



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}, \quad bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}, \quad ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}$$

$$\text{Итак } a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}, \quad b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}, \\ c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_1 + x_3 \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + y_3 \geq 15 \\ y_1 + y_3 \geq 17 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 + z_2 \geq 16 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_1 + z_3 \geq 43 \end{cases}$$

~~Значит~~ решение трех систем независимых фрм  
от нуля, чтобы минимизировать abc,  
нужно искать минимизацию  $x_1 + x_2 + x_3$ ,  $y_1 + y_2 + y_3$  и  
 $z_1 + z_2 + z_3$ .

~~Значит~~  $x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{7+13+14}{2} = 17$ , при этом рав-во достигается при  
—  $(x_1, x_2, x_3) = (4, 3, 10)$ .

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{11+15+17}{2} = \frac{43}{2} = 21,5, \text{ так как они целые, минимизуем}$$

— 22. — при  $(y_1, y_2, y_3) = (6, 5, 11)$

$$z_1 + z_2 + z_3 \geq z_1 + z_3 \geq 43. \text{ Система выполняется}$$

при, например,  $(z_1, z_2, z_3) = (21, 0, 22)$ .

$$\text{Итак } \min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

$$\text{Итак } \min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + \pi$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{x}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5}\right),$$

нужно, т.к. арксинус имеет в промежутке от 0 до  $\pi$ ,

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + \pi \leq 5\pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) \\ -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{4\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{4\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x = 4\pi + 10\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 6x = \pi + 10\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pi + \frac{5}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad (2) \\ -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \end{array} \right.$$

подставим (1) в правую часть неравенства:

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \pi + \frac{5}{2}\pi n \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$-3 \leq 2 + 5n \leq 7$$

$$-1 \leq n \leq 1, \text{ значит, } \left\{ \begin{array}{l} x = \pi - \frac{5}{2}\pi = -\frac{3}{2}\pi \\ x = \pi \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi = \frac{7\pi}{2} \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Подготовим (2) :

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot 6$$

$$-9 \leq 1 + 10k \leq 21$$

$$-1 \leq k \leq 2, \text{ значит, } \left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2} \end{array} \right.$$

Ответ:  $x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \pi; \frac{7\pi}{2};$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

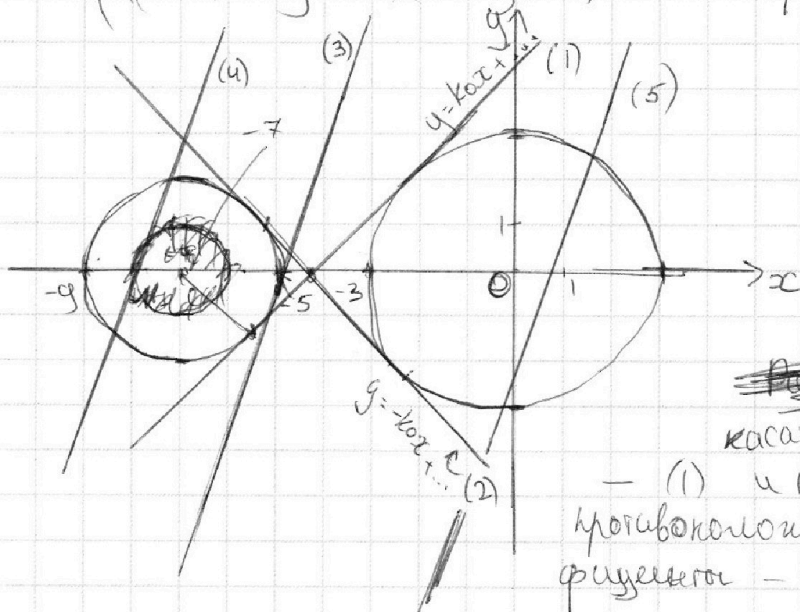


№ 4

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 4x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \quad \text{и реш}$$

$3ay = 7b - x$  — прямая, не паралл.  $Oy$

$((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0$  : график — 2 окружности



пуст  
~~касательная~~ образе касательной окружности — (1) и (2). Треугольник противонаклонные углы коэффициенты —  $k_0$  и  $-k_0$  ( $k_0 > 0$ ).

Расмотрим касательную к малой окружности, с коэфф.  $k^*$ . Если  $k > k_0$ , то касательная (3) будет касаться/пересекать вторую окружность, и если ~~эта~~ какая-то прямая (4) параллельная ей, выше этой касательной, то тем более выше и второй окружности. Если же эта прямая с коэфф.  $k$  ниже (3) то не имеет пересечения с левой окружностью. Таким образом, во всех случаях не будет 4 решений.

Аналогично, для  $k < -k_0$  тоже невозможны 4 решения. ~~Если (\*) или любой из 2 касательных (таким коэфф.)~~  
~~касательной к малой окружности  $x = -7$  — тоже не пересекается.~~

Если же  $-k_0 \leq k \leq k_0$ , тогда найдется такое  $b$ , что прямая с этим коэфф. проходит через 2 пересечения (1) и (2), а значит, пересекает 2 окр-ти в 4 точках.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)  $a=0$  — не подходит, т.к. прямой  $xc=7b$  не может иметь больше 2 пересечений

2)  $a \neq 0$ :  

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} = kx + \frac{7b}{3a}$$

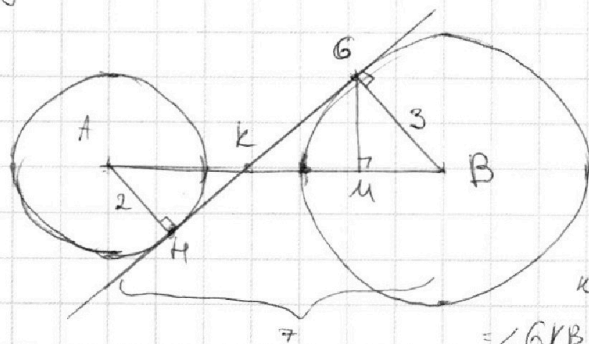
$$-k_0 \leq -\frac{1}{3a} \leq k_0$$

$$|\frac{1}{3a}| \leq k_0$$

$$|3a| \geq \frac{1}{k_0}$$

$$\begin{cases} a \geq \frac{1}{3k_0} \\ a \leq -\frac{1}{3k_0} \end{cases}$$

Находим  $k_0$ :



Пусть  $H, G$  — точки касания,  $AB \cap HG = K$ ,  $GM \perp AB$ .

$BG \perp GH$ ,  $AH \perp GH$   
 как радиусы, провед. к точкам касания, а  $\angle AKH = \angle GKB$ , поэтому  $\triangle AKH \sim \triangle BKG$

$$\Rightarrow AK:KB = 2:3 \Rightarrow AK = \frac{2}{5}AB = \frac{14}{5}, BK = \frac{3}{5}AB =$$

$$= \frac{21}{5}. \text{ По т. Пифагора } KG^2 = \frac{21^2}{5^2} - 9 = \frac{441 - 225}{25} = \frac{216}{25}$$

$$KG = \frac{3\sqrt{24}}{5} = \frac{6\sqrt{6}}{5}$$

Используя формулы площади треугольника

$$\frac{1}{2}KG \cdot GB = \frac{1}{2}KB \cdot GM \Rightarrow GM = \frac{KG \cdot GB}{KB}$$

$$= \frac{6\sqrt{6}}{5} \cdot 3 = \frac{6\sqrt{6}}{7}$$

$$KM^2 = KG^2 - GM^2 = \frac{36 \cdot 6}{25} - \frac{36 \cdot 6}{49} = 36 \cdot 6 \cdot \frac{24}{5^2 \cdot 7^2} =$$

$$= \frac{6^2 \cdot 6^2 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 7^2} \Rightarrow KM = \frac{36 \cdot 2}{35} = \frac{72}{35}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k_0 = \frac{G_m}{k_M} = \frac{8\sqrt{6} \cdot 355}{7 \cdot 72 \cdot 12} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\left. \begin{array}{l} a > \frac{12^4}{3 \cdot 5\sqrt{6}} = \frac{4}{5\sqrt{6}} \\ a < -\frac{4}{5\sqrt{6}} \end{array} \right\}$$

$$\text{Ответ: } a > \frac{4}{5\sqrt{6}} \text{ или } a < -\frac{4}{5\sqrt{6}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

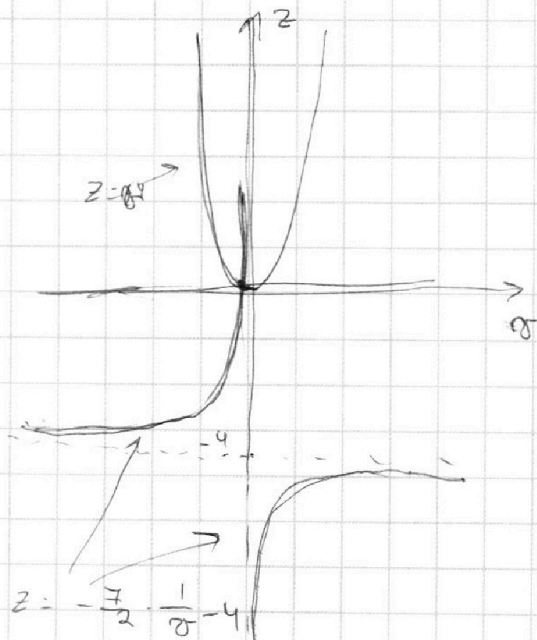
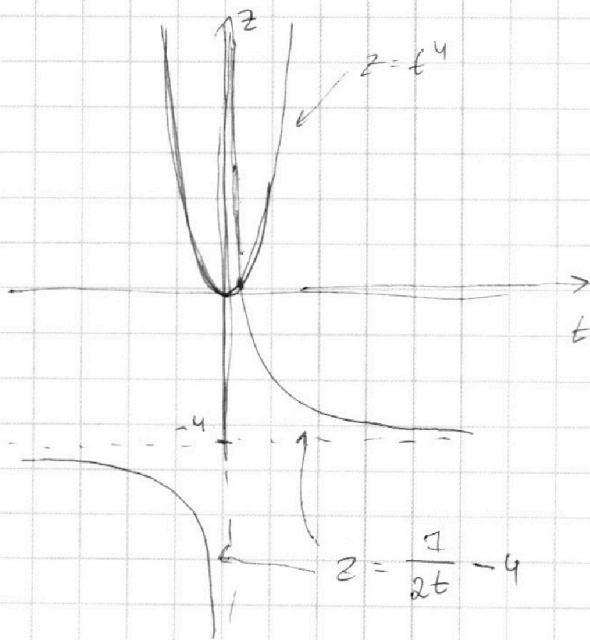
~ 5

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 49 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_7(6x))^4 - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \frac{1}{\log_7(6x)} - 4 \\ (\log_7 y)^4 + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

Заменим:  $t = \log_7(6x)$ ,  $v = \log_7 y$

$$\begin{cases} t^4 = \frac{7}{2} - \frac{1}{t} - 4 \\ v^4 = -\frac{7}{2} - \frac{1}{v} - 4 \end{cases}$$



Графики имеют пересек. в каждой из точек  $(\sigma, z)$  и  $(t, z)$  и в силу ~~симметрии~~ "отраженности" имеем  $\sigma = -t$   
т.е.  $\sigma + t = 0$   
 $\log_7(6x) + \log_7 y = 0$   
 $6xy = 1$   
 $xy = \frac{1}{6}$

\*  $\log_7(6x)$  и  $\log_7(y)$  принимают все значения, возможные для каждого  $\sigma$  и  $t$  каждому свой  $x$  и  $y$ .

Ответ:  $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$$

Пусть без огр. области  $x_2 \geq x_1$  тогда  $x_2 - x_1$  и  $|y_2 - y_1|$  — длины катетов ~~прямоугольника~~ <sup>треугольника</sup> с гипотенузой в этих точках (катеты параллельны  $Ox$  и  $Oy$ )

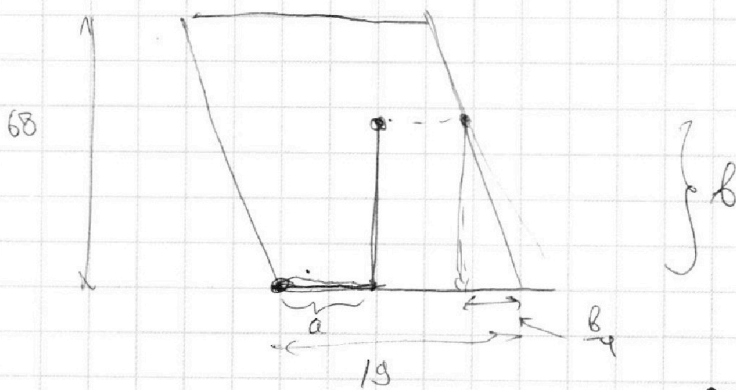
Пусть в горизонтальном катете —  $a$ , вертикальном —  $b$ , тогда:

1)  $y_2 > y_1$  :  $4a + b = 40$   
 $(a, b) = (0, 40), (1, 36), (2, 32), \dots, (9, 4), (10, 0)$

2)  $y_2 < y_1$ :

$4a - b = 40$   
 $b = 4(a - 10)$ ,  $a \leq 19$  — пер. граница параллелогра.

$(a, b) = (10, 0), (11, 4), (12, 8), \dots, (18, 32), (19, 36)$



кас-бо ~~возможных~~ <sup>ординат</sup> абсцисс ~~вершин~~ <sup>вершин</sup> ~~тогда~~ <sup>тогда</sup> ~~меньших~~ <sup>меньших</sup> точки для пар с фракср.  $(a, b)$ :  
 $68 - b + 1$

кас-бо ~~возможных~~ абсцисс:  $19 - \frac{b}{4} - a + 1$  либо

$19 - a - \frac{b}{4}$  (1 абсцисс — с увеличением



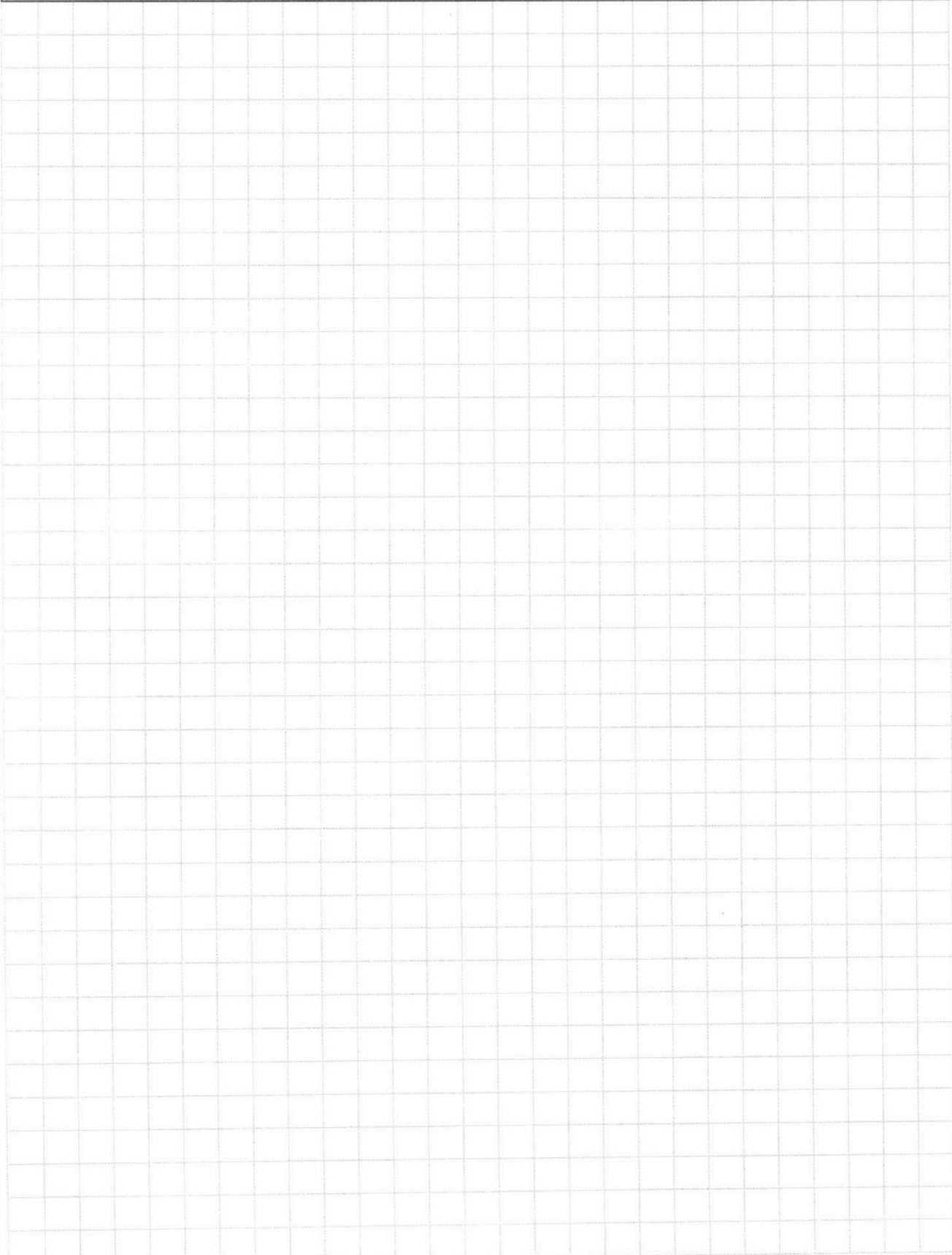
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_y^2(7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_7(6x))^4 - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7(6x)} - 4 \\ (\log_7 y)^4 - \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

Заменим:  $t = \log_7(6x)$ ,  $v = \log_7 y$

$$\begin{cases} t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \\ v^4 - \frac{6}{v} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{v} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^4 = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \\ v^4 = \frac{-7}{2} \cdot \frac{1}{v} - 4 \end{cases} \quad | \cdot (-) \quad \begin{matrix} v+t \\ 4v^3 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{v^2} = 0 \end{matrix}$$

$$t^4 - v^4 = \frac{7}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{v} \right)$$

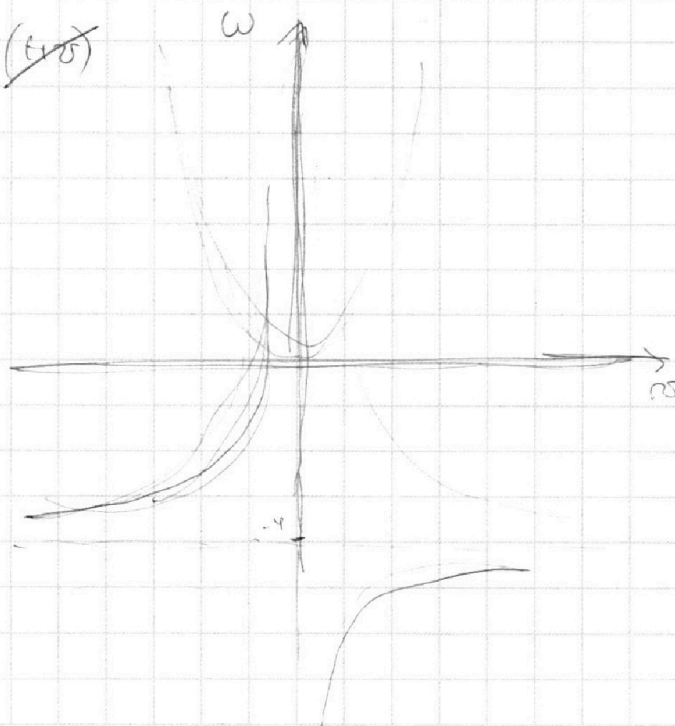
$$vt(t^2 - v^2)(t - v)(t + v) = \frac{7}{2}(t + v)$$

$v = -t$

$v + t = 0$

log

$v, t \neq 0$  ✓



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Тогда перемножим сдвин. (a, b).  $(69a - \frac{b}{4})(17 - \frac{b}{4}) +$   
 $+ (68a - \frac{b}{4})(52 - \frac{3b}{4}) = 69 \cdot 17 - \frac{69b}{4} - 17a + \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{16} - \frac{17b}{4} +$   
 $+ 68 \cdot 52 - \frac{3 \cdot 68b}{4} - 52a + \frac{3ab}{4} - \frac{13b}{4} + \frac{3b^2}{16} =$   
 $= (17 + 17^2 \cdot 4 + 17 \cdot 4 \cdot 52) - \frac{69 + 13}{4} b - (51 + 13)a - 52a - 69a +$   
 $+ ab + \frac{b^2}{4} = 17(1 + 4 \cdot 17(52 + 17)) - (1 + 4 \cdot 17 \cdot 69) a + \frac{b^2}{4} +$

$54 \cdot 17 = 61$   
 $\begin{array}{r} 68 \\ + 69 \\ \hline 137 \\ + 612 \\ \hline 469 \end{array}$   
 $\frac{69 + 13}{4} = \frac{86}{4} = \frac{43}{2}$   
 $\frac{43}{2} \cdot 64 = 21 \cdot 64 = \frac{1}{2}$   
 $= 85 \frac{1}{2}$

$= 17 \cdot 4693 - (85 \frac{1}{2} b) - 69a + ab + \frac{b^2}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

$$\begin{aligned}
 abc &\geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\
 bc &\geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \\
 ac &\geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}
 \end{aligned}$$

$$abc \geq 2^{\frac{7+13+14}{2}} \cdot 3^{\frac{11+15+17}{2}} \cdot 5^{\frac{14+18+23}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 abc &\geq 2^{\frac{7+13+14}{2}} \cdot 3^{\frac{11+15+17}{2}} \cdot 5^{\frac{14+18+23}{2}} \\
 &= 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1} \\
 b &= 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2} \\
 c &= 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}
 \end{aligned}$$

$$ab: x_1 + x_2 \geq 7$$

$$bc: x_2 + x_3 \geq 13$$

$$ac: x_1 + x_3 \geq 14$$

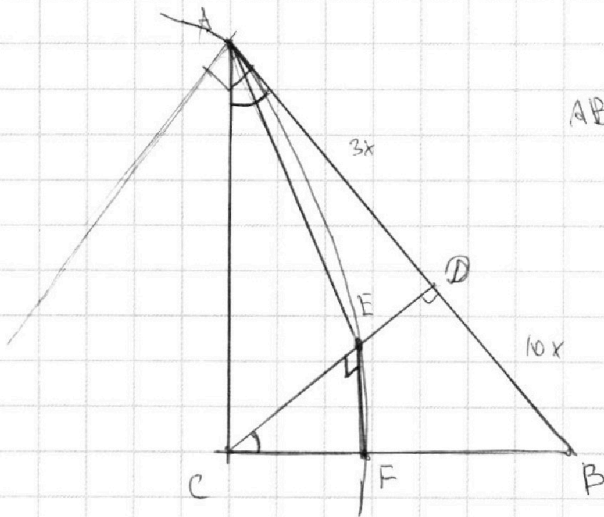
$$\begin{aligned}
 abc &\geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38} \\
 y_1 + y_2 &\geq 11 & z_1 + z_2 &\geq 14 \\
 y_2 + y_3 &\geq 15 & z_2 + z_3 &\geq 18 \\
 y_1 + y_3 &\geq 17 & z_1 + z_3 &\geq 22
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 x_1 = 4 \\
 x_2 = 3 \\
 x_3 = 10
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 y_1 = 6 \\
 y_2 = 5 \\
 y_3 = 11
 \end{cases}$$

$$z_1 + z_3 \geq 22$$

№2



ABDEE

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10} - 1$$

$$\frac{AB \cdot AD}{\frac{1}{2} AB} = \frac{3}{10}$$

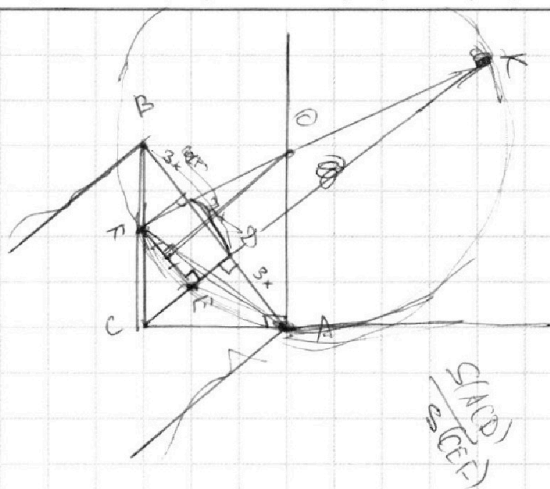
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

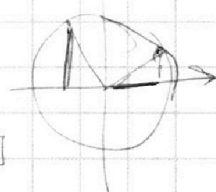


$\triangle BPF$   
 $\sqrt{2} \angle FBA = \angle FAC \Rightarrow \frac{FC}{AC} = \frac{BC}{AC}$   
 $\frac{BC}{AC} = \frac{BC}{FC}$

$\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle BCF)}$

N3

$[0, 5\pi]$   
 $f_0, 5\pi$   
 $5\pi \cos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow x \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$



$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5}\right)$

$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5} + 2\pi n \\ x = \pi - \frac{4\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi k \end{cases}$

$\begin{cases} 5x = x + 4\pi + 10\pi n \\ 5x = 5\pi - 4\pi - x + 10\pi k \end{cases}$

$\begin{cases} x = \pi + \frac{5}{2}\pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \end{cases}$   
 $1) -\frac{2\pi}{2} \leq \pi + \frac{5}{2}\pi n \leq \frac{7\pi}{2}$

$\frac{1}{6} - \frac{5}{3} = \frac{1-10}{6} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$

$\frac{1}{6} + \frac{5}{3} = \frac{1+10}{6} = \frac{11}{6}$

$-3 \leq 2.5n \leq 7$

$-5 \leq 5n \leq 5$

$-1 \leq n \leq 1$

$x = -\frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{2}$

$2) -\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}k \leq \frac{7\pi}{2}$

$-5 \leq k$

$-9 \leq 1 + 10k \leq 21$

$-10 \leq 10k \leq 20$

$-1 \leq k \leq 2$

$x = \left(-\frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{11\pi}{6}\right), \left(\frac{7\pi}{2}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

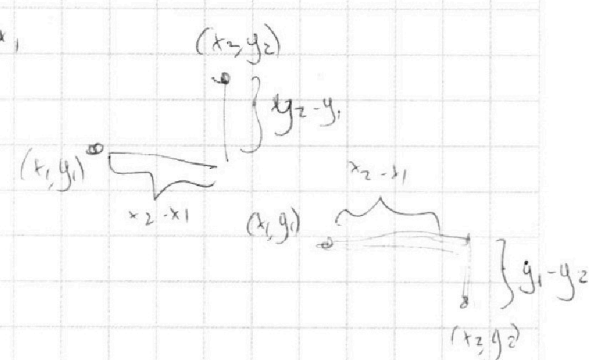
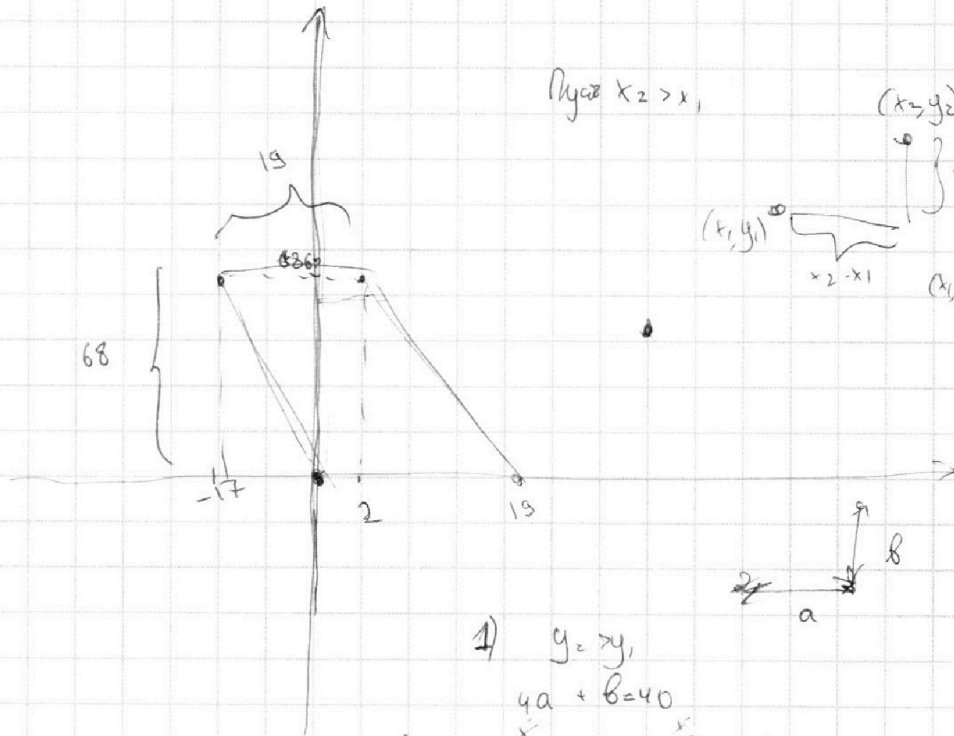
1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$$

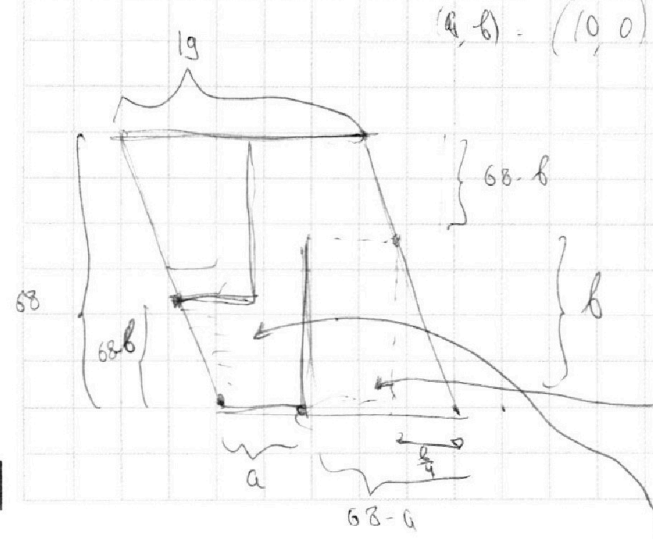
$$O(0,0), P(-17,68), Q(2,68), R(19,0)$$



1)  $y_2 \geq y_1$   
 $4a + b = 40$   
 $(a, b) = (0, 40), (1, 36), (2, 32), \dots, (9, 4), (10, 0)$

2)  $y_2 < y_1$   
 $4a - b = 40$   
 $68 \geq b = 4(a - 10) \quad (10 = a \leq 19)$

$(a, b) = (10, 0), (11, 4), (12, 8), (13, 12), (14, 16), (15, 20), (16, 24), (17, 28), (18, 32), (19, 36)$



$$\frac{68}{4} - \frac{b}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$

$$68$$

$$68 - 17 = 52$$

~~лучше~~  $68 - a - \frac{b}{4} = 1$  (\*)  
 или  $68 - a - \frac{b}{4} = 2 - \frac{1}{4}$  (\*)  
 где  $a$  — проекция  $68 - b$   
 $\rightarrow (+) \cdot 68 - b - 17 \cdot \frac{1}{4} = 52 - \frac{3b}{4}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

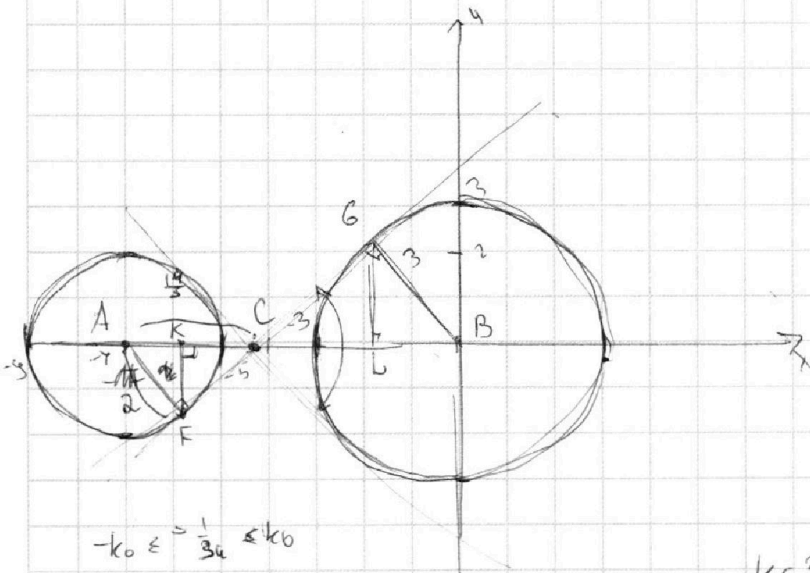
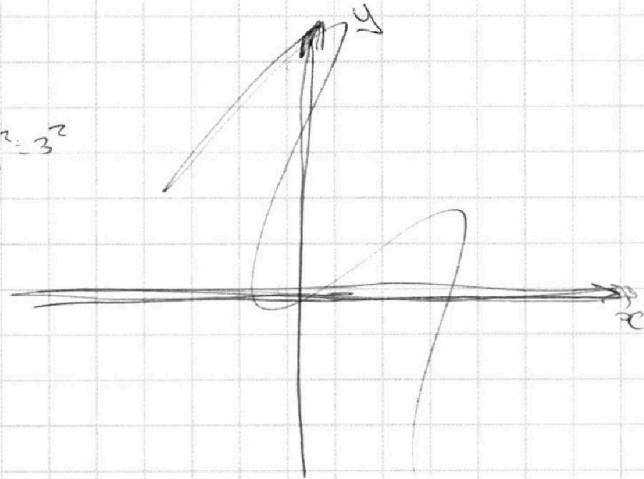


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & x + 3ay - 7b = 0 \\
 & (x^2 + 4x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \\
 & \quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 & (x+2)^2 + y^2 + 45 = 49 \qquad x^2 + y^2 = 9 \\
 & (x+2)^2 + y^2 = 22 \qquad x^2 + y^2 = 3^2
 \end{aligned}$$

1)  $a = 0$ :  $x = 7b$   
 2)  $a \neq 0$ :  $y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$



$$-k_0 \in \left[-\frac{1}{3a}, k_0\right]$$

$$AC = \frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{14}{5}$$

$$CB = 7 \cdot \frac{3 \cdot 7}{5} = \frac{21}{5}$$

$$FC^2 = \frac{196}{25} - 4 = \frac{96}{25} = \frac{4 \cdot 24}{25} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5}$$

$$FC = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$FK = \frac{4}{5} = 2 \cdot \frac{4\sqrt{6}}{8}$$

$$FK = \frac{4\sqrt{6}}{7}$$

$$GL = \frac{3}{2} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{7} = \frac{6\sqrt{6}}{7}$$

$k$

$$k_0 \geq \frac{1}{3a} \geq -k_0$$

$$\frac{1}{3a} \leq \frac{5\sqrt{6}}{124}$$

$$a \geq \frac{4}{5\sqrt{6}} \text{ или } a < 0 \quad -\frac{4}{5\sqrt{6}} \leq a \leq \frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$KC^2 = CF^2 - KF^2 = \frac{4 \cdot 24}{25} - \frac{16}{49}$$

$$= 4 \cdot 24 \cdot \frac{49 - 25}{49 \cdot 25} = \frac{2^2 \cdot 24^2}{7^2 \cdot 5^2}$$

$$KC = \frac{2 \cdot 24}{7 \cdot 5} = \frac{48}{35}$$

$$CL = \frac{3}{2} KC = \frac{3}{2} \cdot \frac{48}{35} = \frac{72}{35}$$

$$kL = \frac{72 - 48}{35} = \frac{24}{35} = \frac{24}{7}$$

$$k_0 = \frac{GL + KF}{kL}$$

$$k_0 = \frac{GL}{CL} = \frac{\frac{6\sqrt{6}}{7}}{\frac{72}{35}} = \frac{5 \cdot 30\sqrt{6}}{72 \cdot 12} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$