МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$
имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам
$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$
Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} a\cdot b \vdots 2^7 3^{11} 5^{14} \\ bc \vdots 2^{13} 3^{15} 5^{18} \\ ac \vdots 2^{14} 3^{17} 5^{43} \end{cases} ; a,b,c \in \mathbb{N}$$

Заметим, что, очевидно, наименьшее abc не содержит иных делителей кроме 2, 3, 5, т.к. это не противоречит заданной системе, пусть

$a = 2^{A_1}\cdot 3^{A_2}\cdot 5^{A_3}$, $b = 2^{B_1}\cdot 3^{B_2}\cdot 5^{B_3}$, $c = 2^{C_1}\cdot 3^{C_2}\cdot 5^{C_3}$, где

$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ – целые положительные числа, т.к. a, b, c – натуральные. Допустим, что иных делителей нет, т.к. в противном случае abc будет больше в n раз, где n – это ещё один делитель. Тогда по св-ву степеней: для A_1, B_1 и C_1:

$$\begin{cases} A_1+B_1 \geq 7 \\ B_1+C_1 \geq 13 \\ A_1+C_1 \geq 14 \end{cases}, \text{а } abc = 2^{A_1+B_1+C_1}\cdot 3^{A_2+B_2+C_2}\cdot 5^{A_3+B_3+C_3}, \text{ тогда:}$$

$$\begin{cases} A_1+B_1 \geq 7 \\ B_1+C_1 \geq 13 \\ A_1+C_1 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow A_1+B_1+C_1+B_1+A_1+C_1 \geq 7+13+14 \Leftrightarrow A_1+B_1+C_1 \geq 17$$

пример равенства: $A_1=4$; $B_1=3$; $C_1=10$

Аналогично для A_2, B_2, C_2 и A_3, B_3, C_3:

$$\begin{cases} A_2+B_2 \geq 11 \\ B_2+C_2 \geq 15 \\ A_2+C_2 \geq 17 \\ A_3+B_3 \geq 14 \\ B_3+C_3 \geq 18 \\ A_3+C_3 \geq 43 \end{cases} \xRightarrow{\text{складывая нер-ва}} \begin{cases} A_2+B_2+C_2 \geq 21{,}5 \\ A_3+B_3+C_3 \geq 37{,}5 \end{cases}$$

, т.к. $A_2, B_2, C_3, C_2, A_3, B_3$ – целые и положительные (т.к. $A_3+B_3+C_3 \geq A_3+C_3$, то $A_3+B_3+C_3 \geq 43$ из положительности)

$$\begin{cases} A_2+B_2+C_2 \geq 22 \\ A_3+B_3+C_3 \geq 43 \end{cases}, \text{ пример равенства: } \begin{cases} A_2=7;\ B_2=4;\ C_2=11 \\ A_3=19;\ B_3=0;\ C_3=24 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 (стр. 2)

Сл-но наименьшее $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$, возможно, например при:

$a = 2^4 3^7 5^{19}$

$b = 2^3 3^4 5^0$

$c = 2^{10} 3^{11} 5^{24}$

Ответ: $abc_{min} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 (стр. 2)

По св-ву средней линии Δ: $S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{CDB}$

т.к. $\frac{AB}{BD} = \frac{1,3}{1}$, то сл-но $\frac{AD}{BD} = \frac{0,3}{1}$, по св-ву Δ с общей высотой и ~~ос~~ основаниями на одной прямой:

$\frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = \frac{AD}{DB} = \frac{0,3}{1}$, сл-но $S_{ACD} = \frac{0,3}{1,3} S_{ABC} = \frac{3}{13} S_{ABC}$,

а $S_{CDB} = \frac{10}{13} S_{ABC}$ (т.к. $S_{ACD} + S_{CDB} = S_{ABC}$), сл-но

$S_{CEF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{13} S_{ABC} = \frac{5}{26} S_{ABC}$, откуда искомое

$\frac{S_{CAD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{3}{13} S_{ABC}}{\frac{5}{26} S_{ABC}} = \frac{3}{\frac{5}{2}} = \frac{6}{5} = 1,2$

Ответ: площади треугольника ACD и треугольника CEF относятся как 1,2 : 1

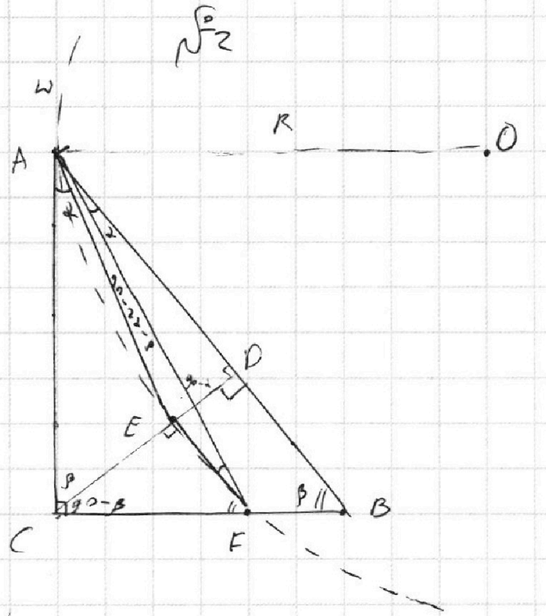
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

Дано:
ΔABC; $\angle C = 90^\circ$
CD - высота
$(O;R)$ - ω
ω касается AC в точке A
$\omega \cap CD = E$
$\omega \cap BC = F$
$\frac{AB}{BD} = \frac{1,3}{1}$
$AB \parallel EF$
$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$



Т.к. $CD \perp AB$ и $AB \parallel EF$, то ~~[illegible]~~ $CD \perp EF$. Т.к. A - точка касания, то AC - касательная к ω, тогда AE - хорда из той же точки и по св-ву: $(F \in \omega) \Rightarrow$ $\angle CAE = \angle AFE$. Пусть $\angle CAE = \angle AFE = \alpha$

Т.к. $EF \parallel AB$, то FA - секущая и $\angle EFA = \angle FAB = \alpha$, как накрест-лежащие. Пусть $\angle ABC = \beta$, тогда $\angle DCB = 90 - \beta$, т.к сумма $\angle \Delta = 180^\circ$ и $\angle CDB = 90^\circ$ (ΔCDB), аналогично для ΔCEF, $\angle CEF = 90^\circ$ (т.к. $CE \perp EF$) и $\angle ECF = 90 - \beta$, ал-но

$\angle EFC = \beta$. Т.к. $\angle ACB = 90^\circ$, из условия, то $\angle ACE = 90^\circ - \angle ECF = \beta$

Ан-но $\Delta ACE \sim \Delta ABF$ по двум углам $(\angle CAE = \alpha = \angle FAB;\ \angle ACB = \beta = \angle ABC)$

Откуда: $\frac{CE}{AC} = \frac{FB}{AB}$; $\Delta CEF \sim \Delta CDB$ по двум углам $(\angle CEF = CDB = 90^\circ;\ \angle CFE = CBD)$

Откуда: $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$, т.к. $CB = CF + FB$, то $\frac{CE}{CD} = \frac{CB - FB}{CB}$, т.е.

$FB = -CE \cdot \frac{CB}{CD} + CB$, из $\Delta ACE \sim \Delta ABF$: $FB = \frac{CE \cdot AB}{AC}$, т.е:

$CB - CE \cdot \frac{CB}{CD} = CE \cdot \frac{AB}{AC} \iff CB = CE\left(\frac{AB}{AC} + \frac{CB}{CD}\right)$

Из прямоуг. ΔABC: $\sin\beta = \frac{AC}{AB}$, т.е. $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sin\beta}$; из ΔCDB: $\sin\beta = \frac{CD}{CB}$,

т.е. $\frac{CB}{CD} = \frac{1}{\sin\beta}$, ан-но $CB = \frac{2CE}{\sin\beta} \iff \sin\beta = \frac{2CE}{CB}$, и т.к.

$\sin\beta = \frac{CD}{CB}$, то $CD = 2CE$, т.е. E - сер. CD, ан-но EF - ср. линия ΔCDB, т.к. $EF \parallel DB$ и E - сер. CD

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 3

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$, заметим, что:

$$\begin{cases} \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi n + \frac{\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad * \end{cases}$$, подставим

$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n$ в исходное уравнение:

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$; $5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi n = \frac{3\pi}{2} + x$; $6x = 10\pi n + \pi$, т.е. $x = \frac{10\pi n + \pi}{6}$,

сделаем выборку по $*$:

$$2\pi n + \frac{\pi}{2} \geq \frac{10\pi n + \pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$12\pi n + 3\pi \geq 10\pi n + \pi \geq -3\pi + 12\pi n$$

$$3\pi \geq -2\pi n + \pi \geq -3\pi; \quad 2\pi \geq -2\pi n \geq -4\pi, \text{ т.е.}$$

$$\left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n = -1 \\ n = 1 \\ n = 2 \end{array}\right., \text{ т.е. } \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} \\ x = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{11}{6}\pi \\ x = \frac{7}{2}\pi \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}$; $x = -\frac{3\pi}{2}$; $x = \frac{11}{6}\pi$; $x = \frac{7}{2}\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 4 (стр. 4)

т.е. $\begin{cases} -\frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt6} \\ -\frac{1}{3a} > -\frac{5}{2\sqrt6} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{3a} > \frac{-5}{2\sqrt6} \\ \frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt6} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{a} > -\frac{5}{6\sqrt6} \\ \frac{1}{a} < \frac{5}{6\sqrt6} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0 \\ 1 > -\frac{5}{6\sqrt6}a \\ 1 < \frac{5}{6\sqrt6}a \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ 1 < -\frac{5}{6\sqrt6}a \\ 1 > \frac{5}{6\sqrt6}a \end{cases} \end{array} \right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0 \\ a > \frac{-6\sqrt6}{5} \\ a > \frac{6\sqrt6}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ a < \frac{-6\sqrt6}{5} \\ a < \frac{6\sqrt6}{5} \end{cases} \end{array} \right.$; $a \in (-\infty; -\frac{6\sqrt6}{5}) \cup (\frac{6\sqrt6}{5}; +\infty)$

Ответ: при $a \in (-\infty; \frac{6\sqrt6}{5}) \cup (\frac{6\sqrt6}{5}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (стр. 3)

1.1)

$21A = 5C$ ($C > 7A$ – верно)

$|C| = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$-C = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$-\frac{21}{5}A = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$A \le 0$:

$\frac{21^2}{25}A^2 = 9A^2 + 9B^2$

~~решений нет~~

1.2)

$21A = C$ ($C < 7A$ – верно)

$|C| = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$-C = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$-21A = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$A \le 0$:

$21^2A = 9A^2 + 9B^2$

$9B^2 = 48A^2$

$B = -4\sqrt{3}A$

$B = 4\sqrt{3}A$

сл-но имеем две прямые:

$Ax - 4\sqrt{3}Ay + 21A = 0$; т.е.

$x - 4\sqrt{3}y + 21 = 0$

и $Ax + 4\sqrt{3}Ay + 21A = 0$, т.е.

$x + 4\sqrt{3}y + 21 = 0$

2.1)

$21A = C$ ($C > 7A$ – верно)

$|C| = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$C = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$21A = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$A \ge 0$

$21^2A^2 = 9A^2 + 9B^2$

$B^2 = 48A^2$

$B = -4\sqrt{3}A$

$B = 4\sqrt{3}A$

сл-но:

$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x - 4\sqrt{3}y + 21 = 0 \\ x + 4\sqrt{3}y + 21 = 0 \end{array}\right.$

2.2)

$21A = 5C$ ($C < 7A$ – верно)

$|C| = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$C = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$\frac{21}{5}A = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$A \ge 0$:

$\frac{21^2}{25}A^2 = 9A^2 + B^2$

~~решений нет~~

~~1.1) 2.2)~~

Варианты (1.1) и (2.2):

$\frac{21^2}{25}A^2 - 9A^2 = 9B^2 \Leftrightarrow 9B^2 = \frac{6 \cdot 36A^2}{25}$; $B^2 = \frac{6 \cdot 4A^2}{25}$, $B = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}A$,

т.е. $\left[\begin{array}{l} x - \frac{2\sqrt{6}}{5}y + \frac{21}{5} = 0 \\ x + \frac{2\sqrt{6}}{5}y + \frac{21}{5} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - 2\sqrt{6}y + 21 = 0 \\ 5x + 2\sqrt{6}y + 21 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{5}{2\sqrt{6}}x + \frac{21}{2\sqrt{6}} \\ y = -\frac{5}{2\sqrt{6}}x - \frac{21}{2\sqrt{6}} \end{array}\right.$

Сл-но уравнения l_1, l_2, l_3, l_4:

$\left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{4\sqrt{3}}x + \frac{21}{4\sqrt{3}} \\ y = -\frac{1}{4\sqrt{3}}x - \frac{21}{4\sqrt{3}} \\ y = \frac{5}{2\sqrt{6}}x + \frac{21}{2\sqrt{6}} \\ y = -\frac{5}{2\sqrt{6}}x - \frac{21}{2\sqrt{6}} \end{array}\right.$

т.к. $\frac{1}{4\sqrt{3}} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$, то, сл-но $\alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}}$,

т.е. $k \in \left(-\frac{5}{2\sqrt{6}}; \frac{5}{2\sqrt{6}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (стр. 2)

Пусть l_1 и l_4 - прямые, которые внутрене касаются окружностей ①, а l_2 и l_3 внешние. Тогда, в силу симметрии относительно оси ox, l_1 имеет угловой наклон $k=\alpha$, а l_4 тогда $k=-\alpha$

Из геометрии очевидно, что при $k\in(-\infty;-\alpha)\cup(\alpha;+\infty)$ решений (т.е. пересечений прямой с окружностями) будет не более 2, а при $k\in\{-\alpha\}\cup\{\alpha\}$ решений будет не более 2. Сл-но искомая область $k\in(-\alpha;\alpha)$

Заметим, что l_3 и l_2 имея наклон $k=-\beta$ и $k=\beta$ соответственно и строго $0<\beta<\alpha$

Запишем систему для $Ax+Bx+C=0$, описывающей l_1, l_2, l_3 и l_4 (пользуясь тем, что растояние от центра окружности до прямой это радиус)

$$\begin{cases}\dfrac{|A\cdot(-7)+B\cdot 0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2\\ \dfrac{|A\cdot 0+B\cdot 0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{|C-7A|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2\\ \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3\end{cases}, \text{т.е. } \begin{matrix}A^2+B^2\neq 0\\ C\neq 0\\ C-7A\neq 0\end{matrix}$$

$$\begin{cases}3|C-7A|=2|C|\\ |C|=3\sqrt{A^2+B^2}\end{cases}$$

1) $C\leq 0$:

$3|C-7A|=-2C$

1.1) $C\geq 7A$

$3C-21A=-2C$

1.2) $C<7A$

$21A-3C=-2C$

2) $C>0$

$3|C-7A|=2C$

2.1) $C\geq 7A$

$3C-21A=2C$

2.2) $C<7A$

$21A-3C=2C$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (2) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (1) \end{cases}$$

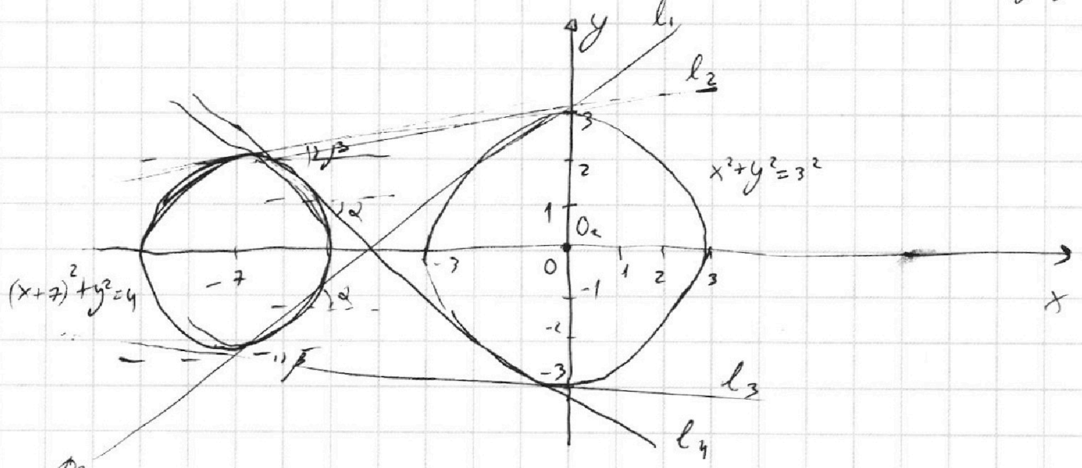
Рассмотрим уравнение (1):

$(x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right.$$

$(x+7)^2+y^2=2^2$ – уравнение окружности с центром $O_1(-7;0)$ и радиусом $r=2$

$x^2+y^2=3^2$ – уравнение окружности с центром $O_2(0;0)$ и радиусом $R=3$



Т.е. решениями (1) являются две окружности

Рассмотрим (2): $x+3ay-7b=0$ – уравнение прямой

Заметим, что при $a=0$, $x-7b=0$ – параллельна оси Oy и сл-но 4 решения никогда не имеет, сл-но $a\neq0$:

$y=-\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a}$, пусть $k=-\frac{1}{3a}$, k не зависит от b, при том $\frac{7b}{3a}$ при любом a (кроме $a=0$) принимает все значения

Т.е. при одном a уравнение $x+3ay-7b=0$ это множество прямых с угловым наклоном $k=-\frac{1}{3a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_7^4(6x) - 2\frac{1}{\log_7 6x} = \frac{3}{2}\log_{6x} 7 - 4$

$x \neq -\frac{1}{6}$

$x \neq \frac{1}{6}$

$y \neq -1$

$y \neq 1$

$373 = 7^3$

$t = \log_7 6x$ $\quad t \neq 0$

$(x^2+2x+10)(x-1) = x^3+2x^2+10x-x^2-\cancel{2x}-10 =$

$t^4 - \frac{3,5}{t} + 4 = 0$

$(x^2+x+3)(x-1) = x^3+x^2+8x-10$

$2t^4 - \frac{7}{t} + 8 = 0$

$x^3+x^2+3x-x^2-x-3 =$

$f(t) = 2t^5 - \cancel{7t} + 8t - 7 = 0$

x^3+2x-3

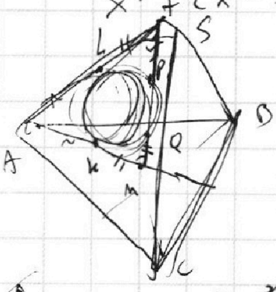
$t = \log_{6x} 7$ $\quad t \neq 0$

$\frac{1}{t^4} - 3,5t + 4 = 0$

$-3,5t^5 + 4t^4 + 1 = 0$

$3,5t^5 + 4t^4 - 1 = 0$

$7t^5 + 8t^4 - 2 = 0$



$f'(t) = 10t^4 + 8$

$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2^4} +$

$14 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^4 - 2 = 0$

$-14 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^4 - 7 = 0$

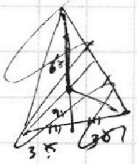
$t^4 + (2t^2+1) - 2t^2 - \frac{3,5}{t} + 3 =$

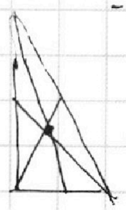
$(t^2+1)^2$

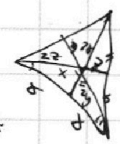
$t > 0$

-7

$2+8-7=3$ $\quad t < 1$







$\log_7 6x = \log_7 y$

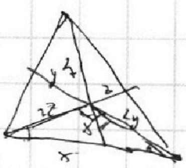
$\frac{1}{16} + 4 - 7$ $\quad t > \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}$ $\quad \frac{3^5}{4^4 \cdot 2} + \frac{3}{2} \cdot 6 - 7 =$

$6x = y$

$\frac{3^5}{2^9} - 1$

$xy \quad 6x^2 = \frac{y^2}{6}$



$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{2,5}{t} - 4$

$\log_7 6 + \log_7 xy$

$t^4 + \frac{3,5}{t} + 4 = 0$

$\log_7 y^2 = 2\log_7 y$

$4z^2 + 4y^2 = 4x^2$

$x^2 = z^2 + y^2$

$\frac{h}{3} \cdot 2x = 4zy$

$hx = 60$

$2t^5 + 8t + 7 = 0$

$\log_7 6x = \log_7 6 + \log_7 x = \log_7 6 + \frac{1}{2}\log_7 x^2$

$6zy = 60$

$t - \log_7 6 = \frac{1}{2}\log_7 x^2$

$2zy = \frac{h}{3} \cdot x$

$\log_7 6xy$

$\sin(180-2\alpha) = \frac{h}{...}$

$\sin\alpha =$

$h \cdot x = 60$

$z + y =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$f(x) = \arccos(x)$

$0 \le f(x) \le$

$x^2+14x+y^2+45=0$

$x^2+14x+49+y^2=4$

$(x+7)^2+y^2=2^2$

$x^2+y^2=3^2$ $\quad x=-7b$

$0 \le \frac{\frac{3\pi}{2}+x}{5} \le \pi$

$0 \le \frac{3\pi}{2}+x \le 5\pi$ $\quad \frac{10}{2}\pi$

$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$

$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n = \frac{3\pi}{2} + x$

$2x = 2\pi n - \pi$

$x = \pi n - \frac{\pi}{2}$

$2\pi n + \frac{\pi}{2} \ge \pi n - \frac{\pi}{2} \ge -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\arccos(\sin(-\frac{\pi}{2}))$

$\arccos(-1) = \pi$

$\arccos(\sin(\frac{\pi}{2})) = \arccos(1) = 0$

$\frac{-7A+0\cdot B+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2$

$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 3$

$C = 3\sqrt{A^2+B^2}$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x =$

$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n$

$0 \le \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \le \pi$

$Ax + 4\sqrt{3}Ay + 21A = 0$

$x + 4\sqrt{3}y + 21 = 0$

$y = -\frac{1}{4\sqrt{3}}x - 21$

$\sqrt{48} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$

$\frac{21^2 - 48\cdot 3}{25} =$

$\frac{(21-4\sqrt{3})(4\sqrt{3}+21)}{25}$

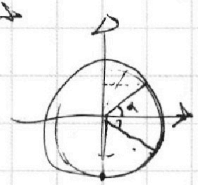
$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$

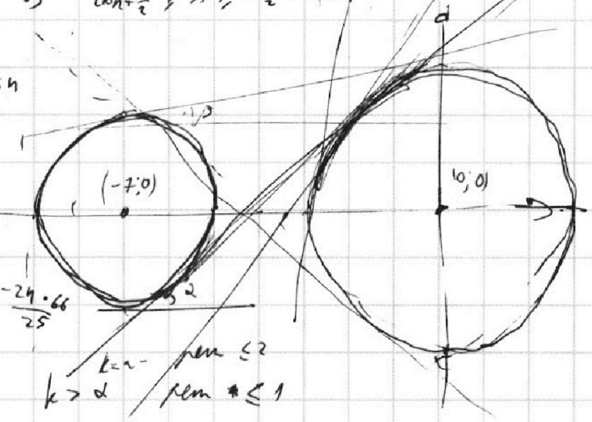
$C - 7A > 0$ $\quad C > 7A$

$21^2 - 3^2 =$

$(21-3)(21+3)$

$\frac{\pi - 10\pi}{6} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

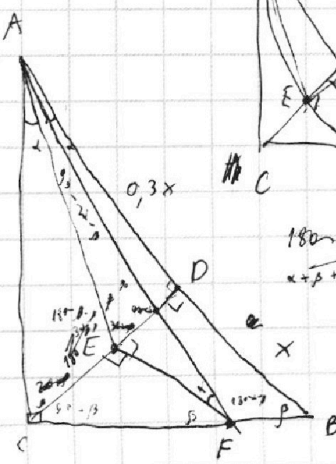
$AB = 7$
$B + C = 13$
$C + A = 14$

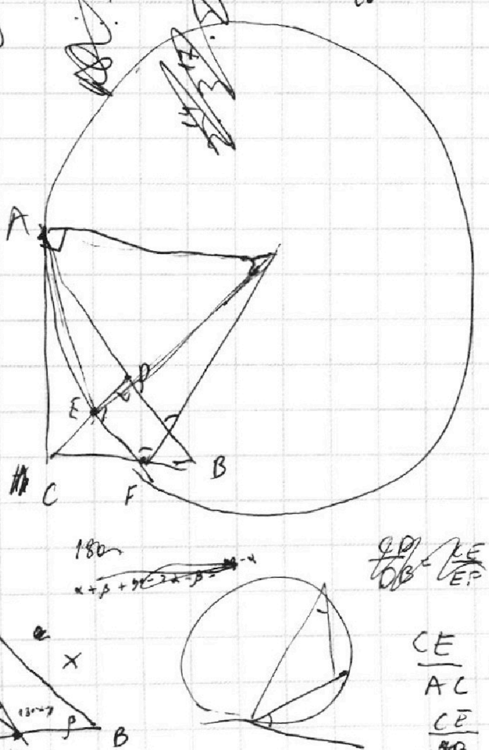
$A + B + C = 17$
$C = 10$
$A = 4$
$B = 3$

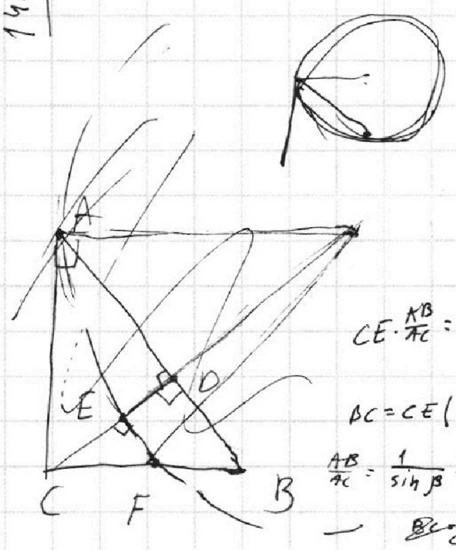
$\frac{11 + 15 + 17}{2} = 11 + 15 + 15 + 2$
$15 + 5 + 1 + 0{,}5 = 21{,}5$ 22

$\frac{14 + 18 + 43}{2} = 7 + 9 + 20 + 1{,}5 =$
$16 + 20 + 1{,}5 = 37{,}5$ 38

$C_2 = 11$
$B_2 = 4$
$A_2 = 7$







$CE \cdot \frac{AB}{AC} = CB - \frac{CE \cdot CB}{CD}$

$BC = CE\left(\frac{AB}{AC} + \frac{CB}{CD}\right)$

$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sin\beta} = \frac{CB}{CD}$

$AB \parallel EF = CE \perp EF$

$AB : BD = 1{,}3 : 1$

$BC = \frac{2CE}{\sin\beta}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$

$\sin\beta = \frac{2CE}{BC} = \frac{CD}{BC}$

$\angle CAE = \angle AFE$

$\angle AFE = \angle FAB$, т.к. $EF \parallel AB$

$\frac{CE}{AC} = \frac{FB}{AB}$

$\frac{CE}{CD} = \frac{CB - FB}{CB}$

$FB = CE \cdot \frac{AB}{AC}$

$\frac{CE \cdot CB}{CD} = CB - FB$