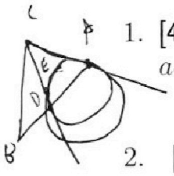
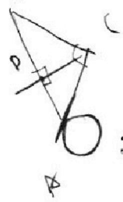
МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.



2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

$xy = \frac{1}{6}$ $\quad 6xy = 1$

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

$4x_2 + y_2 = 40$ $\quad y_2 = 40 - 4x_2$

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

$14 + 18 = 12 + 20 = 32$ $\quad 32 + 43 = 75$ $\quad 26 + 17 = 30 + 6 + 7 = 43$ $\quad \frac{43}{2} = 21{,}5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$ab \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc \vdots 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

abc_{min} - ?

Т.к. $ac \vdots 2^{14}$, то ~~abc~~ 2 в abc имеет min степень 14, если допустить, что все степени наименьшее возможные, т.е.

$\begin{cases} a_2 + c_2 = 14 \\ a_2 + b_2 = 7 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases}$, где a_2, c_2, b_2 - max степень двойки входящая в число, если степень какого-то числа больше, то и суммарная степень $a_2+c_2+b_2$ - тоже больше, т.е. если данная система имеет решения, то она - ~~m~~ min, тогда сложим все строки:

$2 \cdot a_2 + c_2 \cdot 2 + b_2 \cdot 2 = 34$, т.е. $a_2+c_2+b_2 = 17$, т.е. min степень 2 это 2^{17}, аналогично для ~~ст~~ степени тройки:

$\begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 = 15 \\ a_3 + c_3 = 17 \end{cases}$, $a_3+c_3+b_3 \geq 17$, ~~то~~ т.е. $2a_3 + 2b_3 + 2c_3 = 43$, т.е. $a_3+b_3+c_3 = 21,5$,

т.к. a, b, c - натур. числа, то и степени должны быть целыми, т.е. 21,5 - min сумма степеней, то min возможная в натуральных значениях 22, проверим, что она возможна:

т.е. должны ~~вып~~ выполняться неравенства $a_3+b_3 \geq 11$, $b_3+c_3 \geq 15$, $a_3+c_3 \geq 17$, тогда $c_3 = 11$, $b_3 = 4$, $a_3 = 7$, тогда $a_3+b_3 = 11$, $b_3+c_3 = 15$, $a_3+c_3 = 18 > 17$,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a_3+c_3+b_3=22$, т.е. min степень тройки − 22; аналогично для 5:

$a_5+b_5+c_5 \geq 43$

$$\begin{cases} a_5+b_5=14 \\ b_5+c_5=18 \\ a_5+c_5=43 \end{cases}$$, тогда $2a_5+2b_5+2c_5=75$, т.е. $a_5+b_5+c_5=37{,}5$,

тогда для натуральных чисел $a_5+b_5+c_5=38$, проверим выполнение условий: $\cancel{\begin{cases} a_5+b_5\geq 14 \\ b_5+c_5\geq 18 \\ a_5+c_5\geq 43 \\ a_5+b_5+c_5= \end{cases}}$ т.к. $ac \vdots 5^{43}$, то и $abc \vdots 5^{43}$, т.е. min сумма 43, проверим выполнение условий:

$$\begin{cases} a_5+b_5\geq 14 \\ b_5+c_5\geq 18 \\ a_5+c_5\geq 43 \\ a_5+b_5+c_5=43 \end{cases}$$, тогда $b_5=0$, $a_5=20$, $c_5=23$, неравенства выполняются, т.е. 43 − min степень 5, тогда:

Ответ: $abc_{min}=2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда $\angle CAF = 90 - \alpha - \beta$, тогда $\triangle CAF \sim \triangle DAE$, тогда

из подобия: $\frac{CF}{AC} = \frac{ED}{AD}$, т.к. в $\triangle CEF$ $\angle CFE = \alpha$,

то пусть $CF = y$, тогда из подобия $\triangle ABC$:

$CE = y \cdot \frac{AC}{AB} = y \cdot \frac{\sqrt{39}}{13} = y \cdot \sqrt{\frac{3}{13}}$, тогда, т.к. $CD = \sqrt{30}x$, то

$ED = \sqrt{30}x - y\sqrt{\frac{3}{13}}$, тогда

$$\frac{y}{\sqrt{39}x} = \frac{\sqrt{30}x - \sqrt{\frac{3}{13}}y}{3x}$$

$$3y + \sqrt{\frac{39 \cdot 3}{13}}y = \sqrt{39} \cdot \sqrt{30}x$$

$$6y = 3\sqrt{130}x$$

$y = \frac{\sqrt{130}}{2}x$, т.к. отношение площадей подобных треугольников пропорционально квадрату коэффициента подобия, то: ($\triangle ACD \sim \triangle CEF$ по углам)

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AB}{CF}\right)^2 = \frac{13x \cdot 13x}{\frac{130}{4}x^2} = \frac{13 \cdot 4}{10} = \frac{26}{5}$$

Ответ: $\frac{26}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

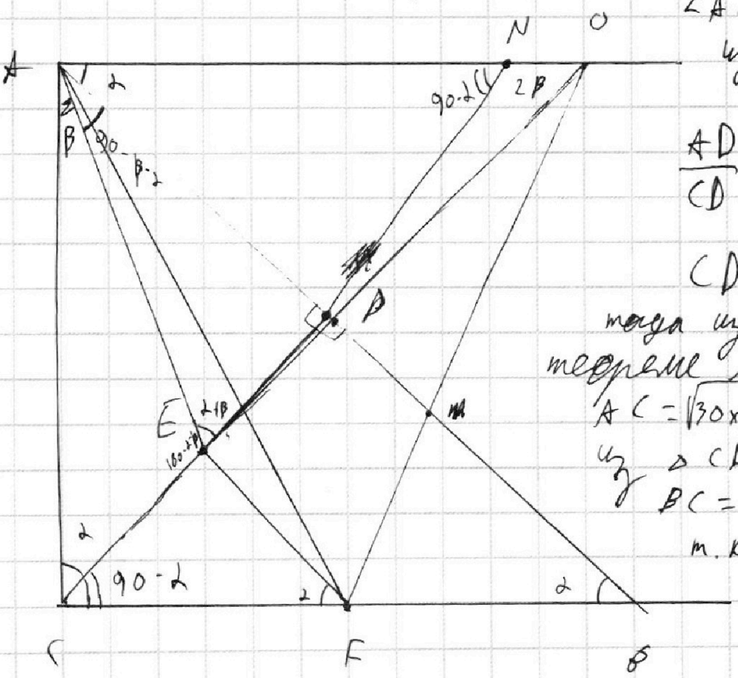
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2.

Дано:
$\triangle ABC$ - прям
$\angle C = 90^\circ$
CD - высота
$(O; R)$ - w - окр
$w \cap CD = E$
$w \cap BC = F$
$AB \parallel EF$
$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$ - ?

Пусть $BD = 10x$, тогда $AD = 3x$, тогда пусть $\angle COA = \alpha$, тогда $\angle CAB = 90^\circ - \alpha$, $\angle DCB = 90 - \alpha$, $\angle ACD = \alpha$, тогда из подобия:



$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, т.е.

$CD = \sqrt{3x \cdot 10x} = \sqrt{30}\,x$,

тогда из $\triangle ADC$ по теореме Пифагора:
$AC = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = \sqrt{39}\,x$
из $\triangle CDB$:
$BC = \sqrt{100x^2 + 30x^2} = \sqrt{130}\,x$,
т.к. A, E, F - принадлежат w, где - O центр, то как радиусы:

$AO = OE = OF$, тогда из р/б треуг.

~~из ОА~~ (пусть $\angle CAE = \beta$): $\angle OAE = 90 - \beta = \angle OEA$, т.к.

$\angle OA$ $\angle BAC = 90 - \alpha$, AC - кас. к w, то $AC \perp OA$, т.е.

$\angle OAB = 90 - (90 - \alpha) = \alpha$, тогда $\angle DAE = 90 - \beta - \alpha$ ~~$\angle AED$~~,

тогда $\angle AED = \beta + \alpha$, $\angle AOE = 2\beta$, $\angle CEA = 180 - \alpha - \beta$,

$\angle ACD = \alpha$, пусть $CD \cap AO = N$, т.к. $\angle OAC = 90^\circ$, то $\angle ANC = 90 - \alpha$, тогда $\angle OND = 90 + \alpha$, тогда $\angle NEO = 90 - 2\beta - \alpha$, тогда, т.к. $EF \parallel AB$, $AB \perp CD$, то $EF \perp CD$, т.е. $\angle DEF = 90^\circ$, то $\angle OEF = 2\beta + \alpha = \angle EFO$ (из р/б), тогда $\angle EOF = 180 - 4\beta - 2\alpha$, тогда из $AO \parallel CB$ (т.к. $BC \perp AC$, $OA \perp AC$), то $\angle NOF = \angle OFB = 180 - 4\beta - 2\alpha + 2\beta = 180 - 2\beta - 2\alpha$, тогда ~~$\angle AFE$~~ $\angle AFO = \frac{180 - (180 - 2\beta - 2\alpha)}{2} = \beta + \alpha$ (из р/б), тогда $\angle EFA = 2\beta + \alpha - \beta - \alpha = \beta$, тогда $\angle CFA = \beta + \alpha$

№3.

$$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$, пусть $x = k + 2\pi n$, ~~тогда~~, где $k \in [0; 2\pi n)$, где $n \in Z$

$$\frac{\pi}{2} - k = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} - k = \frac{3}{10}\pi + \frac{k + 2\pi n}{5}$$

$$\frac{1}{5}\pi = \frac{6}{5}k + \frac{2\pi n}{5}$$

$\pi = 6k + 2\pi n$, т.к. $6k + 2\pi n = \pi$, а т.к. $k \in [0; 2\pi)$ а $n \in Z$, то $n = 0$, т.е.

~~$k = \frac{\pi}{6}$ при $n \neq 0$: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{10}\pi + \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$~~

$$\pi = 6k$$

$k = \frac{\pi}{6}$, $x = k + 0$, т.е.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5. ОДЗ: $x>0,\ y>0,\ y\neq 1,\ x\neq \frac{1}{6}$

пусть $\log_7 6x = a$, $\log_7 y = b$, тогда:

$$\begin{cases} a^4 - \frac{2}{a} = \frac{1{,}5}{a} - 4 \\ b^4 + \frac{6}{b} = \frac{2{,}5}{b} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^5 - 3{,}5 + 4a = 0 \\ b^5 + 3{,}5 + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^5 + 4a - 3{,}5 = 0 \\ b^5 + 4b + 3{,}5 = 0 \end{cases}$$, т.е. если a_1 - решение I уравнения,

т.е. $a^5+4a=3{,}5$, то $(-a_1)^5 + 4\cdot(-a_1) = -a_1^5 + 4\cdot(-a_1) =$

$= -(a^5+4a) = -3{,}5$, т.е. $-a_1 = b_1$, где b_1 - решение II

уравнения, т.е. $a_1 + b_1 = 0$, а т.к. $a+b = \log_7 6x + \log_7 y =$

$= \log_7 6xy = 0$, т.е. $6xy = 1$, т.е. $xy = \frac{1}{6}$, ~~при $x\neq\frac{1}{6}$, $y\neq 1$,~~

~~т.е. если x [illegible] не подходит по ОДЗ, то и y тоже,~~

~~если $x<0$, то и $y<0$, т.е. [illegible] новая пара~~

Т.к. $y(a)=a^5$ - возр. функция, $g(a)=3{,}5-4a$ - убыв., то

$a^5 = 3{,}5 - 4a$ - имеет одно решение

Т.к. $f(b)=b^5$ - возр. функция, $p(b) = -4b-3{,}5$ - убыв., то

$b^5 = -4b - 3{,}5$ - имеет одно решение, т.е.

a_1 и b_1, где $a_1 + b_1 = 0$, ~~причём~~ т.е. $xy = \frac{1}{6}$ - единственное значение произведения.

Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6.

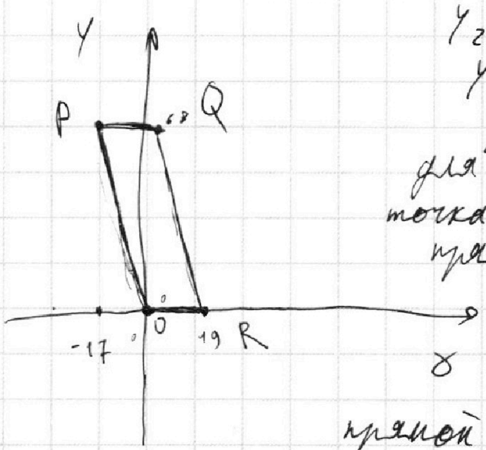
Дано:

$O(0;0)$

$P(-17;68)$

$Q(2;68)$

$R(19;0)$



Т.к. пусть $4x_2+y_2=40+k$

$y_2=40+k-4x_2$, тогда

$y_1+4x_1=k$

$y_1=-4x_1+k$, т.е.

для любого целого k, любая точка в x_2y_2 лежащая на прямой $y_2(x_2)$ будет парой для любой ~~А~~ A лежащей на прямой $y_1(x_1)$, т.е. ~~...~~

$4x_2-4x_1+y_2-y_1=40$

~~прямые~~ (данные прямые

$4x_2+y_2-4x_1-y_1=40$

не пересекаются, ~~это~~ т.к. они параллельны, т.к. коэффициент при x у них одинаковый, они ~~...~~ отличаются сдвигом на 40 по оси ~~в~~ Ox) для каждого k есть a_k в диапазоне и b_k, то кол-во пар $a_k \cdot b_k$, найдём ~~...~~ k, для которых есть целое кол-во решений в #:

Наклон OP и ~~QR~~ RQ равен -4, т.е. ($k>0$ чтобы не считать повторные прямые ($y_1'=y_2''$)), т.е.

$k\in[0;19]$, т.е.

Ответ: $18\cdot20\cdot18$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

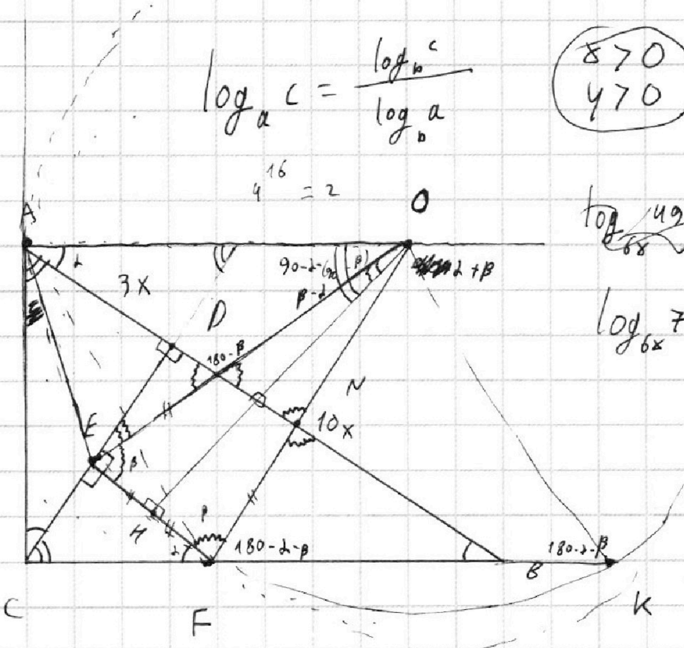
N 2.

$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$

$x>0$
$y>0$

$x \ne \frac{1}{6}$
$y \ne 1$

$4^{16} = 2$



$\log_{6x}^{49} 7$

$\log_{6x} 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 6x} = \frac{1}{\log_7 6x}$

$\log_7 6x = a$

$a = \log_{6x} 7$

7^3

$49 \cdot 7 = 280 + 63 = 343$

$\frac{1}{a^4} - 2a = 1{,}5a - 4$

$\frac{1}{a^4} = 3{,}5a - 4$

$\frac{1}{a^4} + 4 = 3{,}5a \quad 1 = 3{,}5a^5 - 4a^4$

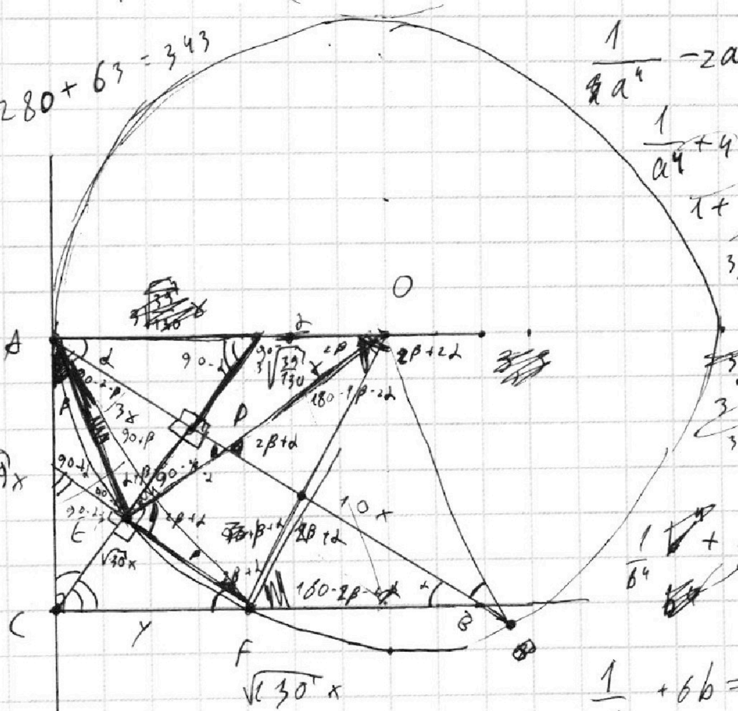
$1 + 4a^4 = 3{,}5a^5$

$3{,}5a^5 - 4a^4 - 1 = 0$

$a = \log_{6x} 7$

$b = \log_y 7$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_7 6xy\sqrt{39}x$



$\sqrt{130}x$

$\frac{1}{b^4} + 6b = 2{,}5b - 4$

$\frac{1}{b^4} + 6b = 2{,}5b - 4$

$\frac{u}{o} = \frac{\sqrt{130}x}{\sqrt{39}x} = \sqrt{\frac{130}{39}}$

$1 + 3{,}5b^4 + 4b^5 = 0$

$\frac{o}{u} = \sqrt{\frac{39}{130}}$

$2\beta + 2\alpha$

$\begin{cases} 3{,}5a^5 - 4a^4 - 1 = 0 \\ 3{,}5b^4 + 4b^5 + 1 = 0 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!