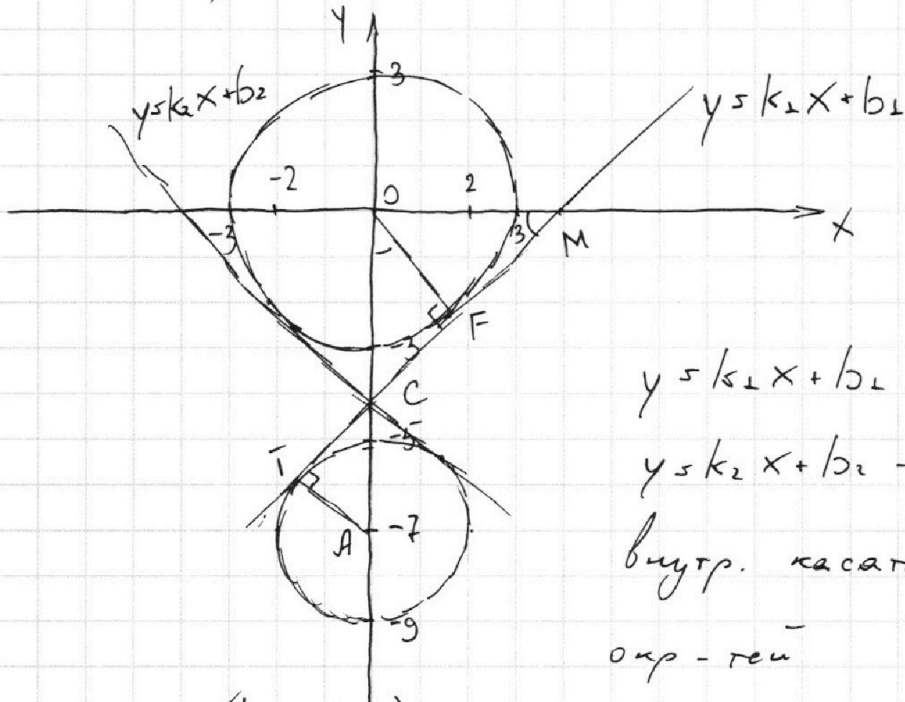
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3ay + 7b = 0 \\ \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \end{cases}$$



$y = k_1 x + b_1$ и
 $y = k_2 x + b_2$ — общие
внутр. касательные
окр-тей

При $a \in (k_2; k_1)$ можно подобрать b
такое, что мы получим 4 точки пере-
сечения

C — точка пересечения касательных

В силу симметрии $C \in OY$ (симметрия отн.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

оси OY)

A - центр окр-ти $(x+2)^2 + y^2 = 4$

T и F - пересечения кас. $y = k_1 x + b_1$

с окр-тями A и O соот-но

В силу подобия $\triangle ACT$ и $\triangle OCF$:

$$\frac{OC}{CA} = \frac{OF}{AT} = \frac{3}{2}$$

$$OC + CA = OA = 7 \Rightarrow OC = OA \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{5} = 4,2$$

Тогда $C(0; -4,2)$

$$b_1 = b_2 = -4,2$$

M - пересечение TF и OX

Из прямоуг. \triangle -ка MOC :

$$MO \cdot OC = OF^2$$

$$MO = \frac{OF^2}{OC} = \frac{9}{\frac{21}{5}} = \frac{9 \cdot 5}{7} = \frac{45}{7}$$

Тогда $M\left(\frac{15}{7}; 0\right)$

$$CF \cdot FM = OF^2$$

$$CF^2 = OC^2 - OF^2$$

$$OM^2 = OF^2 + FM^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$OM^2 = OF^2 + \left(\frac{OF^2}{CF}\right)^2 = OF^2 + \left(\frac{OF^2}{\sqrt{OC^2 - OF^2}}\right)^2 = 9 + \left(\frac{9}{\sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 9}}\right)^2$$

$$= 9 + \left(\frac{9 \cdot 5}{\sqrt{21^2 - 9 \cdot 25}}\right)^2 = 9 + \left(\frac{9 \cdot 5}{6\sqrt{6}}\right)^2 = 9 + \frac{81 \cdot 25}{36 \cdot 6}$$

$$= 9 + \frac{3 \cdot 25}{2^3} = 9 \cdot \frac{8 + 3 \cdot 25}{8} = \frac{147}{8}$$

$$k_1 \cdot OM = \sqrt{\frac{147}{8}}$$

$$M \in \left(\sqrt{\frac{147}{8}}; 0\right)$$

$$k_1 \cdot \sqrt{\frac{147}{8}} = -b_1 = 4,2 = \frac{21}{5}$$

$$k_1 = \frac{21}{5} \cdot \sqrt{\frac{8}{147}} = \frac{21}{5 \cdot 7} \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

В силу симметрии отн. оси OY :

$$k_2 = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$a \in \left(-\frac{\sqrt{24}}{5}; \frac{\sqrt{24}}{5}\right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{\sqrt{24}}{5}; \frac{\sqrt{24}}{5}\right) \quad \left(a \in \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}; \frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4 6x - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x} 343 - 4 =$$

$$= \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4 \quad | \cdot \log_7 6x$$

~~6x~~

$$\log_7^5 6x + 4 \log_7 6x - \frac{7}{2} = 0$$

$$2 \log_7^5 6x + 8 \log_7 6x - 7 = 0$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_7 (7^5) - 4 =$$
$$= \frac{5}{2} \log_7 7 - 4$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \quad | \cdot 2 \log_7 y$$

$$2 \log_7^5 y + 8 \log_7 y + 7 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^* 6x = t$$

$$\log_7^* y = k$$

$$\begin{cases} 2t^5 + 8t - 7 = 0 \\ 2k^5 + 8k + 7 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что обе ф-ции возрастающие
⇓

Имеют максимум 1 корень

Т.к. в условии сказано, что равенства
выполняются, то этот корень существует

Если при $t = a$: $2a^5 + 8a - 7 = 0$, то

заметим, что при $k = -a$: $-2a^5 - 8a + 7 =$

$$= -(2a^5 + 8a - 7) = 0$$

$$\Downarrow \\ \log_7 6x = -\log_7 y = \log_7 \frac{1}{y}$$

$$6x = \frac{1}{y} \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

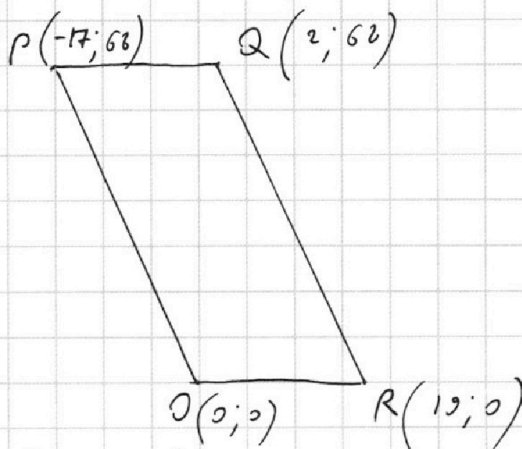


$$OR: y \geq 0$$

$$PQ: y = 68$$

$$OP: y \leq -\frac{68}{17}x$$

$$QR: y \leq -\frac{68}{17}(x-19)$$



Т.к. обе точки внутри пар-ля:

$$\begin{cases} y_1 \leq 68 \\ y_1 \leq -\frac{68}{17}(x_1-19) \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_1 \geq -\frac{68}{17}x_1$$

$$\begin{cases} y_2 \leq 68 \\ y_2 \leq -\frac{68}{17}(x_2-19) \end{cases}$$

$$y_2 \geq 0$$

$$y_2 \geq -\frac{68}{17}x_2$$

$$y_2 - y_1 \geq -\frac{68}{17}x_2 - \left(-\frac{68}{17}(x_1-19) \right) = -\frac{68}{17}(x_2-x_1) + 68 -$$

$$- * \frac{68 \cdot 19}{17}$$

$$y_2 - y_1 \geq -68$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y_2 - y_1 \leq -\frac{68}{17}(x_2 - 19) + \frac{68}{17}x_1 \leq -\frac{68}{17}(x_2 - x_1) + \frac{68}{17} \cdot 19$$

$$y_2 - y_1 \leq 68$$

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 \leq$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

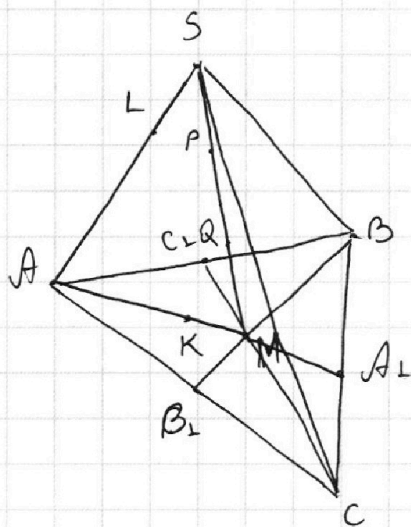
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

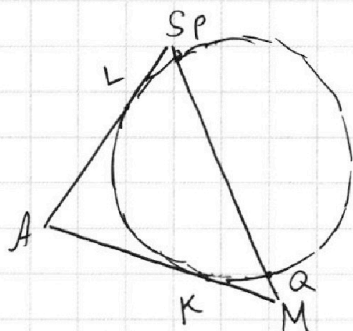
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим плоскость ASM и сечение шара -
-окр-ть $PQKL$



$AL = AK$, как касательные

$$\begin{aligned} & \text{Р} \quad MQ \cdot MP = MK^2 \\ & \quad SP \cdot SQ = SL^2 \end{aligned}$$

$$MP = MQ + PQ$$

$$SQ = SP + PQ$$

Т.к. $SP = MQ$, то

$$MK^2 = MQ (MQ + PQ) = SP (SP + PQ) = SL^2$$

$$MK = SL$$

$$MA = SA = 10$$

Рассмотрим $\triangle ABC$:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

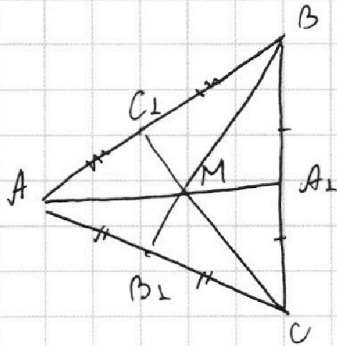
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$MA_1 = AM = 5$$

$$AA_1 = MA_1 + AM = 15$$

$$BA_1 = A_1C = 5$$

$\triangle BMC$ мед. равна половине

и гипотенуз, т.е. $\angle BMC = 90^\circ$

$$\angle C_1MB_1 = \angle C_1MB = \angle CMB_1 = 90^\circ$$

$$BM = \frac{2}{3} BB_1 \quad CM = \frac{2}{3} CC_1$$

$$BM \cdot CM = \frac{2}{3} S_{BMC}$$

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = 20 \quad \left(S_{BMC} = S_{ABC} \cdot \frac{MA_1}{AA_1} = \frac{S_{ABC}}{3} \right)$$

$$BM \cdot CM = 40$$

$$BB_1 \cdot CC_1 \cdot AA_1 = 15 \cdot 40 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 15 \cdot 40 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 15 \cdot 10 \cdot 9 = 1350$$

а) Ответ: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 1350$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin x = \cos \frac{3\alpha + x}{2}$$

$$2c - 2b = 7$$

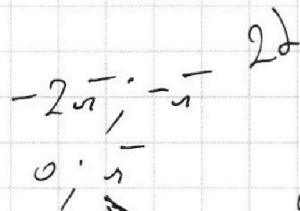
$$2c + 2b = 13$$

$$2c = 20$$

$$c = 10$$

$$2b = 3$$

$$b = 1.5$$



$$3\alpha + 2\beta = 90^\circ$$

$$\cos \cos + \sin \sin$$

$$5 \cos \cos \left(\cos \left(\frac{\alpha - x}{2} \right) \right)$$

$$5 \left(\cos \left(\frac{\alpha - x}{2} \right) \right)$$

$$AC^2 = CF \cdot CB$$

$$\beta_c - \beta_b = 6$$

$$\beta_c + \beta_b = 15$$

$$CD^2 = AC \cdot CB$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CF}{AC}$$

$$- \cos x = 5$$

$$CF \cdot FB$$

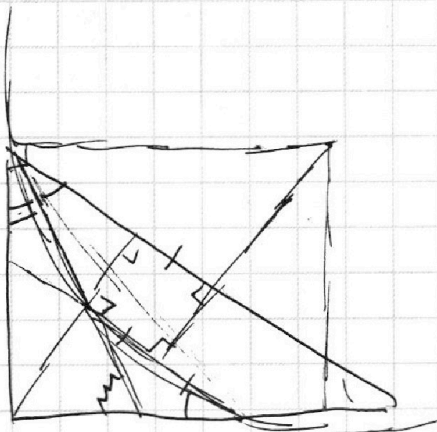
$$AD^2$$

$$\left(\frac{CF}{AD} \right)^2$$

$$\frac{CF^2}{AD^2} = \frac{CF^2}{CD^2}$$

$$0,3$$

$$0,3 = \frac{AD^2}{CD^2}$$



$$CF = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{5}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$



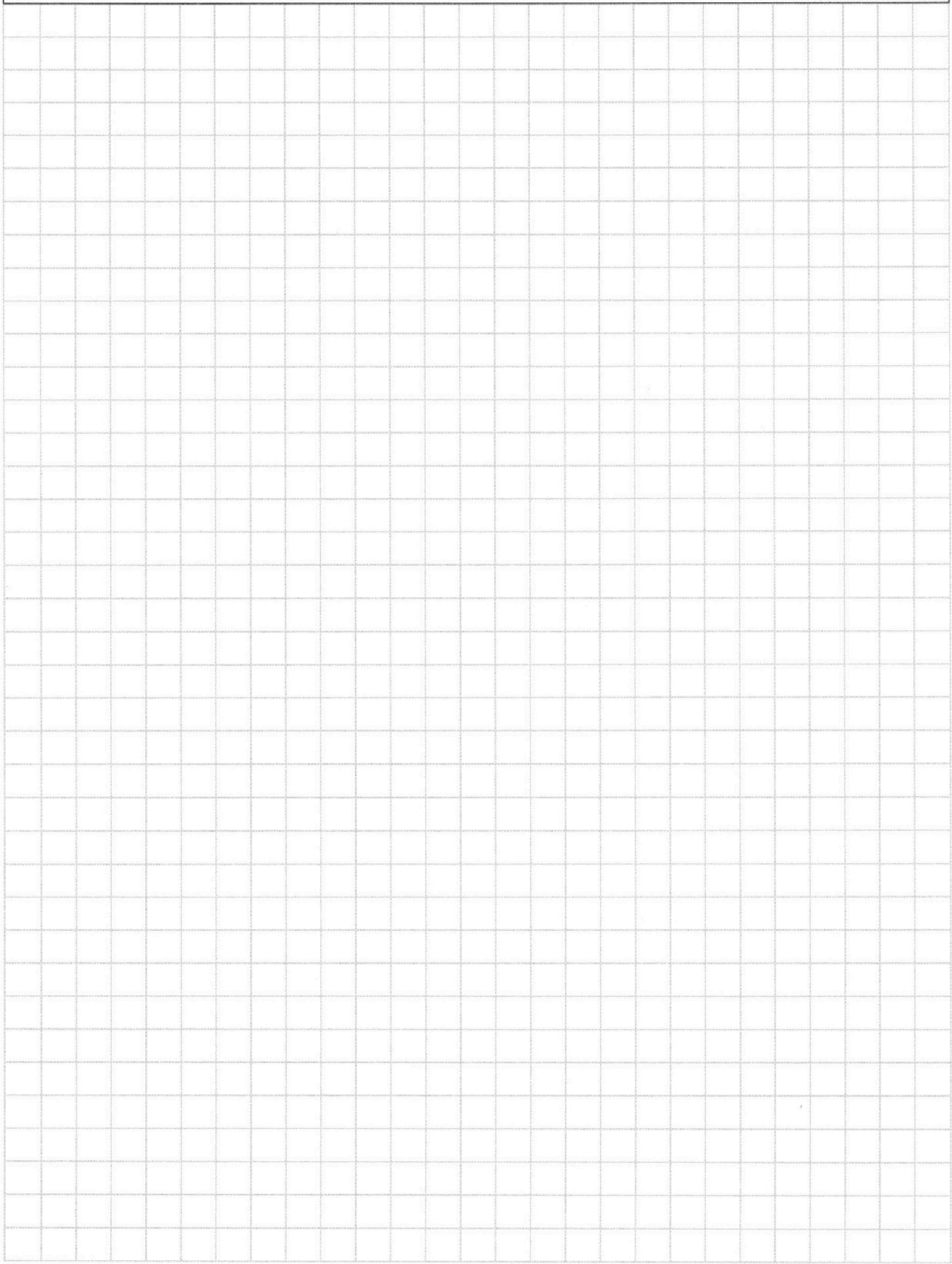
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$B \perp M$

$$BM \cdot CM = 1,5^2 \cdot AA_{\perp}^2$$

$$AA_{\perp} = 15$$

$$AK = AL$$

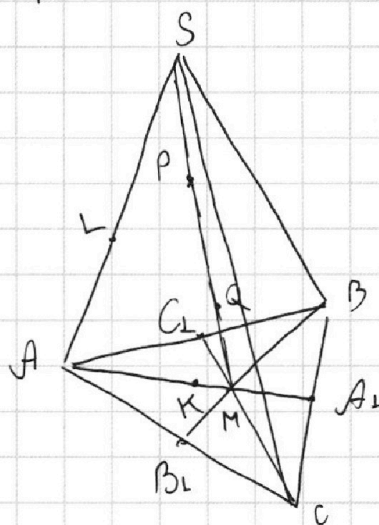
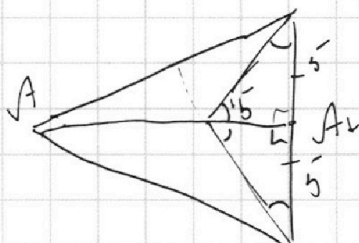
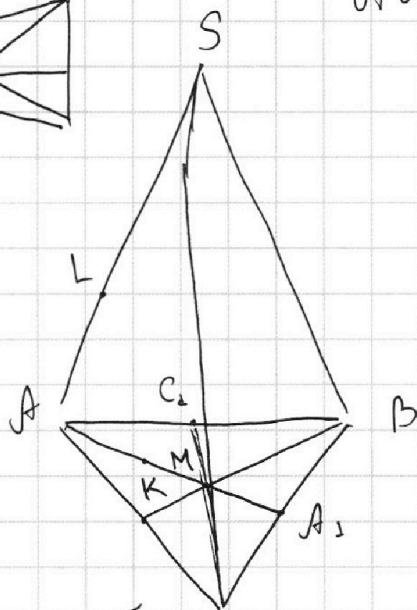
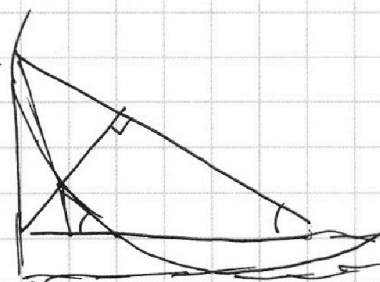
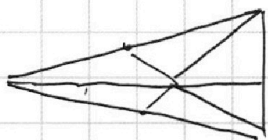
$$S_{ABC} = 60$$

$$SA = SB = SC = 10$$

$$AL = AK$$

$$SP = MQ$$

$$\begin{array}{r} \times 15 \\ 9 \\ \hline 1350 \end{array}$$

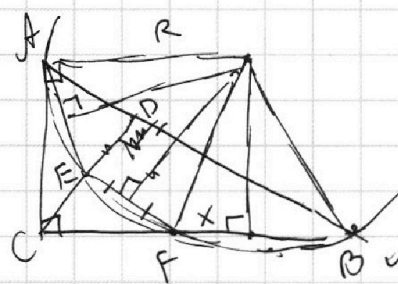
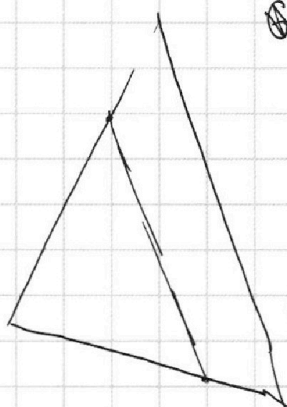


$\odot 45$

$$MK^2 = SL^2$$

$$MK = SL$$

$$AM = SA = BC$$



$$R \cdot VA \quad 1,5^2 \quad 0,5^2 \quad R - X^2 = R - X^2$$

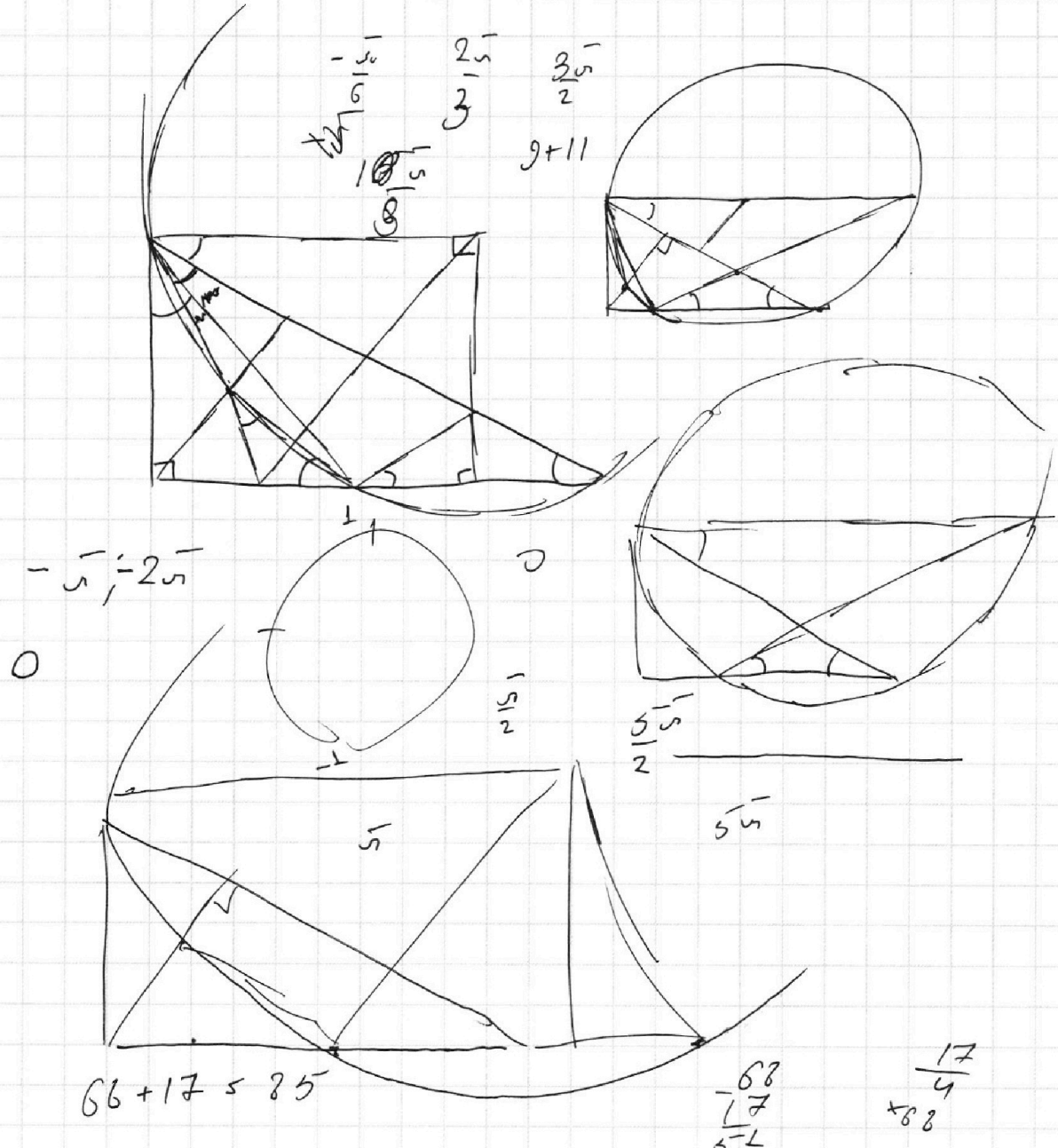
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_2 - y_1 \approx (R-x)(R+x) \approx R^2 - x^2 \approx AC^2$$

$$R-x \approx \frac{AC}{R+x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ QR

$$0,5 \cos \left(\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) 5$$

$$5 \cos \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$-\sqrt{9 - x_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{9 - x_0^2}} (x - x_0)$$

$$9 - \frac{81 \cdot 5^{-2}}{21^2}$$

$$= 9 \cdot \frac{(21-15)(21+15)}{21^2}$$

$$-\frac{(9 - x_0^2) - x_0^2}{\sqrt{9 - x_0^2}} = -4,2$$

$$81 = 9 \cdot \frac{6 \cdot 36}{21^2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{9}{4,2} = \sqrt{9 - x_0^2}$$

$$\begin{array}{r} 4,2 \\ \times 4,2 \\ \hline 16,8 \\ 1764 \end{array}$$

$$x_0 = \pm \frac{6\sqrt{6}}{7}$$

$$\sin \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$x_0^2 = 9 - \left(\frac{9}{4,2}\right)^2 = 9 - \frac{81}{17,64}$$

$$5 \cos \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \frac{5\sqrt{5}}{3} \quad \frac{3\sqrt{5}}{6} \quad \frac{5\sqrt{5}}{6} \quad \frac{10\sqrt{5}}{6}$$

$$\begin{array}{r} \times 1764 \\ 2528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0100 \\ - 7056 \\ \hline -10440 \\ \quad 8820 \\ \hline -10200 \\ \quad 15676 \\ \quad \quad 2240 \\ \quad \quad \quad 1764 \\ \quad \quad \quad \quad 4760 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 3528 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 12320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1764 \\ 7056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1764 \\ 6820 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17640 \\ 1764 \\ \hline 15876 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x} 343 - 4$$

$$\left(\log_{6x}^{\frac{1}{7}}\right)^4 - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 343 - 4$$

$$\boxed{\begin{matrix} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \end{matrix}}$$

$$7^3 \times \frac{49}{7} = 343$$

$$\log_{6x} 7 = t$$

$$7 = 6x^t$$

$$\frac{1}{t^4} - 2t = \frac{3}{2}t - 4$$

$$7 = 8^{*k} y^k$$

$$-1 \quad -2 + 1 - 2$$

$$7t^5 - 8t^4 - 2 = 0 \quad t = k$$

$$\cancel{7t^4(t-1)} \quad 10t^4 + 8 = 0$$

$$t^4 = \frac{8}{10}$$

$$\begin{matrix} y > 0 \\ y \neq 1 \end{matrix}$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_y 7^5 - 4$$

$$t = -k$$

$$\log_y 7 = k$$

$$2 + 12k^5 = 5k^5 - 8k^4$$

$$7k^5 + 8k^4 + 2 = 0 = 7(-k^5) - 8(-k^4) - 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



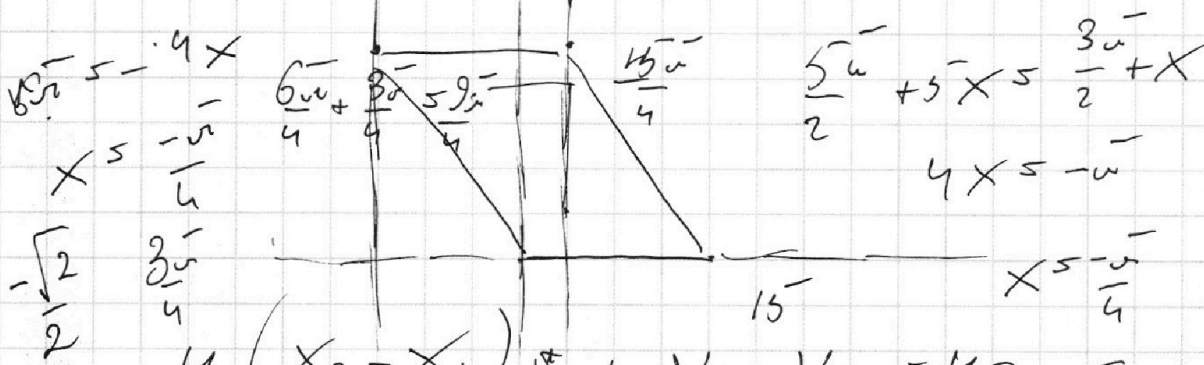
$$xy^{kt} = \left(\frac{7}{6}\right)^k \cdot 7^t$$

$$7 - 3 \cdot 5$$

$$21 - 15 = 6$$

$$21 + 15 = 36$$

$$xy^{kt} = \sqrt[k]{\left(\frac{7}{6}\right)^k \cdot 7^t} = \sqrt[k]{7} \cdot \sqrt[k]{7}$$



$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

$$19 \leq 68 - \frac{\sqrt{2}}{2} x_2, \quad x_2, x_1 \in (-17; 19)$$

$$x_2 \in [0; 36]$$

$$\begin{cases} y_2 \geq -\frac{68}{17}(x_2 - 17) \\ y_2 \leq 68 \\ y_2 \leq -\frac{68}{17}(x_2 - 36) \\ y_1 \geq -\frac{68}{17}(x_1 - 17) \\ y_1 \leq 68 \\ y_1 \leq -\frac{68}{17}(x_1 - 36) \end{cases}$$

$y_2 \geq 247$
 $y_1 \geq 0$
 $OM = FM_{OC}$
 $OM = FM_{OF}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$BF = AE$
 $\angle = 90 - \gamma$
 $90 - \beta - \gamma$
 $90 + \beta + \gamma$
 $\angle = \beta$
 $\angle = \alpha$
 $\angle = \gamma$
 $\angle = \beta + \alpha$

$\frac{[ACD]}{[CEF]} = \frac{0,3}{1,3} \cdot \frac{1,3}{1}$
 $\left(\frac{CE}{CD}\right)^2 = \frac{AC^2}{CD^2} \cdot \frac{[CEF]}{[ACD]}$
 $\frac{AC}{BC} \cdot \frac{[CEF]}{[AED]} = \dots$

$\frac{AB}{BD} = \frac{1}{3}$
 $[ACD] = \frac{0,3}{1,3} [ABC]$
 $[CEF] = \frac{1}{1,3} [ABC]$
 $\left(\frac{CE}{CD}\right)^2 = \frac{AD}{AC}$
 $CE^2 = \frac{[CEF]}{[ACD]} \cdot AC^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

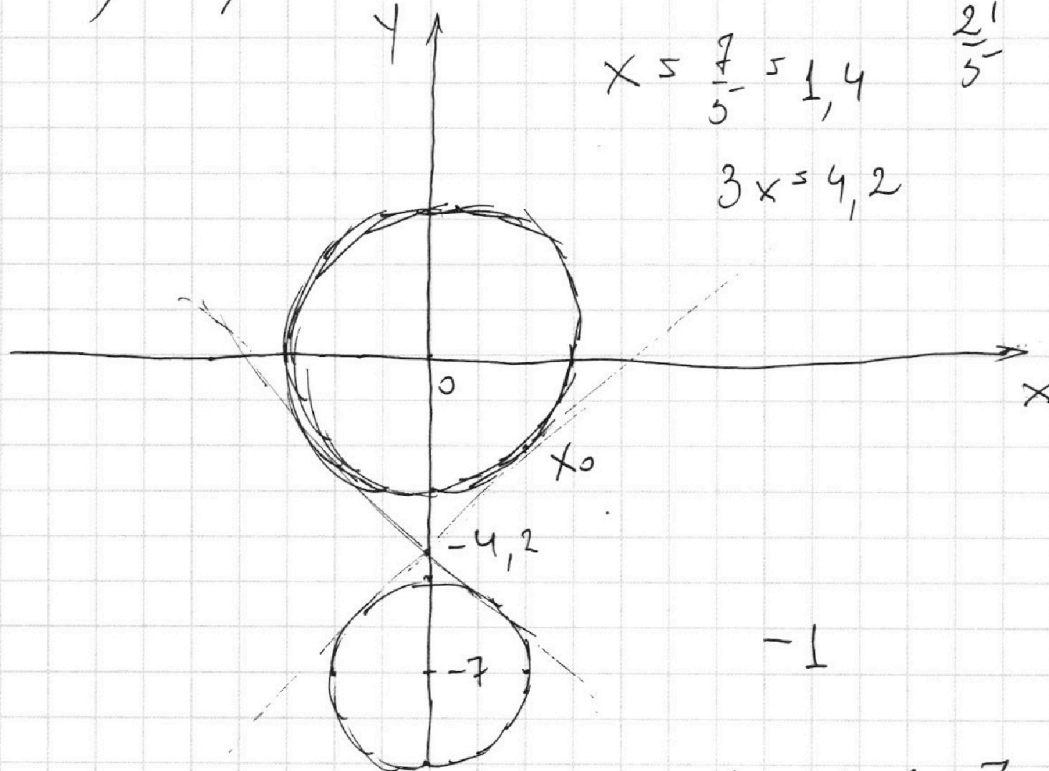
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 4$$

$$7 = 2x + 3x$$

$$x = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$3x = 4,2$$



-1

1 1+b-7

$$y = -\sqrt{9-x^2}$$
$$f(x)' = \frac{2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{-14}$$

$$bc : \beta_c - \beta_b \geq 6 \quad \beta_c + \beta_b \geq 11 \quad 6+4 \leq 11$$

$$a = 2^{\alpha_a} \cdot 3^{\beta_a} \cdot 5^{\gamma_a} \cdot k_a$$

$$b = 2^{\alpha_b} \cdot 3^{\beta_b} \cdot 5^{\gamma_b} \cdot k_b$$

$$c = 2^{\alpha_c} \cdot 3^{\beta_c} \cdot 5^{\gamma_c} \cdot k_c$$

$$\alpha_a + \alpha_b \geq 7$$

$$\alpha_b + \alpha_c \geq 13$$

$$\alpha_a + \alpha_c \geq 14$$

$$\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq \frac{7+13+14}{2} = 17$$

$$\frac{28}{43} = 21,5$$

$$\beta_c = 11$$

$$\beta_b = 5$$

$$\arccos(\sin x) = 3\pi + x$$

$$3\pi + x \in [0; \pi]$$

$$\sin x =$$

$$= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x \in [-3\pi; -2\pi]$$

$$x - \frac{\pi}{2} \in [-3,5\pi; -2,5\pi]$$

$$[0,5\pi; 1,5\pi]$$