МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [V] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$ab \vdots 2^7 3^{11} 5^{14}$, $bc \vdots 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18}$, $ac \vdots 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43}$

Пусть $a = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$, $b = 2^{x_2}\cdot 3^{y_2}\cdot 5^{z_2}$,
$c = 2^{x_3}\cdot 3^{y_3}\cdot 5^{z_3}$

Тогда $\begin{cases} x_1+x_2 \geq 7 \\ x_2+x_3 \geq 13 \\ x_1+x_3 \geq 14 \end{cases}$, $\begin{cases} y_1+y_2 \geq 11 \\ y_2+y_3 \geq 15 \\ y_1+y_3 \geq 17 \end{cases}$, $\begin{cases} z_1+z_2 \geq 14 \\ z_2+z_3 \geq 18 \\ z_1+z_3 \geq 43 \end{cases}$

~~[illegible]~~ решения трёх систем независимы друг от друга, поэтому, чтобы минимизировать abc, нужно найти минимум $x_1+x_2+x_3$, $y_1+y_2+y_3$ и $z_1+z_2+z_3$.

~~[illegible]~~ $x_1+x_2+x_3 \geq \frac{7+13+14}{2} = 17$, причём рав-во достигается — $(x_1, x_2, x_3) = (4, 3, 10)$.

$y_1+y_2+y_3 \geq \frac{11+15+17}{2} = \frac{43}{2} = 21{,}5$, а т.к. она целые, минимум — 22. — при $(y_1, y_2, y_3) = (6, 5, 11)$

$z_1+z_2+z_3 \geq z_1+z_3 \geq 43$. Система выполнена при, например, $(z_1, z_2, z_3) = (21, 0, 22)$.

~~$abc = 2^{x_1+x_2+x_3}$~~ $\min(abc) = 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

Ответ: $\min(abc) = 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☑ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\sin x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5}\right)$,

причем, т.к. арккосинус лежит в пределах от 0 до π,

$0 \le \frac{3\pi}{2} + x \le 5\pi$

$$\begin{cases} \sin x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) \\ -\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{4\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ -\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

$\cancel{\frac{4\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}x}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4x = 4\pi + 10\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ 6x = \pi + 10\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ -\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{ll} x = \pi + \frac{5}{2}\pi n,\ n \in \mathbb{Z} & (1) \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k,\ k \in \mathbb{Z} & (2) \end{array}\right. \\ -\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

подставим (1) в огранич. неравенство:

$-\frac{3\cancel{\pi}}{2} \le \cancel{\pi}^{1} + \frac{5}{2}\cancel{\pi}n \le \frac{7\cancel{\pi}}{2}$

$-3 \le 2 + 5n \le 7$

$-1 \le n \le 1$, значит, $\left[\begin{array}{l} x = \pi - \frac{5}{2}\pi = -\frac{3}{2}\pi \\ x = \pi \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi = \frac{7\pi}{2} \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☑ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Подставим (2):

$$-\frac{3\cancel{\pi}}{2} \le \frac{\cancel{\pi}}{6} + \frac{5}{3}\cancel{\pi}k \le \frac{7\cancel{\pi}}{2} \quad \Big| \cdot 6$$

$$-9 \le 1 + 10k \le 21$$

$-1 \le k \le 2$, значит, $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2} \end{array}\right.$

Ответ: $x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \pi; \frac{7\pi}{2};$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☑ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

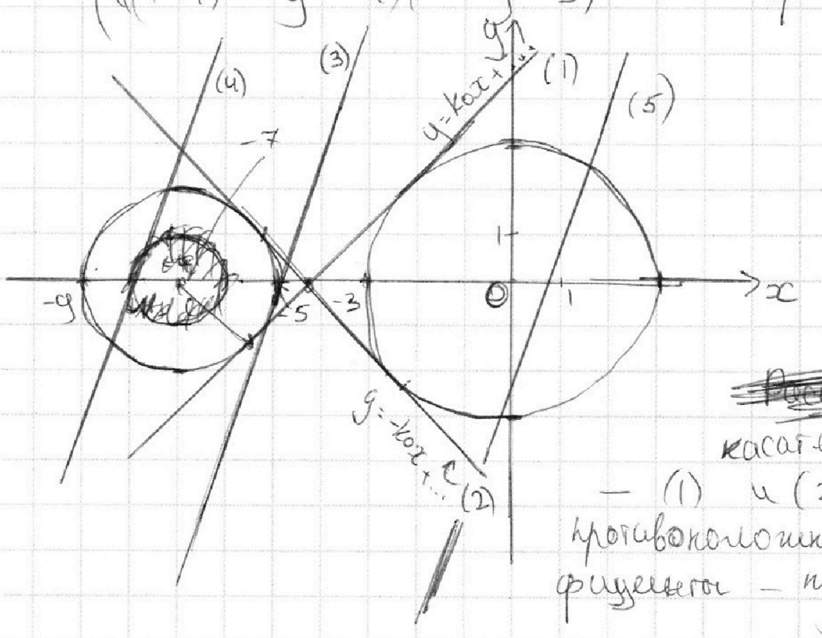
№ 4

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$$ и реш

$$\begin{cases} 3ay = 7b - x \\ ((x+7)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$$

$3ay = 7b - x$ — прямая, не паралл. Oy

$((x+7)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0$: график — 2 окружности



Пусть ~~Рассмотрим~~ общие касательные окружностей — (1) и (2). Очевидно, у них противоположные угловые коэффициенты — пусть k_0 и $-k_0$ ($k_0>0$).

Рассмотрим касательную к малой окружности с коэфф. k* Если $k > k_0$, то касательная (3) не будет касаться/пересекать вторую окружность, и если какая-то прямая (4), параллельная ей, выше этой касательной, то тем более выше и второй окружности. Если же эта прямая с коэфф k ниже (5), то не имеет пересечений с левой окружностью. Таким образом, во всех случаях не будет 4 решений.

Аналогично, для $k \le -k_0$ тоже невозможны 4 ~~решения~~ решения. (* ни одну из 2 касательных с таким коэфф.)

~~Отдельно случай — прямая $x=d$ — тоже ≤ 2 пересечения.~~

Если же $-k_0 < k \le k_0$, тогда найдётся такое b, что прямая с этим коэфф. проходит через т. пересечения (1) и (2), а значит, пересекает 2 окр-ти в 4 точках.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☑ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $a=0$ – не подходит, т.к. прямая $x=7b$ не может иметь больше 2 пересечений

2) $a\neq 0$:

$$y=-\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a}=kx+\frac{7b}{3a}$$

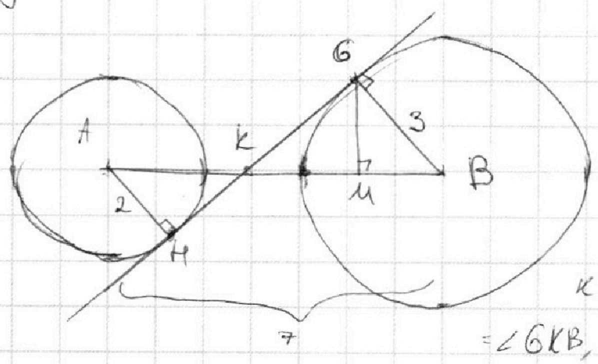
$$-k_0<-\frac{1}{3a}<k_0$$

$$\left|\frac{1}{3a}\right|<k_0$$

$$|3a|>\frac{1}{k_0}$$

$$\left[\begin{array}{l} a>\frac{1}{3k_0} \\ a<-\frac{1}{3k_0}\end{array}\right.$$

Найдём k_0:



Пусть H, G – точки касания, $AB\cap HG=K$, $GM\perp KB$.

$BG\perp GH$, $AH\perp GH$ как радиусы, провед. к точкам касания, а $\angle AKH=\angle GKB$, поэтому $\triangle AKH\sim\triangle BKG\Rightarrow$

$\Rightarrow AK:KB=2:3\Rightarrow$ ~~$AK=\frac{2}{5}AB=\frac{14}{5}$~~ $BK=\frac{3}{5}\cdot AB=$

$=\frac{21}{5}$. По т. Пифагора $KG^2=\frac{21^2}{5^2}-9=\frac{441-225}{25}=\frac{216}{25}$

$KG=\frac{3\sqrt{24}}{5}=\frac{6\sqrt{6}}{5}$

Исходя из формулы площади п/угольного треугольника, $\frac{1}{2}KG\cdot GB=\frac{1}{2}KB\cdot GM\Rightarrow GM=\frac{KG}{KB}\cdot GB=$

$=\frac{6\sqrt{6}}{5\cdot\frac{21}{5}}\cdot 3=\frac{6\sqrt{6}}{7}$;

$KM^2=KG^2-GM^2=\frac{36\cdot6}{25}-\frac{36\cdot6}{49}=36\cdot6\cdot\frac{24}{5^2\cdot7^2}=$

$=\frac{6^2\cdot6^2\cdot2^2}{5^2\cdot7^2}\Rightarrow KM=\frac{36\cdot2}{35}=\frac{72}{35}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☑ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$ko = \frac{GM}{KM} = \frac{\cancel{8}\sqrt{6} \cdot \cancel{35}\,5}{\cancel{7} \cdot \cancel{72}\,12} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\left[\begin{array}{l} a > \frac{\cancel{12}\,4}{3 \cdot 5\sqrt{6}} = \frac{4}{5\sqrt{6}} \\ a < -\frac{4}{5\sqrt{6}} \end{array}\right.$$

Ответ: $a > \frac{4}{5\sqrt{6}}$ или $a < -\frac{4}{5\sqrt{6}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☑ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

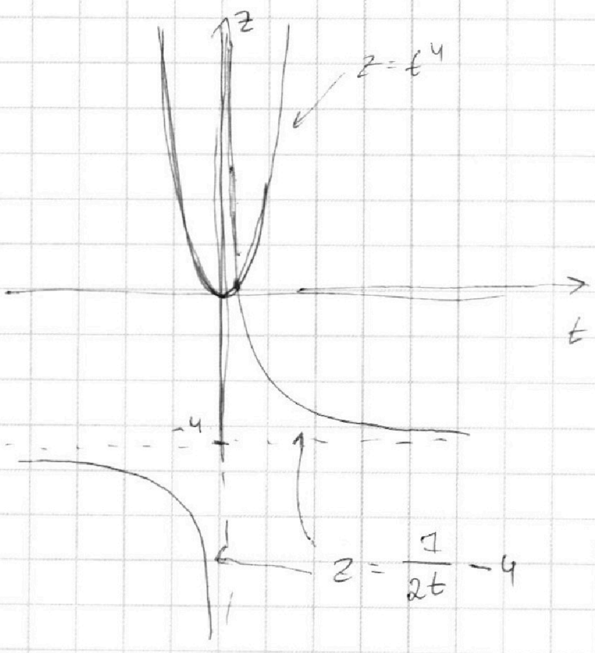
№ 5

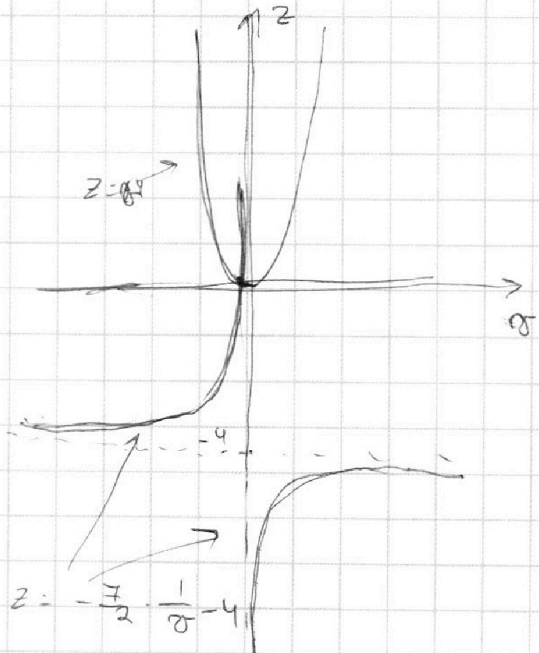
$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_7(6x))^4 - \dfrac{2}{\log_7(6x)} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\log_7(6x)} - 4 \\ (\log_7 y)^4 + \dfrac{6}{\log_7 y} = \dfrac{5}{2}\,\dfrac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

Замена: $t = \log_7(6x)$, $v = \log_7 y$

$$\begin{cases} t^4 = \dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{t} - 4 \\ v^4 = -\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{v} - 4 \end{cases}$$





Графики имеют пересеч. в каких-то точках (v, z) и (t, z), и в силу „отзеркаленности" гипербол $v = -t$

т.е. $v + t = 0$

$\log_7(6x) + \log_7 y = 0$

$6xy = 1$

$xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

* $\log_7(6x)$ и $\log_7(y)$ принимают все значения, поэтому для каждого v и t найдется свой x и y

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☑ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

$4(x_2-x_1)*(y_2-y_1)=40$

Пусть без огр. общности $x_2 \geq x_1$, тогда x_2-x_1 и $|y_2-y_1|$ - длины катетов ~~прямоуг~~ треугольника с гипотенузой в этих точках (катеты параллельны Ox и Oy)

Пусть ~~в~~ горизонтальный катет - a, вертикальный - b, тогда:

1) $y_2>y_1$: $4a+b=40$

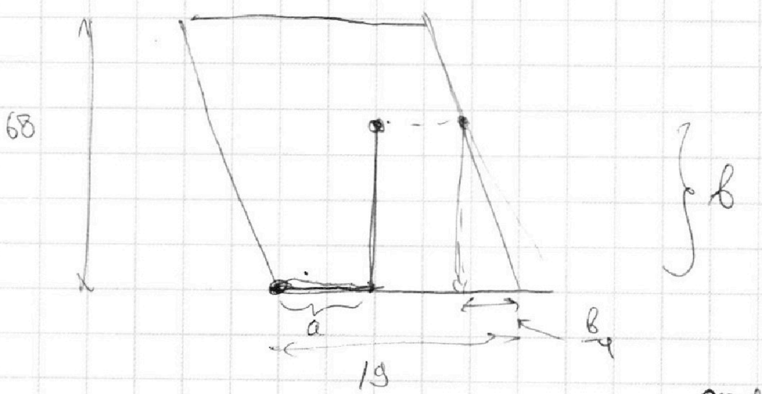
$(a,b)=(0,40),(1,36),(2,32),\dots,(9,4),(10,0)$

2) $y_2<y_1$:

$4a-b=40$

$b=4(a-10)$, $a\leq 19$ - гр. длина параллелогр.

$(a,b)=(10,0),(11,4),(12,5),\dots,(18,32),(19,36)$



Кол-во возможных ~~абсцисс~~ ординат ~~верхней точки~~ нижней точки для пар с фиксир. (a,b):
$68-b+1$

Кол-во возможных абсцисс: $19-\frac{b}{4}-a+1$ либо

$19-a-\frac{b}{4}$ (1 случай - с увеличением

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}\overset{7^3}{343} - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_7(6x))^4 - \dfrac{2}{\log_7(6x)} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\log_7(6x)} - 4 \\ (\log_7 y)^4 + \dfrac{6}{\log_7 y} = \dfrac{5}{2}\dfrac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

Замена: $t = \log_7(6x)$, $v = \log_7 y$

$$\begin{cases} t^4 - \dfrac{2}{t} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{t} - 4 \\ v^4 + \dfrac{6}{v} = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{v} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^4 = \dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{t} - 4 \\ v^4 = \dfrac{-7}{2}\cdot\dfrac{1}{v} - 4 \end{cases} (-)$$

$v+t$

$4v^3 - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{v^2} = 0 \quad |\cdot 2v^2$

$8v^5 - 7 = 0$

$\sqrt[5]{\frac{7}{8}}$ ↘ ↗

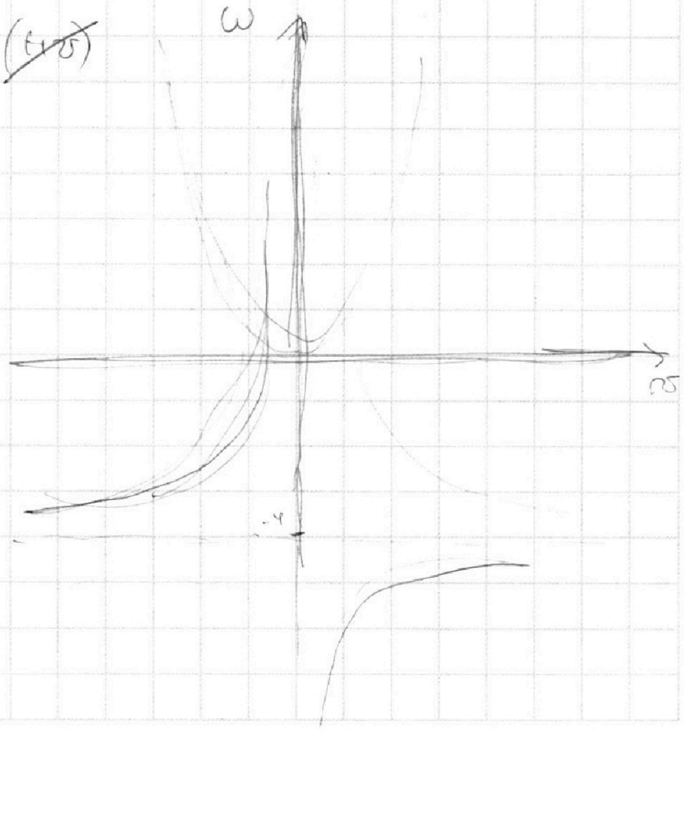
$$t^4 - v^4 = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{v}\right)$$

$$vt(t^2+v^2)(t-v)(\cancel{t+v}) = \frac{7}{2}(\cancel{t+v})$$

$v = -t$

$v+t = 0$

$\log \quad v, t \neq 0$ ✓



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда пар ~~тек~~ с длин. (a, b). $(69-a-\frac{b}{4})(17-\frac{b}{4})+$

$+(68-a-\frac{b}{4})(52-\frac{3b}{4}) = 69\cdot17-\frac{69b}{4}-17a+\frac{ab}{4}+\frac{b^2}{16}-\frac{17b}{4}+$

$+68\cdot52-\frac{3\cdot68b}{4}-52a+\frac{3ab}{4}-\frac{52b}{4}+\frac{3b^2}{16}=$

$=(17+17^2\cdot4+17\cdot4\cdot52)-\frac{69+17}{4}b-(51+13)b-\cancel{17a}-52a-69a+$

$+ab+\frac{b^2}{4} = 17(1+4\cdot17(52+17))$

$54+7=61$

$68\cdot69$
612
408
4692

$\frac{69+17}{4} = \frac{86}{4} = \frac{43}{2}$

$= 17\cdot4693-(85\frac{1}{2}b)-69a+ab+\frac{b^2}{4}$

$\frac{43}{2}+64 = 21+64+\frac{1}{2} =$

$= 85\frac{1}{2}$

№1

$ab \geq 2^{7} 3^{11} 5^{14}$

$bc \geq 2^{13} 3^{15} 5^{18}$

$ac \geq 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

~~$abc \geq 2^{\frac{7+13+14}{2}} 3^{\frac{11+15+17}{2}}$~~

$32+43=75$

$abc \geq 2^{\frac{7+13+14}{2}} \cdot 3^{\frac{11+15+17}{2}} \cdot 5^{\frac{14+18+43}{2}}$

$= 2^{17} \cdot 3^{21\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{75}{2}}$

$a = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$

$b = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}$

$c = 2^{x_3} 3^{y_3} 5^{z_3}$

$\Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{38}$

$ab: \quad x_1 + x_2 \geq 7 \quad y_1 + y_2 \geq 11 \quad z_1 + z_2 \geq 14$

$bc: \quad x_2 + x_3 \geq 13 \quad y_2 + y_3 \geq 15 \quad z_2 + z_3 \geq 18$

$ac: \quad x_1 + x_3 \geq 14 \quad y_1 + y_3 \geq 17 \quad z_1 + z_3 \geq 43$

$z_1 + z_3 \geq 22$

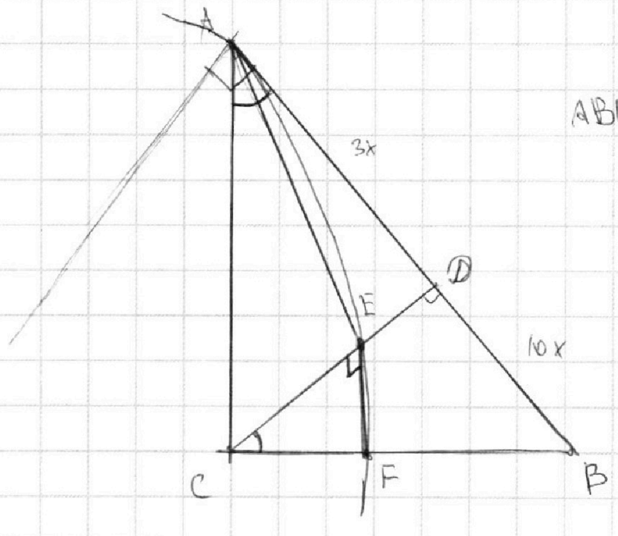
$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 10 \end{cases}$

$5+11+6=22$

$\begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 5 \\ y_3 = 11 \end{cases}$

$29+14=43$

№2



$AB \parallel EF$

$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10} - 1$

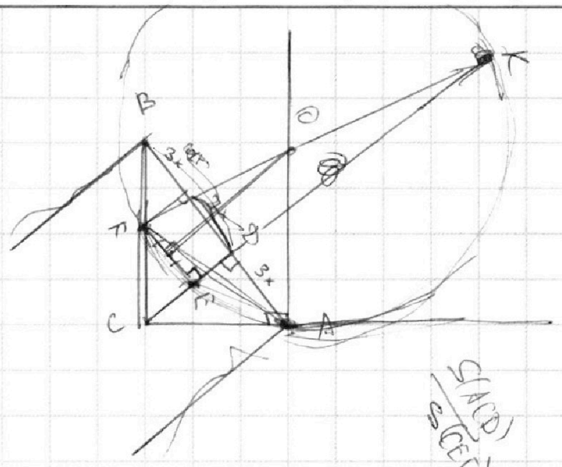
$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



AB ∥ FE

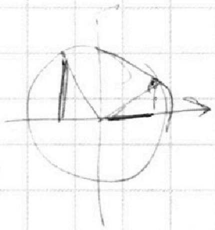
√2 ∠FBA = ∠FAC => $\frac{FC}{AC}$ √

$\frac{BC}{AC}$ √

$\frac{BC}{FC}$ √

$\frac{S(ACD)}{S(CEF)}$

№3



$[0, 5\pi]$ $[0, 5\pi]$

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

$\sin x = \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+x}{5}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5}\right)$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5} + 2\pi n \quad \Big| \cdot 5 \\ x = \pi - \frac{4\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi k \quad \Big| \cdot 5 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 5x = x + 4\pi + 10\pi n \\ 5x = 5\pi - 4\pi - x + 10\pi k \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \pi + \frac{5}{2}\pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \end{array}\right.$

$\frac{1}{6} - \frac{5}{3} = \frac{1-10}{6} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$

$\frac{1}{6} + \frac{5}{3} = \frac{1+10}{6} = \frac{11}{6}$

1) $-\frac{3\pi}{2} \le \pi + \frac{5}{2}\pi n \le \frac{7\pi}{2} \quad \Big| \cdot \frac{2}{\pi}$

$-3 \le 2 + 5n \le 7$

$-5 \le 5n \le 5$

$-1 \le n \le 1$

$x = -\frac{3\pi}{2}, \pi, \frac{7\pi}{2}$

2) $-\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \le \frac{7\pi}{2} \quad \Big| \cdot \frac{6}{\pi}$

$-9 \le 1 + 10k \le 21$

$-10 \le 10k \le 20$

$-1 \le k \le 1$

$x = -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$

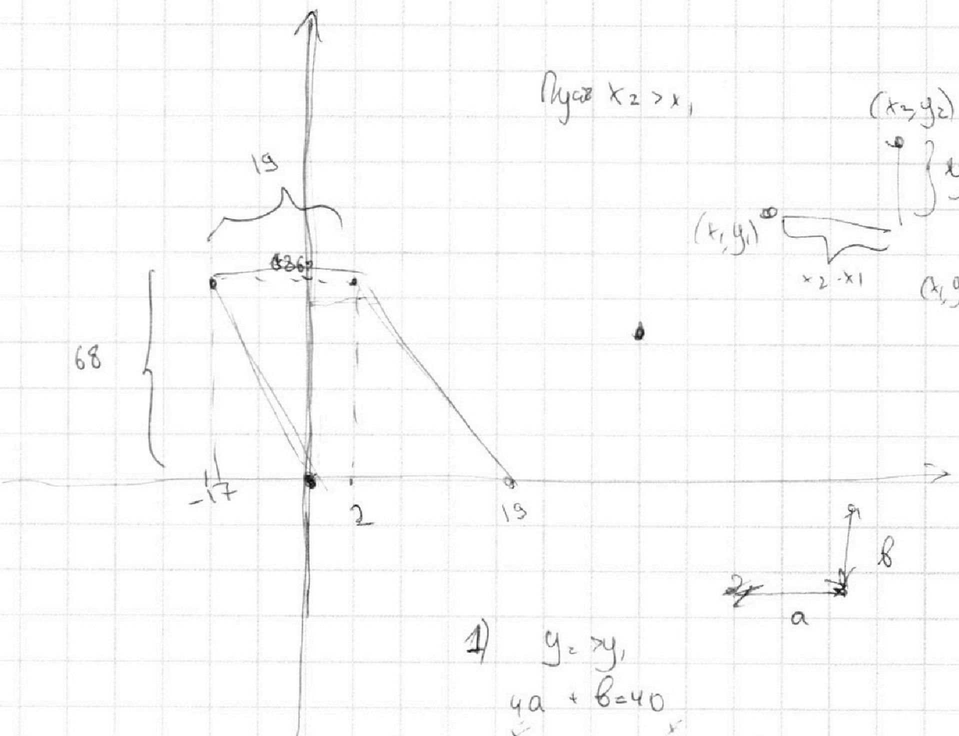
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

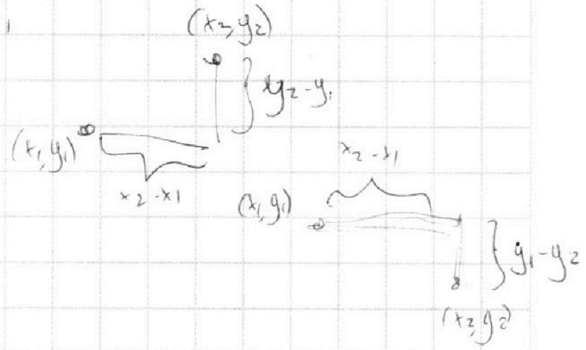
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$

$O(0,0)$, $P(-17,68)$, $Q(2,68)$, $R(19,0)$



Пусть $x_2 > x_1$



1) $y_2 > y_1$

$4a + b = 40$

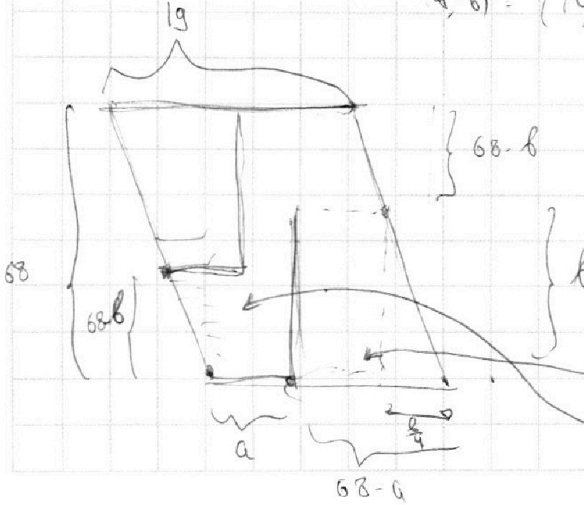
$(a, b) = (0, 40), (1, 36), (2, 32), \ldots, (9, 4), (10, 0)$

2) $y_2 < y_1$:

$4a - b = 40$

$68 \geq b = 4(a - 10)$ $(10 \leq a \leq 19)$

$(a, b) = (10, 0)$ $(11, 4), (12, 5), (13, 6), \ldots, (18, 32)$ $(19, 36)$



$\frac{69}{4} - \frac{b}{4} = z + \frac{1}{4}$

68

$69 - 17 = 52$

~~Кол~~ кол-во точек

$68 - a - \frac{b}{4} + 1$ (*)

или $68 - a - \frac{b}{4}$ (**)

на уровне: $69 - b$ → (*): $\frac{69 - b}{4} - \frac{1}{4} - 17 = \frac{b}{4}$

→ (**): $69 - b - 17 + \frac{b}{4} = 52 - \frac{3b}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

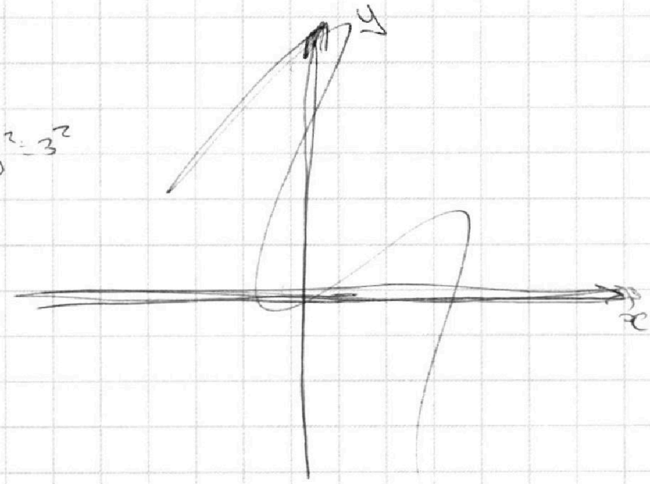
$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$$

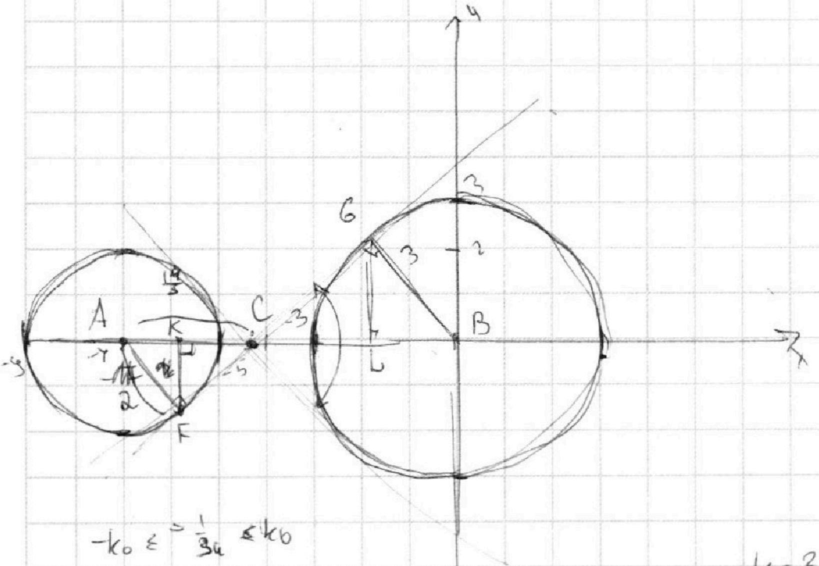
$(x+7)^2+y^2+45=49$

$(x+7)^2+y^2=2^2$ $\qquad x^2+y^2=3^2$

1) $a=0$: $x=7b$

2) $a\neq 0$: $y=-\frac{x}{3a}+\frac{7b}{3a}$





$-k_0 \le \frac{1}{3a} \le k_0$

$AC = \frac{2}{5}\cdot 7 = \frac{14}{5}$

$CB = 7(1 \; \frac{3\cdot 7}{5} = \frac{21}{5}$

$FC^2 = \frac{196}{25}-4 = \frac{96}{25} = \frac{4\cdot 24}{25} = \frac{4\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 5}$

$FC = \frac{4\sqrt6}{5}$

$FK\cdot\frac{14}{5} = 2\cdot\frac{4\sqrt6}{5}$

$FK = \frac{4\sqrt6}{7}$

$GL = \frac{3}{2}\cdot\frac{4\sqrt6}{7} = \frac{6\sqrt6}{7}$

$k_0 \ge \frac{1}{3a} \ge -k_0$

$KC^2 = CF^2 - KF^2 = \frac{4\cdot 24}{25} - \frac{4\cdot 24}{49} =$

$= 4\cdot 24\cdot\frac{49-25}{49\cdot 25} = \frac{2^2\cdot 24^2}{7^2\cdot 5^2}$

$KC = \frac{2\cdot 24}{7\cdot 5} = \frac{48}{35}$

$CL = \frac{3}{2}KC = \frac{3}{2}\cdot\frac{48}{35} = \frac{72}{35}$

~~$KL = \frac{72+48}{35} = \frac{120}{35} = \frac{24}{7}$~~

~~$k_0 = \frac{GL+KF}{KL}$~~

$k_0 = \frac{GL}{CL} = \frac{6\sqrt6}{7}\cdot\frac{35}{72} = \frac{30\sqrt6}{72} = \frac{5\sqrt6}{12}$

$\frac{1}{3a} \le \frac{5\sqrt6}{12}$

$a \ge \frac{4}{5\sqrt6}$ или $a<0$ $\qquad -\frac{4}{5\sqrt6} \le a \le \frac{4}{5\sqrt6}$