



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BSC в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Пусть $x, y, z \in \mathbb{N}$ таковы, что

$$\begin{cases} ab = 2^9 3^{10} 5^{10} \cdot x \\ bc = 2^{14} 3^{13} 5^{13} \cdot y \\ dc = 2^{19} 3^{18} 5^{30} \cdot z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} db \cdot bc \cdot dc = (dbc)^2 = 2^{42} 3^{41} 5^{53} xyz \\ \text{Заметим, что т.к. слева полный квадрат, то} \\ \text{справа ка-во степеней двоек, троек и пятёрок} \\ \text{должно быть чётно, а по факту степени 3 и 5 - нечётны.} \end{cases}$$

Значит $xyz = 15k^2$, где $k \in \mathbb{N} \Rightarrow (dbc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54} k^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow dbc = 2^{21} 3^{21} 5^{27} k$. Значит наименьшее ~~эта~~ возможное значение dbc равно $2^{21} 3^{21} 5^{27}$ при $k=1$.

Ответ: $2^{21} 3^{21} 5^{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

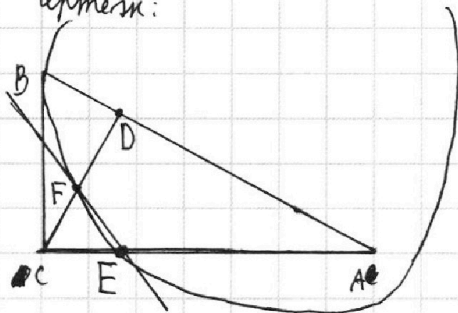
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2.

Чертеж:



Пусть $AD=3x$ и $BD=x$. Тогда
по св-ву прямоуг. треугольника
 $AD=BD \cdot CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{3}x$.

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}(AD+BD) \cdot CD = 2\sqrt{3}x^2$.

Заметим, что $\triangle ADC$ - прямоугольный, и в

нем $\operatorname{tg} \angle ACD = \frac{AD}{CD} = \frac{3x}{\sqrt{3}x} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACD=60^\circ$, и по теореме о сумме углов в треугольнике $\angle CAB=30^\circ$;
 $\angle ABC=60^\circ$; $\angle BCD=30^\circ$, откуда $BC=2x$ и $AC=2\sqrt{3}x$

Заметим, что $S_{ACD} = \frac{AD}{AB} \cdot S_{ABC} = \frac{3}{4} S_{ABC}$. Тогда м.к. $AB \parallel EF$, то $\angle CEF = \angle CAD$ и

м.к. $\angle DCA$ - общий, то $\triangle ACD \sim \triangle ECF$ по двум углам. Если $\frac{FE}{AD} = k$ -
коэффициент подобия, то $S_{ECF} = k^2 S_{ACD} = \frac{3k^2}{4} S_{ABC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{4}{3k^2}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

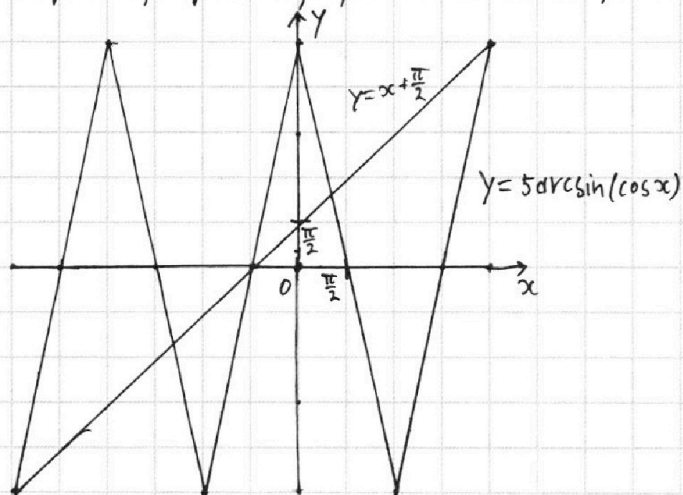
Задача №3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

Заметим, что $\arcsin(\cos x) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 5 \arcsin(\cos x) \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi].$$

Тогда нарисуем графики обеих сторон уравнения при $x \in [-3\pi; 2\pi]$:



Из графика получаем
совокупность:

$$\begin{cases} y = 5x + \frac{25\pi}{2} \\ y = x + \frac{\pi}{2} \\ x \in [-3\pi; -2\pi] \\ y = -5x - \frac{15\pi}{2} \\ y = x + \frac{\pi}{2} \\ x \in [-2\pi; -\pi] \\ y = 5x + \frac{5\pi}{2} \\ y = x + \frac{\pi}{2} \\ x \in [-\pi; 0] \\ y = -5x + \frac{5\pi}{2} \\ y = x + \frac{\pi}{2} \\ x \in [0; \pi] \\ y = 5x - \frac{15\pi}{2} \\ y = x + \frac{\pi}{2} \\ x \in [\pi; 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3\pi \\ x = -\frac{4\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} \\ x = 2\pi \end{cases}$$

- итерационный
ответ.

Ответ: $-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4.

$$\begin{cases} dx + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

Заметим, что 1^{ое} ур-ние линейной системы задаёт

с направляющим вектором $\vec{n}(d; 2)$

прямую, которую назовём l , 2^{ое} ур-ние задаёт окружность с центром в $A(0; 0)$ и радиусом 3, и 3^{ье} ур-ние задаёт окружность с центром в $B(6; 0)$ и радиусом 2.

Таким образом, чтобы их система имела ровно 4 решения необходимо, чтобы прямая l дважды пересекала с каждой окружностью. Это возможно если $\begin{cases} \rho(l; A) < 3 \\ \rho(l; B) < 2 \end{cases}$ — обозначение расстояния от точки до прямой

Тогда

$$\begin{cases} \frac{|d \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3b|}{\sqrt{d^2 + 4}} < 3 \\ \frac{|d \cdot 6 + 2 \cdot 0 - 3b|}{\sqrt{d^2 + 4}} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| < \sqrt{d^2 + 4} \\ |b - 2d| < \frac{2}{3} \sqrt{d^2 + 4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{d^2 + 4} < b < \sqrt{d^2 + 4} \\ 2d - \frac{2}{3} \sqrt{d^2 + 4} < b < 2d + \frac{2}{3} \sqrt{d^2 + 4} \end{cases}$$

Чтобы найти все подходящие значения d найдём сначала мн-во C таких значений d , что для каждого из них не нашлось подходящего значения b . Для всех таких d

$$\begin{cases} \sqrt{d^2 + 4} \leq 2d - \frac{2}{3} \sqrt{d^2 + 4} \\ 2d + \frac{2}{3} \sqrt{d^2 + 4} \leq -\sqrt{d^2 + 4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \geq \frac{10}{\sqrt{11}} \\ d \leq -\frac{10}{\sqrt{11}} \end{cases} \Rightarrow C \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{11}}] \cup [\frac{10}{\sqrt{11}}; +\infty)$$

Значит мн-во всех подходящих под условие значений d — это мн-во $\mathbb{R} \setminus C = (-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$.

Ответ: $d \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 6

Заметим, что всего в параллелограмме $43 \cdot 27 = 903$ точки с
целыми координатами.

Рассмотрим сначала пары, в которых $y_1 = y_2$. Тогда $3x_2 - 3x_1 = 33 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x_2 - x_1 = 11$. Значит таких ^{пар} ~~точек~~ при $y_1 = y_2 = k$ — 11 штук,
и всего таких пар $11 \cdot 43 = 473$.

Аналогично \varnothing пар \varnothing в которых $x_1 = x_2$ имеется ⁷⁰ ~~27~~ $27 = 237$, т.к.
тогда $y_2 - y_1 = 33$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$d = 2$

$d + b = 9k$

$b + c = 74k$

$d + c = 79k$

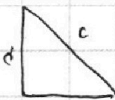
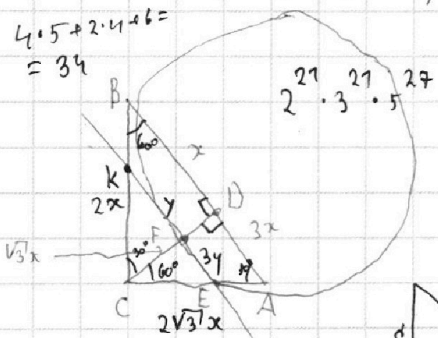
$ab = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x$

$bc = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y$

$dc = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot z$

$db \cdot bc \cdot ac = 2^{42} \cdot 3^{47} \cdot 5^{53}$

$4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 6 = 34$



$\sin = \frac{a}{c}$
 $\cos = \frac{b}{c}$

$d^4 + \frac{6}{d} = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{d} - 8$

$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8$

$\frac{2d^5}{2d} + \frac{74}{2d} = \frac{5}{2d} - \frac{74}{2d} \cdot 2d^5 + 74 \cdot 5 + 76d = 0$

$\frac{2b^5}{2b} + \frac{4}{2b} = \frac{11}{2b} - \frac{76b}{2b}$

$\frac{2d^5 - 76d + 74}{2d} = 0$

$\begin{cases} 2b^5 + 76b - 7 = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

~~$2d^5 - 76d + 74 = 0$~~

$(2d^5 + 2b^5) + (76d + 76b) = 0$

$xyz = (dbc)^2 \begin{cases} 2d^5 + 76d + 7 = 0 \\ d \neq 0 \end{cases}$

$(d^5 + b^5) + 8(d + b) = 0$

$\bar{n} = \{d; 2\} \quad |\bar{n}| = \sqrt{d^2 + 4}$

$|: d^2 + 2y - 3b = 0$

$|b| < \sqrt{d^2 + 4}$

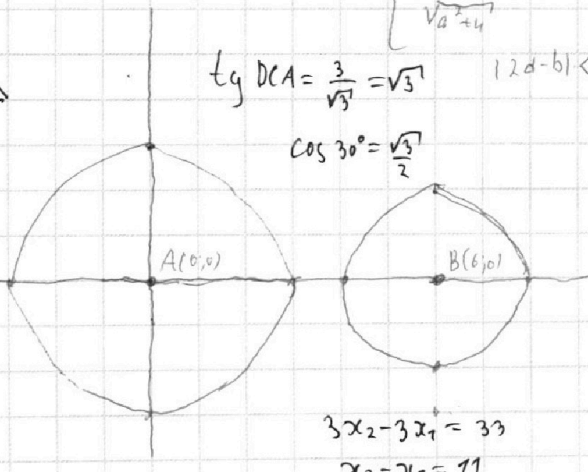
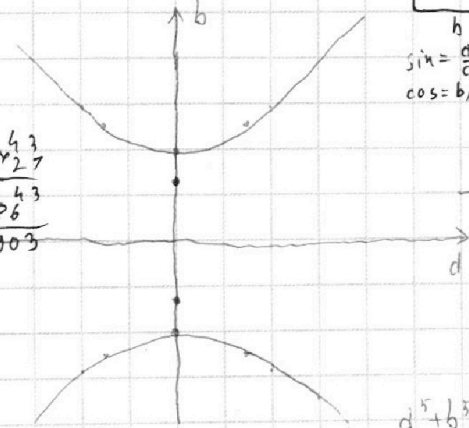
$\begin{cases} \rho(l; A) < 3 \Leftrightarrow \frac{|3b|}{\sqrt{d^2 + 4}} < 3 \\ \rho(l; B) < 2 \Leftrightarrow \frac{|16d - 3b|}{\sqrt{d^2 + 4}} < 2 \end{cases}$

$\tan DCA = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$|2d - b| < \frac{2}{3} \sqrt{d^2 + 4}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{43}{\sqrt{27}} = \frac{43}{3\sqrt{3}}$



$3x_2 - 3x_1 = 33$
 $x_2 - x_1 = 11$

$\frac{-d^5 + b^5}{d^2 + d^4b} \cdot \frac{d+b}{d^3 - d^3b + d^2b^2 - db^3 + b^4 + 8} = 0$

$|2 - b| < \frac{2\sqrt{5}}{3}$

$|b - 2| < \frac{2\sqrt{5}}{3}$

$\sqrt{17} \approx \sqrt{9+8} \approx \frac{2\sqrt{5}}{3} - 2 < b < \frac{2\sqrt{5}}{3} + 2$

$(d+b)(-8) + 8(d+b)$

$\approx 3 + \frac{2}{2\sqrt{5}}$

$-\sqrt{d^2 + 4} < b < \sqrt{d^2 + 4}$

3,33

$-\frac{2}{3}\sqrt{d^2 + 4} + 2d < b < \frac{2}{3}\sqrt{d^2 + 4} + 2d$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

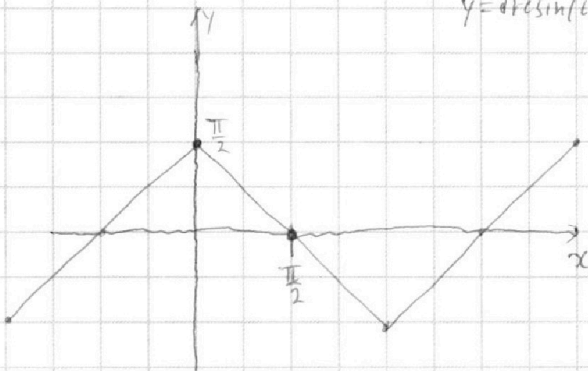
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = 4 + 6 \sin(60.6^\circ x)$$

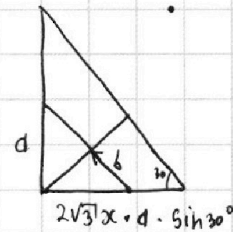


$$a + b =$$

$$2a^5 + 76d + 7 = 0$$

$$2b^5 + 76b - 7 = 0$$

$(r; 2x)$



$$y = -5x + \frac{5\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = -5x + \frac{5\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$(x-r)^2 + (y-2d)^2 = r^2$$

$$y = \sqrt{3}x$$

$$r = -5x - \frac{75\pi}{2}$$

$$-5x - \frac{75\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} \quad 3d \cdot x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}dx$$

$$-8\pi = 6x$$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$r_1 = 5$$

$$r_2 = 5$$

$$y = 0$$

$$x^2 - 2xr + d^2 = 0$$

$$3x_2 - 75 + 4 - 5 = 33$$

$$3x_2 + y_2 - 53 = 0$$

$$D = 4r^2 - 76d^2 =$$

$$= 4\sqrt{r^2 - 19d^2}$$

$$x = \frac{2r \pm 2\sqrt{r^2 - 19d^2}}{2} = r \pm \sqrt{r^2 - 19d^2}$$

$$y = 0$$

$$x^2 - 2xr + d^2 =$$

$$+ 3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$$

$$4x^2$$

$$\frac{12}{\sqrt{11}} \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{\sqrt{11}}$$

$$\frac{5}{3} \sqrt{d^2 + 4} \leq 2d$$

$$\frac{25}{9} (d^2 + 4) \leq 4d^2$$

$$\frac{100}{9} \leq \frac{36d^2 - 25d^2}{9}$$

$$100 \leq 11d^2$$

$$d \leq \frac{10}{\sqrt{11}}$$

$$\frac{10}{\sqrt{11}} \leq d$$

$$\frac{5}{3} \sqrt{d^2 + 4} \leq -2d$$

$$\frac{25}{9} (d^2 + 4) \leq 4d^2$$

$$\frac{100}{9} + 4 = \frac{144}{9}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{d^2}{3} - \frac{2d \cdot r}{\sqrt{3}} + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 + 12}{3} = \frac{2dr}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow r = \frac{d^2 + 12}{2\sqrt{3}d}$$

$$\left(\frac{d}{\sqrt{3}} - r\right)^2 + (0 - 2)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{d}{2\sqrt{3}} - r\right)^2 + \left(\frac{d}{2} - 2\right)^2 = r^2$$

$$\frac{d^2}{12} - \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot r + \frac{d^2}{4} - 2d + 4 = 0$$

$$\frac{d^2}{12} - \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot r + \frac{d^2}{4} - 2d + 4 = 0$$

$$\frac{d^2}{12} - \frac{d \cdot (d^2 + 12)}{6d} + \frac{d^2}{4} - 2d + 4 = 0$$

$$\frac{d^2}{12} - \frac{d^2 + 12}{\sqrt{3}} + \frac{d^2}{4} - 2d + 4 = 0$$

~~$$\frac{d^2}{12} - \frac{2d^2 + 24}{12d} + \frac{3d^2}{12} - \frac{24d}{12d} + \frac{48}{12d} = 0$$

$$\frac{2d^2 - 24d + 48}{12d} = 0$$~~

$$\frac{d^2}{12} - \frac{2d^2 + 24}{12} + \frac{3d^2}{12} - \frac{24d}{12} + \frac{48}{12} = 0$$

$$\frac{2d^2 - 24d - 24}{12} = 0$$

$y = -$

$$\frac{d^2}{12} - \frac{2d^2 + 24}{12} + \frac{3d^2}{12} - \frac{24d}{12} + \frac{48}{12} = 0$$

$$b \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = d\sqrt{3}x$$

$$(40x - b) \operatorname{tg} 60^\circ = d\sqrt{3}x$$

$$\frac{2d^2 - 24d + 24}{12} = 0$$

$$(d^5 + d) = (b^5 + b)$$

$$d^2 - 12d + 12 = 0$$

$$f(x) = x^5 + x$$

$$D = 144 - 4 \cdot 12 = 96 = 4 \cdot 24 = 4 \cdot 6 \cdot 4 = 6 \cdot 16$$

$$f'(x) = 5x^4 + 1$$

$$d = \frac{12 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 6 \pm 2\sqrt{6}$$

$$f(d) = -f(b) \Leftrightarrow d = -b$$

$$(6 - 2\sqrt{6})^2 = 36 + 24 - 24\sqrt{6} + 12 = 72 - 24\sqrt{6} = 24(3 - \sqrt{6})$$

$$2\sqrt{3}(6 - 2\sqrt{6}) = \frac{24\sqrt{3}(3 - \sqrt{6})}{12\sqrt{3} - 12\sqrt{2}} = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



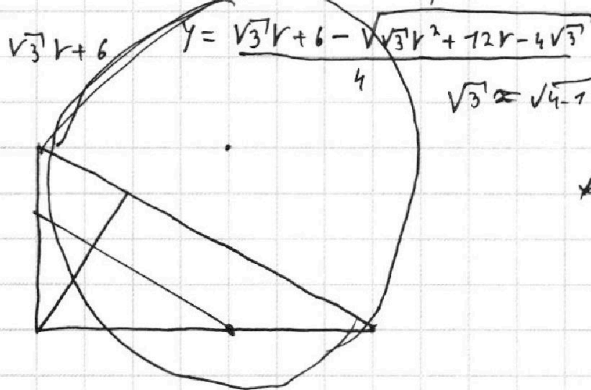
$$\begin{cases} (x-r)^2 + (y-2)^2 = r^2 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$$

$$x^2 - 2xr + r^2 + 3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = r^2$$

$$4x^2 - (2r + 4\sqrt{3})x + 4 = 0$$

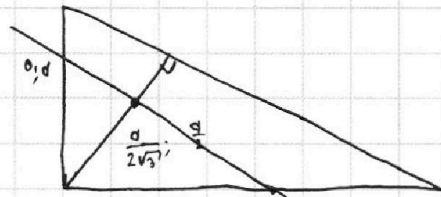
$$D = (2r + 4\sqrt{3})^2 - 64 = 4r^2 + 16\sqrt{3}r - 16$$

$$x = \frac{2r + 4\sqrt{3} \pm \sqrt{D}}{8} = \frac{r + 2\sqrt{3} \pm \sqrt{r^2 + 4\sqrt{3}r - 4}}{4}$$



$$\sqrt{3} \approx \sqrt{4-1} \approx 2$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}x &= d \\ x &= \frac{d}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &= \sqrt{3}x \\ y &= -\sqrt{3}x + d \end{aligned}$$

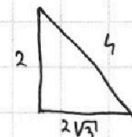
$$\begin{aligned} x &= r - \sqrt{r^2 - 4} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$(-2\sqrt{3}; 2) + (r - \sqrt{r^2 - 4}; 0) =$$

$$2t = \sqrt{3}(-2\sqrt{3} + r - \sqrt{r^2 - 4})$$

$$2t = -6t + r - \sqrt{r^2 - 4}$$

$$t = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4}}{8}$$



$$-2\sqrt{3}x + 2y + b = 0$$

$$-2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = -12$$

$$b = -4$$

$$2\sqrt{3}; -2$$

$$-2\sqrt{3}x + 2y + b = 0$$

$$2\sqrt{3}x - 2y$$

$$-2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$$

$$y = -\sqrt{3}x + 2$$

$$y = -\sqrt{3}x + d, \alpha \in [0; 2]$$

$$x =$$

