



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

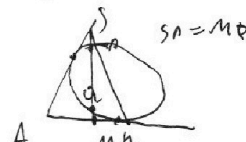
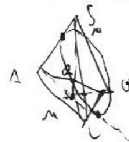
- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

$$7 \log_{10} = \begin{matrix} 5 \cdot 450 \\ 25 \cdot 90 \end{matrix}$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№1. } (abc)^2: 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}; \text{ тогда}$$

$$(abc)^2: 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52} \text{ (н.д. мин. вхождения)}$$

<sup>н.д.</sup>  
н.д. числа в  $(abc)^2$ -четна):

$$\text{тогда } abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26};$$

$$abc - \text{мин. } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26};$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}.$$

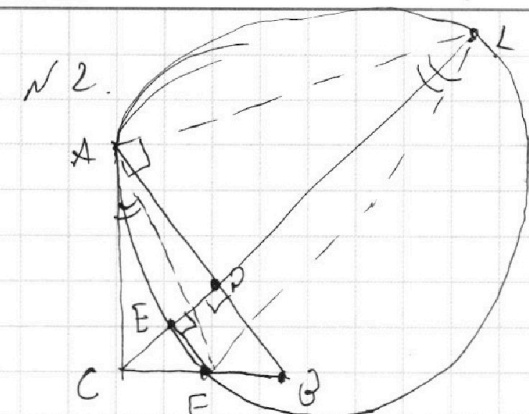
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Окруж.  $\omega$  — оск. кас. AC в A и хор. угол ECF;

2)  $CE \cap \omega = L$ ; тогда FL — диаметр  $\omega$   
(т.к.  $\angle LEF = 90^\circ$ );

3)  $AP = 2x$ ;  $BP = 5x$ ;  $\triangle CBP \sim \triangle ACP$ ;

$$\frac{2x}{5x} = \frac{CP}{5x}; \quad CP = \sqrt{10}x$$

4)  $\angle ALF = \angle FAC$  (по т. обгн. м. касат. и хорды);  
 $\angle LAF = 90^\circ$  (как оскр. на гудм.);

$\triangle LAF \sim \triangle ACF$  (по т. обгн.);  $\frac{AF}{CF} = \frac{LF}{AF}$ ;  $AF^2 = CF \cdot LF$ ;

5)  $CB = \sqrt{0x^2 + 25x^2} = 5x$  (по т. Пиф.);  $\triangle CFE \sim \triangle CBP$ ;

$$AF^2 = CF^2 + AC^2 \text{ (по т. Пиф.)}; \quad CF^2 + 14x^2 = CF \cdot LF;$$

6)  $CA^2 = CE \cdot CL$  (как оскр. м. касат.  $\omega$  и хорды).

$$14x^2 = CE \cdot CL. \quad CE = \frac{CF}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10}x = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} CF \text{ (т.к. } \triangle CEF \text{ и } \triangle CBP \text{ — подобн.)}$$

$$7) \quad CL = \frac{14x^2}{CE} = \frac{14x^2}{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} CF} = \frac{\sqrt{10} \cdot 14x^2}{\sqrt{10} CF}, \quad LE = CL - CE =$$

$$= \frac{\sqrt{10} \cdot 14x^2}{\sqrt{10} CF} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} CF; \quad \triangle LEF \text{ — прямоугольн., тогда}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$LF = \sqrt{LE^2 + EF^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{35}} CF\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{35}}{10} \cdot 14k^2 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} CEF\right)^2};$$

$$CF^2 + 14k^2 = CF \cdot \sqrt{\frac{25}{35} CF^2 + \frac{35}{10} \cdot 14^2 k^4 + \frac{10}{35} CF^4 - 28 CEF^2 k^2} \quad | : CF^2$$

$$CF^4 + 28 CEF^2 k^2 + 14^2 k^4 = CF^4 \cdot \frac{25}{35} + \frac{35}{10} \cdot 14^2 k^4 + \frac{10}{35} CF^4 - 28 CEF^2 k^2$$

$$28 CEF^2 k^2 + 14^2 k^4 = \frac{35}{10} \cdot 14^2 k^4 - 28 CEF^2 k^2 \quad | : k^2$$

$$28 CEF^2 + 14^2 k^2 = \frac{35}{10} \cdot 14^2 k^2 - 28 CEF^2$$

$$56 CEF^2 = 14^2 \cdot \frac{25}{10} k^2; \quad CF = \sqrt{\frac{14 \cdot 25}{10 \cdot 56}} k =$$

$$= \frac{\sqrt{35}}{2} k; \quad \triangle CEF \text{ vs } \triangle AC; \quad h = \frac{AC}{CF} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{2} k}{\frac{\sqrt{35}}{2} k} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{14}}{2} \cdot 2}{\frac{\sqrt{35}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \quad \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = h^2 = \frac{8}{5}. \quad \text{Ответ: } \frac{8}{5}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



реш.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \quad ;$$

$$\begin{cases} 10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - (x + 2\pi n)\right) = 9\pi - 2x; n \in \mathbb{Z} \\ 10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right)\right) = 9\pi - 2x; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad ;$$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x; n \in \mathbb{Z} \\ -5\pi + 10x - 20\pi n = 9\pi - 2x; n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad ;$$

$$\begin{cases} 8x + 4\pi + 20\pi n = 0 \\ 12x - 14\pi - 20\pi k = 0 \end{cases} \quad ; \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2,5\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

~~Ответ:  $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2,5\pi n; \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k; n, k \in \mathbb{Z}\right\}$~~

$$0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi; \quad 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi;$$

$$-0,5\pi \leq x \leq 4,5\pi; \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2,5\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases} ;$$

возврат

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2\pi \\ x = 4,5\pi \\ x = \frac{7}{6}\pi \\ x = \frac{17}{6}\pi \end{cases}$$

Ответ:  $\left\{-\frac{\pi}{2}; 2\pi; 4,5\pi; \frac{7}{6}\pi\right\}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

знаем для любого  $a$  коэффициенты,

больше  $\frac{4\sqrt{2}}{7}$  или меньше  $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$ ; можно

выбрать такое  $b$ ; а для остальных - нельзя;

т.е. прямые соотв.  $a$  могут пересекаться

каким образом? или в 2 точки;

тогда 
$$\begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{6} < \frac{4\sqrt{2}a}{7} \\ -\frac{5}{6} < -\frac{4\sqrt{2}a}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \end{cases}$$

иначе для  $a=0$ ; тогда

ответ:  $\left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



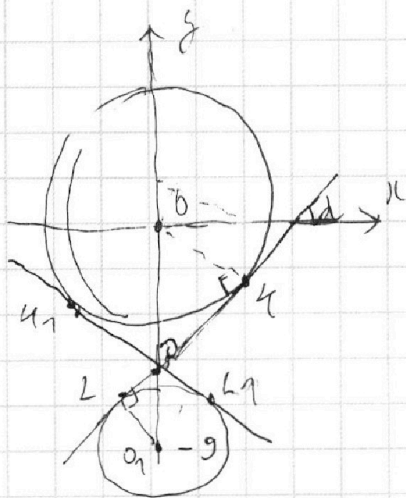
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{— 2 окружности радиусами } 5 \text{ и } 2; \text{ с } y \text{ в точках } 0 \text{ и } (0; -9).$$



$L_2$ -касат. к 2-й окр.;

$$OK_2 = 5; OK_1 = 2;$$

$$L_2 \perp OK_1 = P.$$

$$\frac{OP}{OK_1} = \frac{5}{2}; \quad OP = \frac{5}{2} \cdot 9 = \frac{45}{2};$$

$$PK_1 = \frac{2}{2} \cdot 9 = \frac{18}{2}.$$

$$\cos \alpha = \frac{OK_2}{OP} = \frac{5}{\frac{45}{2}} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9};$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2}}{\frac{5}{9}} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{5} \quad \text{— кр. коэфф. } L_2;$$

$L_1$  и  $L_2$  — вторая ось, касат. 2-й окр.; тогда  $\frac{4\sqrt{2}}{5}$  — кр.

коэфф.  $L_1$  и  $L_2$ ;  $5x + 6ay - 6 = 0$  — уравнение прямой.

при  $a = 0$ ;  $5x - 6 = 0$ , при  $6 = 0$  — 4 точки касания;

при  $a \neq 0$ ;  $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$ ; кр. коэфф.  $-\frac{5}{6a}$ ;

значит мы можем выбрать любой  $\frac{6}{6a}$  свободным;

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



р5.

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11}^2 \frac{1}{121} - 5;$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11}^2 11 - 5;$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0;$$

$$\log_{11}^4 (0,58) + \log_{0,58}^2 11 = \log_{0,1258}^2 (11^{-13}) - 5;$$

$$\log_{11}^4 (0,58) + \log_{0,58}^2 11 = -\frac{13}{3} \log_{0,58}^2 11 - 5;$$

$$\log_{11}^4 (0,58) + \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} 0,58} + 5 = 0;$$

$$\begin{cases} 3 \log_{11}^5 (0,58) + 15 \log_{11}^2 0,58 + 16 = 0 \\ 3 \log_{11}^5 (x) + 15 \log_{11}^2 x - 16 = 0 \end{cases} +$$

$$3 \log_{11}^5 (x) + 15 \log_{11}^2 x - 16 = 0;$$

A

$$\underbrace{3 (\log_{11} x + \log_{0,11}^{0,58}) (\log_{11}^4 x + \log_{11}^{0,58} - \log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^{0,58} - \log_{11}^{0,58} \cdot \log_{11}^3 x + \log_{11}^2 0,58 \cdot (\log_{11}^2 x + 5)) = 0;}$$

$$A > 0; \text{ т.е. } x^5 + 6^5 = (x+y)(x^4 + 6^4 - x^3 y - 6^3 x^2 y + 6^2 y^2);$$

где  $x^3 + 6^3$  и  $x+y$  имеют одинаковый знак; значит

второй множитель имеет знак +, или равен 0 при  $x=y=0$ ;

$$\text{значит } A > 0; \text{ тогда } \log_{11} x + \log_{11} 0,58 = 0;$$

$$\log_{11} x \cdot 0,58 = 0; \quad x \cdot 0,58 = 1; \quad x \cdot 8 = 2. \quad \text{Ответ: } 2.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

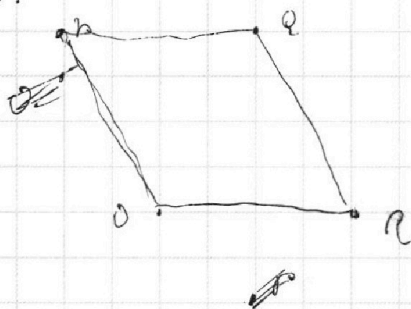
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6.



$PO: y = 4x + b; \begin{cases} 90 = -15x + b \\ 90 = \end{cases} y = 90;$

$OR: y = 0; \quad OR: y = 4x + b; \quad \begin{cases} 0 = 0 + b \\ 90 = -15x + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ x = -6 \end{cases};$

$OP: y = -6x;$

$QR: y = 4x + b; \quad \begin{cases} 90 = 2x + b \\ 0 = 7x + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ b = 102 \end{cases}; \quad QR: y = -6x + 102$

$A: \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 90 \\ y_1 \geq -6x_1 \\ y_1 \leq -6x_1 + 102 \\ 0 \leq y_2 \leq 90 \\ y_2 \geq -6x_2 \\ y_2 \leq -6x_2 + 102 \\ 6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 90 \\ 0 \leq y_2 \leq 90 \\ 0 \leq y_1 + 6x_1 \leq 102 \\ 0 \leq y_2 + 6x_2 \leq 102 \\ (y_2 + 6x_2) - (y_1 + 6x_1) = 48. \end{cases}$

~~$15 \leq x_1 \leq 21$~~   
 ~~$-15 \leq x_2 \leq 1$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

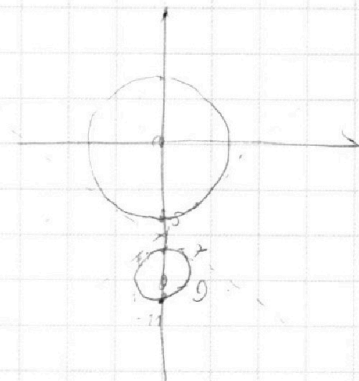


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 6y - 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25) \cdot ((x+1)^2 + y^2 + 18) + 77 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 2x = 9 \end{cases}$$



$$20y_{11}^2 - 20y_{11}^2 = 5 \cdot (0_{11}^2 + 10_{11}^2)$$

$$y^2 (x^4 + 5^2 - x)^2 - x^2 + x^2 y^2$$

$$-\frac{2}{3} \rho_{0,11}^4 - 5 = -8 \rho_{11}^4 - 6 \rho_{0,11}^2$$

$$\rho_{0,11}^4 + \rho_{0,11}^2 - \frac{13}{3} \rho_{0,11}^2 (11) = 5$$

$$\rho_{0,11}^4 + \frac{16}{3} \rho_{0,11}^2 - 15 = 0$$

$$\rho_{0,11}^4 - \frac{16}{3} \rho_{0,11}^2 + 5 = 0$$

$$3 \rho_{0,11}^5 - 5 \rho_{0,11}^3 + \frac{16}{3} = 0$$

$$3 \rho_{0,11}^5 + 15 \rho_{0,11}^3 - 16 = 0$$

$$3(\rho_{0,11}^5 + 5\rho_{0,11}^3) - 16 = 0$$

$$3(\rho_{0,11}^5 + 5\rho_{0,11}^3) - 16 = 0$$

$$\rho_{0,11}^5 + 5\rho_{0,11}^3 = \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$abc^2: \quad 2 \cdot 36 \cdot 3 \cdot 5^2$$

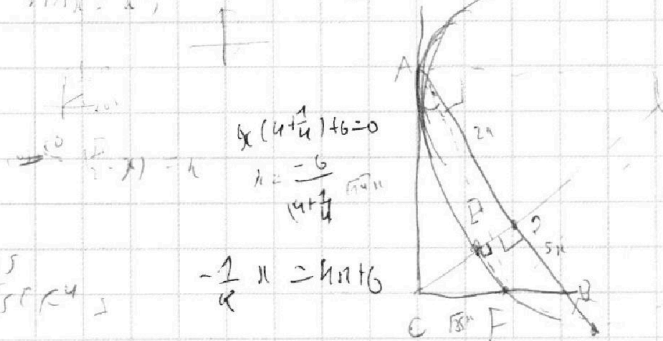
$$CF = \sqrt{\frac{35}{4}} \cdot x$$

$$CF^2 = \frac{74x^2 \cdot 25^2}{10 \cdot 56} \cdot x^2$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{5}$$

$$74x^2 = CE \cdot CL$$

$$56CF^2 = 74x^2 \cdot \left(\frac{35}{10} - 41x^2\right)$$



$$\frac{74x^2}{35CF^2} = \frac{74x^2}{35} \cdot CF = CE$$

$$\frac{AF}{CE} = \frac{AL}{AC} = \frac{FL}{AF}$$

$$10 \arccos(\sin \alpha) = 95^\circ - 211$$

$$\frac{AC^2}{CE \cdot CF}$$

$$\frac{CF}{211} = \frac{5x}{95}$$

$$5x \cdot \frac{CF}{35CF} = CE$$

$$CF^2 = 10x^2$$

$$\frac{35}{10} \cdot 10x^2 - 28CF^2 =$$

$$\left(\frac{5}{35} CF^2 + \left(CL - \frac{\sqrt{10}}{35} CF\right)^2\right) \cdot CF = 74x^2 + CF^2$$

$$CF = \sqrt{10} \cdot x$$

$$CF^2 + \frac{35}{10} 74x^2 - 28CF^2 =$$

$$74x^2 = CE \cdot CL \cdot \frac{\sqrt{10}}{35} CF \cdot CL$$

$$CF^2 + 74x^2 = CF \cdot FL$$

$$= CE^2 + 74^2 x^4 + 28CF^2 x^2$$

$$CL = \frac{74x^2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}}}{CF}$$

$$74x^2 = CE \cdot CL$$

$$\frac{15}{35} CF^4 + \left(\frac{35}{10} 74^2 x^4 + \frac{10}{35} CF^4 - 28x^2 CF^2\right)$$

$$\frac{25}{35} CF^2 + \left(74x^2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{35} CF\right)^2 \cdot CF =$$

$$= 74x^2 + CF^2$$

$$\frac{25}{35} CF^2 + \left(74x^2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{35} CF\right)^2 \cdot CF =$$

$$= 74x^2 + CF^2$$