



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3}$ $b = 2^{n_4} \cdot 3^{n_5} \cdot 5^{n_6}$ $c = 2^{n_7} \cdot 3^{n_8} \cdot 5^{n_9}$

В условиях минимальности abc никакие группы множителей не будет, но условия.

$ab: 2^9$ $bc: 2^{14}$ $ac: 2^{19}$ \Rightarrow $n_1 + n_4 \geq 9$ $n_1 + n_7 \geq 13$ $n_7 + n_9 \geq 14$

чем меньше сумма, тем меньше произведение

$n_1 + n_4 + n_7 \geq 21$ - оценка

Пусть $n_1 = 4$ $n_4 = 2$ $n_7 = 12$ - проверим - подходит
под все условия ~~и др.~~ значит это минимум где ответ 2, делаем аналогично с 3.

$n_2 + n_5 \geq 10$ $n_2 + n_5 + n_8 \geq \frac{11}{2}$ поскольку $n_2, n_5, n_8 \in \mathbb{N}$

$n_5 + n_8 \geq 13$ \Rightarrow $n_2 + n_5 + n_8 \geq 21$ - оценка

$n_1 + n_3 \geq 18$

Пример: $n_2 = 8$ $n_5 = 3$ $n_8 = 10$ - удовлетворяет всем условиям, значит 21 минимальная сумма ~~сумма~~ ~~сумма~~ ~~сумма~~

$n_3 + n_6 \geq 10$

$n_3 + n_6 \geq 30$

$n_6 + n_9 \geq 13$

~~$n_3 + n_6 + n_9 \geq 26,5$~~ ~~т.к. $n_3, n_6, n_9 \in \mathbb{N}$~~

~~$n_3 + n_6 + n_9 \geq 24$~~ - оценка

Пример:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим $n_3 + n_9 \geq 30$ значит $n_3 + n_9 + n_6 \geq 30$, т.к.
 $n_6 \geq 0$ — оценка

Пример $n_3 = 15$ $n_9 = 15$ $n_6 = 0$. — подходит.
 значит 30 — минимальная сумма степеней.

Средним 3 части.

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15} \quad b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \quad c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{15}$$

Тогда $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ — минимальное произведение.

Отв: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

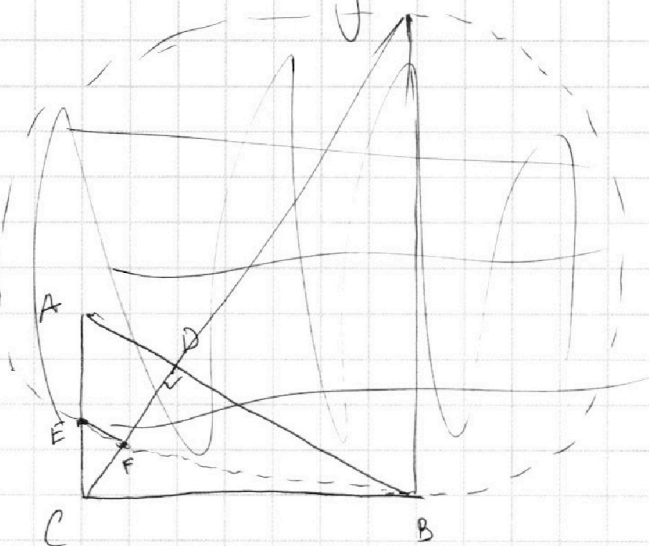
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2



Дано: $\triangle ABC$

$CD \perp AB$ $DE \perp AB$

~~EF~~ CB - касат к окол.

$\triangle ABC$; $EF \parallel AD$

$AD : DB = 1 : 3$

$S_{ABC} = S_{CEF} - ?$

Решение:

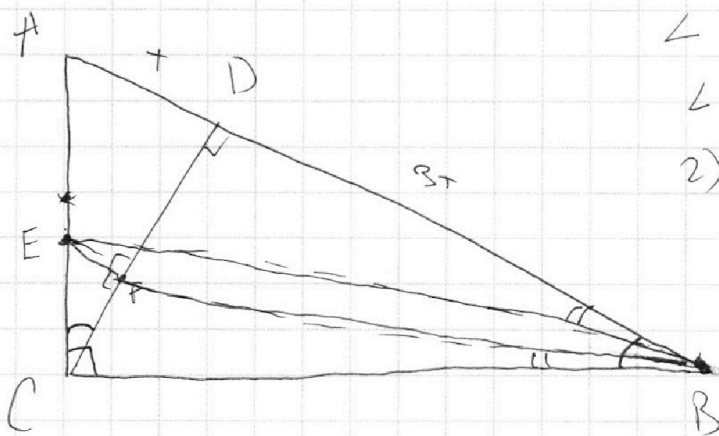
1) $\angle EFD = \angle FDB$ ($EF \parallel AD$)

$\angle EFC = 90^\circ$ $\overset{90^\circ}{=}$

$\angle ACD = 90^\circ - \angle A = \angle CBA$

2) $\angle ECF = \angle ABC$ $\left. \begin{matrix} \angle EFC = 90^\circ \\ \angle ACB = 90^\circ \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle EFC \sim \triangle ABC$

3) ~~AB~~ пусть $AD = x$; $DB = 3x$



Тогда $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3}x$ тогда по т. Пуп $CB = 2\sqrt{3}x$;
 $CA = 2x$

$\frac{CA}{AD} = 2 \Rightarrow \angle ACD = 30^\circ$ и если $\angle EBC = \alpha$; тогда

$\angle EFB = 180 - \alpha$ (по св. окол.) тогда $\angle DFB = 90 - \alpha$

Тогда $\angle FBD$ тоже $= \alpha = \angle EBF$; значит

$\angle EBA = \angle FBC$; $\angle A = 90 - \angle CBA = \angle DCB$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle EBA = \angle FBC \\ \angle FEB = \angle A \end{array} \right. \Rightarrow \Delta CFB \sim BEA. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{EA} = \frac{AB}{CB} = \frac{4x}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{AE}{CF}$$

Пусть ~~CF = x~~. $EF = y$; тогда из завб получим
 $CF = \sqrt{3}y$ $CE = 2y$.

$$AE = CA - CE = 2x - \sqrt{3}y = 2y$$

$$\frac{AE}{CF} = \frac{2x - \sqrt{3}y}{\sqrt{3}y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \frac{2x}{\sqrt{3}y} = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1$$

$$x = y + \frac{\sqrt{3}}{2}y = y \frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

найдем коэф. подобия

$$k = \frac{AB}{CE} = \frac{4x}{2y} = 2 \quad \frac{x}{y} = \sqrt{3} + 2$$

$$\text{Тогда } \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 = 4 + 4\sqrt{3}$$

$$\frac{2x - 2y}{2y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1$$

$$k = \frac{AB}{CE} = 2 \frac{x}{y} = \frac{4}{\sqrt{3}} + 2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 = \frac{28}{3} + \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AE = 2x - 2y$$

$$\frac{AE}{CF} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2x - 2y}{\sqrt{3}y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \frac{2x - 2y}{y} = 2$$

$$\frac{x - y}{y} = 1 \quad x = 2y \quad \frac{x}{y} = \frac{2}{1}$$

$$k = \frac{AB}{CE} = \frac{2x}{y} = 4$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 = 16$$

Ответ: 16.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}] \Rightarrow 5 \arcsin \varphi \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [-\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$$

~~Если φ находится в $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$~~

$$\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin \varphi) = \varphi$$

$$\varphi \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin \varphi) = \pi - \varphi$$

~~Пусть $x = \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$~~

(1) Пусть $x = \varphi \in [-\pi; \frac{\pi}{2}] + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

Тогда (1) Пусть

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)) = \frac{\pi}{2} + x$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi - 2\pi k)) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\text{Тогда } \frac{\pi}{2} - \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

из отр. k может быть
равно

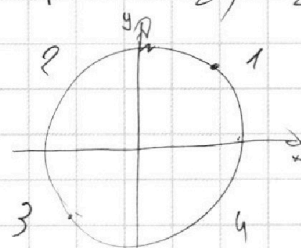
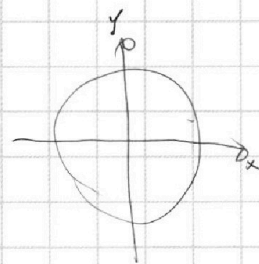
$$k = -2; -1; 0; 1; 2$$

$$\text{т.к. } x \in [-3\pi; 2\pi]$$

$$\varphi \in [-\pi; \pi]$$

Рассмотрим при $k = 0$

$$\frac{\pi}{2} - \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \varphi \in [0; \pi]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k=1 \quad \varphi=0 \quad - \text{погр} \quad (x=2\pi)$$
$$k=2 \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad - \text{не погр.} \quad \#$$

Объединил решения.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -3\pi \\ x = -\frac{4\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} \\ x = 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Отв: } \frac{\pi}{2}; -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$k = -2$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ - не подходит. $\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{6}$ - не подходит.

$k = -1$ $\varphi = 0$ - не подходит.

$k = 0$ $\varphi = \frac{\pi}{3}$ - не подходит.

$k = 1$ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ - не подходит.

$k = 2$ $\varphi = \pi$ - не подходит.

Тогда $x = -2\pi$

$k = -2$ $\varphi = \pi$ - не подходит. но ОДР.

$k = -1$ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ - не подходит но ОДР

$k = 0$ $\varphi = \frac{\pi}{3}$ - не подходит. но ОДР.

$k = 1$ $\varphi = 0$ - не подходит но ОДР.

$k = 2$ $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ - не подходит.

$x = -3\pi$

$x = -\frac{4\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3}$

$x = 2\pi$

(2) случай.

$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi - 2\pi k)) = \frac{\pi}{2} + \varphi$

$\frac{\pi}{2} + \varphi = \varphi + 2\pi k + \frac{\pi}{2}$

$4\varphi = 2\pi k - 2\pi$

$\varphi = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{2}$

вместочная проверка

ограничения $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$k = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

$\varphi \in [-\pi; 0]$

$k = -2$; $\varphi = -\frac{3\pi}{2}$ - не подходит

$k = -1$; $\varphi = -\pi$ - не подходит

$k = 0$; $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ - не подходит $x = -\frac{\pi}{2}$

$x = -3\pi$

$x = -\frac{\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

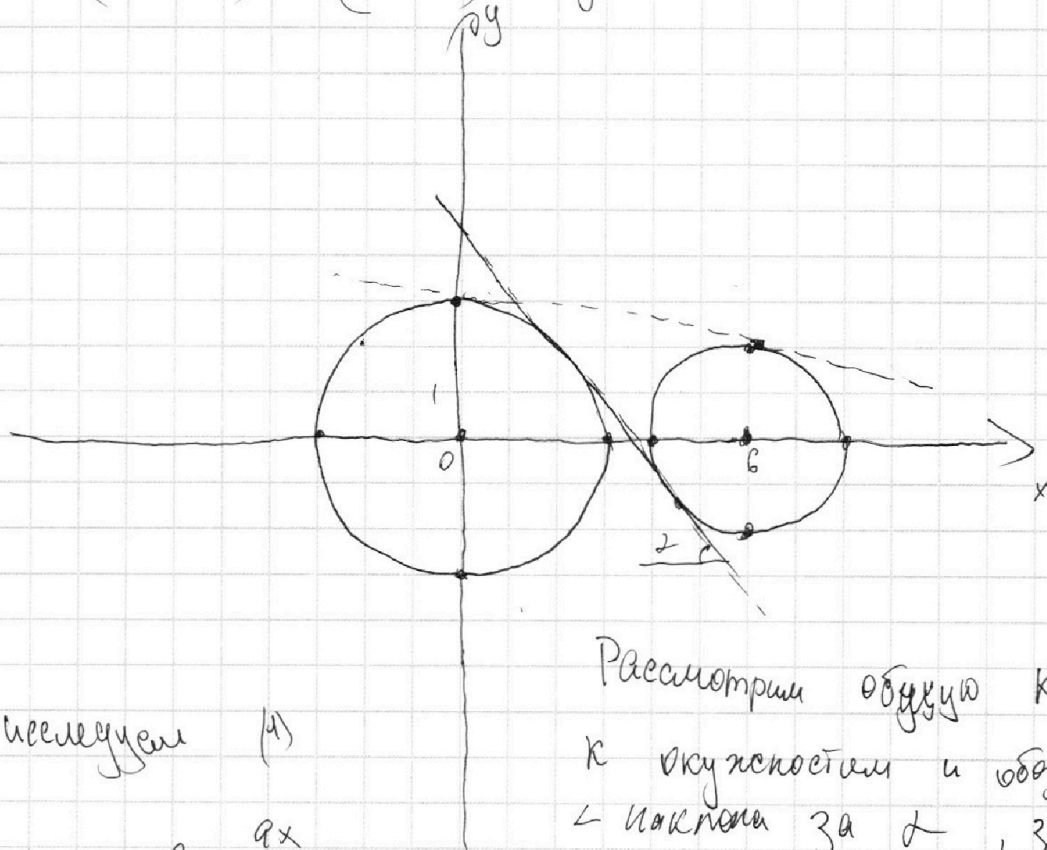
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \quad ax + 2y - 3b = 0$$

$$(2) \quad (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 + 32 - 12x) = 0.$$

$$(3) \quad (x^2 + y^2 - 9)((x - 6)^2 + y^2 - 4) = 0 \quad \text{построим график.}$$



исследуем (1)

$$y = 1,5b - \frac{ax}{2}$$

Рассмотрим общую касательную
к окружностям и обозначим
 \angle наклона за α , заметим
если $\angle \varphi$ - прямой $\angle \varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$
найдем φ при которых будет
решение а если $\angle \varphi \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$ - тогда
нет.

найдем предельный α .

(рассматриваем отриц. наклоны ($a \geq 0$))

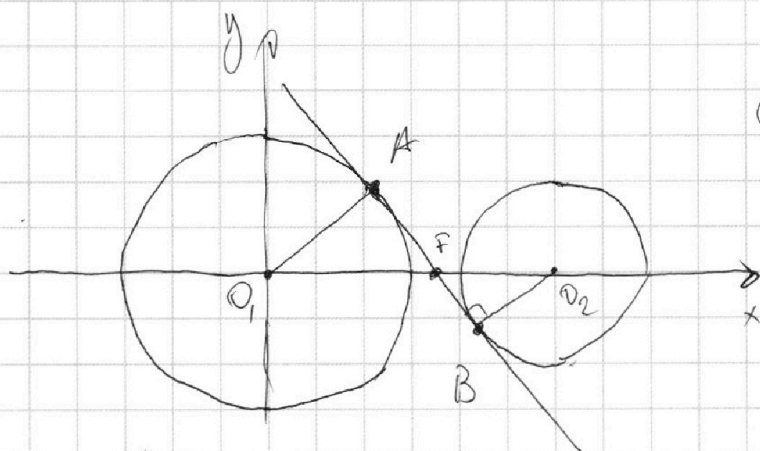
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle O_1AF \sim \triangle FO_2B$
 $(\angle O_1AF = \angle FO_2B = 90^\circ)$
 $\angle O_1AF = \angle FO_2B$
 (верт.)

$$\frac{O_1A}{FO_2} = \frac{OF}{BO_2}$$

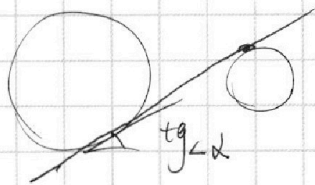
$$\frac{3}{2} = \frac{0, F}{6 - 0, F} \quad 18 = 50, F \quad 0, F = \frac{18}{5}$$

~~sin~~ $\cos \angle A O_1 F = \sin \angle O_1 F A = \frac{O_1 A}{O_1 F} = \frac{5}{6}$

$\cos \angle O_1 F A = \frac{\sqrt{11}}{6}$ $\tan \angle O_1 F A = \frac{5}{\sqrt{11}}$ — предельный угол, значит чтобы получился 4 решения

$$\frac{a}{2} \leq \frac{5}{\sqrt{11}} \quad 0 \leq a < \frac{10}{\sqrt{11}}$$

аналогично для положительных наклонов т.к. окружности симметрично расположены



$$-\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \quad a < -\frac{10}{\sqrt{11}}$$

~~решая по~~ складываем случаи

получаем $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

ответ: $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8$$

ОДЗ $x > 1$
 $x \neq 1$

Пусть $\log_3 x = F$ тогда $\log_x 3 = \frac{1}{F}$

$F \neq 0$

$$F^4 + 6 \frac{1}{F} = \frac{5}{2} \frac{1}{F} - 8$$

$F \neq 0$

$$F^4 + \frac{1}{2F} + 8 = 0 \quad | \cdot 2F \quad F \neq 0$$

$$2F^5 + 16F - 1 = 0$$

$g(F) = 2F^5 + 16F - 1$
Функция g — монотонно возрастает. 1 корень;

$$2F(F^4 + 8) = 1 \quad \log_3 x = F$$

т.к. функция g возрастает.

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3^5 - 8$$

Замена $\log_3 5y = t$ $\log_{5y} 3 = \frac{1}{t}$

$$t^4 - 1.45 = \dots$$

$$\log_3 x = F \quad \log_x 3 = \frac{1}{F} \quad F \neq 0$$

$$F^4 + \frac{6}{F} = \frac{5F}{2} - 8$$

$$F^5 + 8F + \frac{1}{2F} = 0 \quad | \cdot 2F$$

$$2F^5 + 16F + 1 = 0 \quad - 1 \text{ корень т.к. функция } g(F) = 2F^5 + 16F - 1 \text{ монотонно возрастает.}$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3^5 - 8$$

$t \neq 0$

$$t = \log_3 5y$$

$$t^4 + \frac{2}{t} = \frac{1.45}{2t} - 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~2t^5~~ $2t^5 + 16t - \frac{1}{t} = 0$. — аналогично 1 корень.

$$t = \log_3 5y \quad y =$$

$$2 \log_3^5 5y + 16 \log_3 5y - \frac{1}{5y} = 0$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 1 = 0.$$

$$2(\log_3^5 x + \log_3^5 5y) + 16 \log_3 5xy - \frac{1}{5y} = 0.$$

~~2t^3 + 16t + 1 = 0~~

$$\log_3^4 x + 0,5 \log_3 3 = \log_3^4 5y + 3,5 \log_3 3.$$

$$(\log_3^2 x + \log_3^2 5y) (\log_3^2 xy) \log_3 \left(\frac{x}{y}\right) + 0,5 (\log_3 3 + 4 \log_3 5y 3).$$

Ответ: $xy = 0,2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



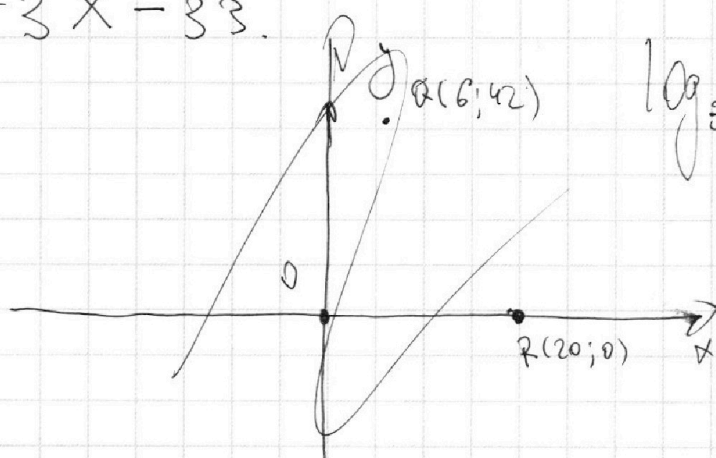
$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33.$$

$$3(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) = 33.$$

$$x_2 - x_1 = X \in \mathbb{Z}$$
$$y_2 - y_1 = Y \in \mathbb{Z}.$$

$$3X - Y = 33$$

$$Y = 3X - 33.$$

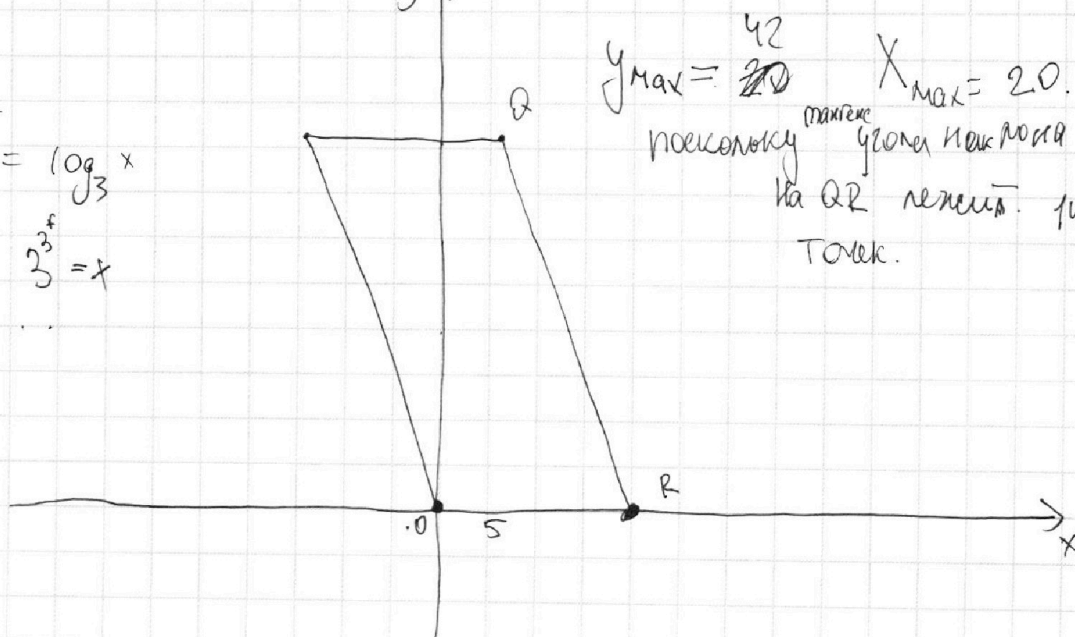


$$\log_3^f = \log_3^1$$

$$\log_3$$

нарисуем скелетный график

$$3^x = \log_3 x$$
$$3^{3^x} = x$$



$$y_{\max} = 42$$
$$x_{\max} = 20.$$

поскольку также углы наклона в точке $RQ=3$,
на QR лежат 14 целых точек.



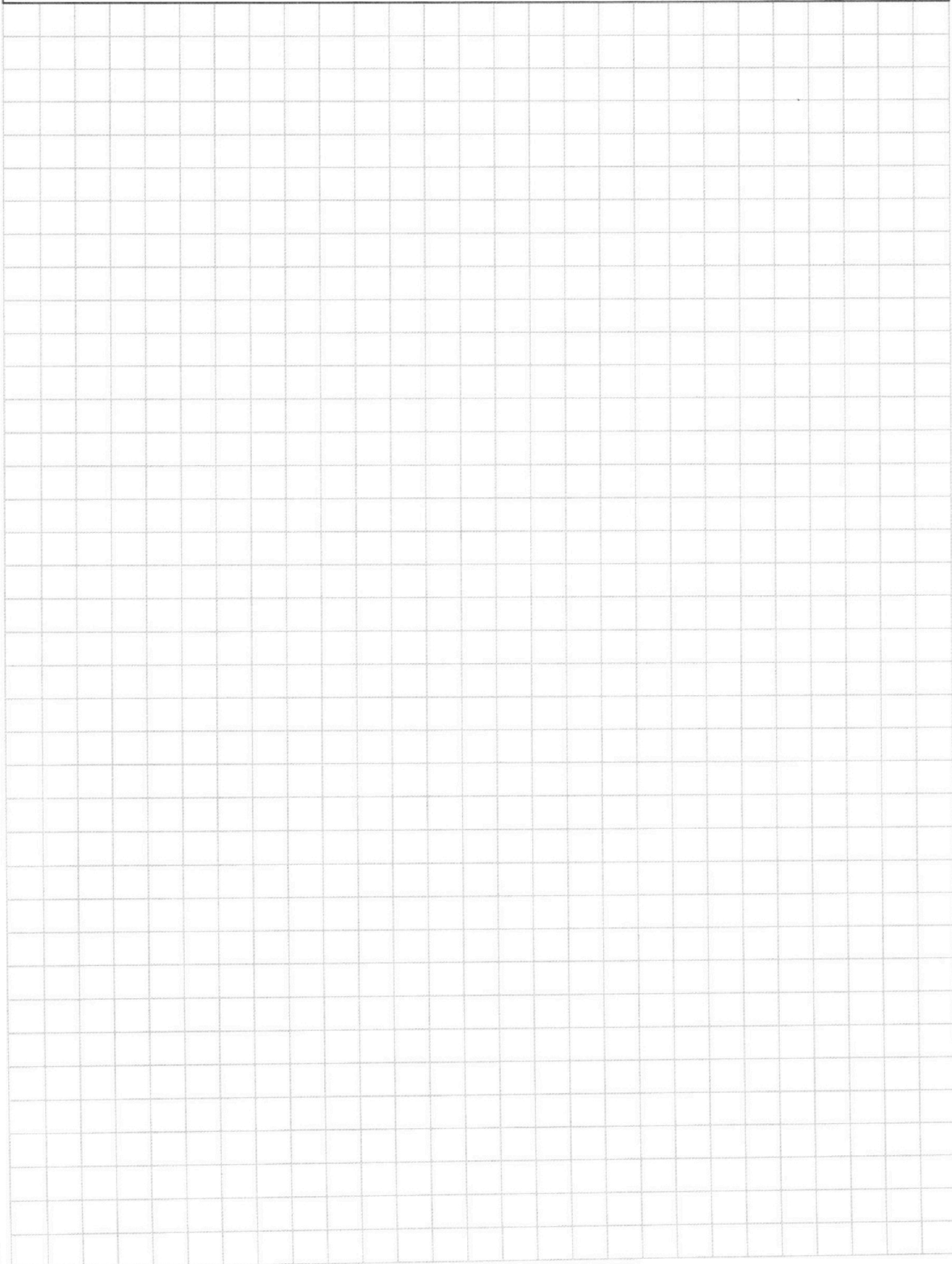
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

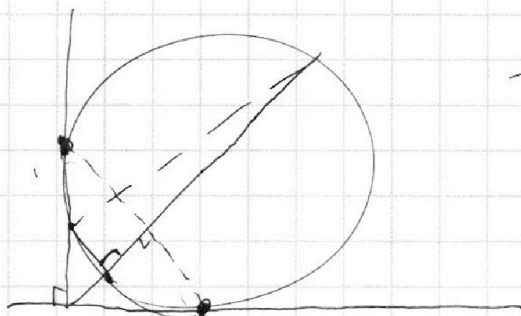
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

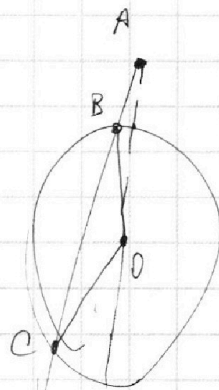
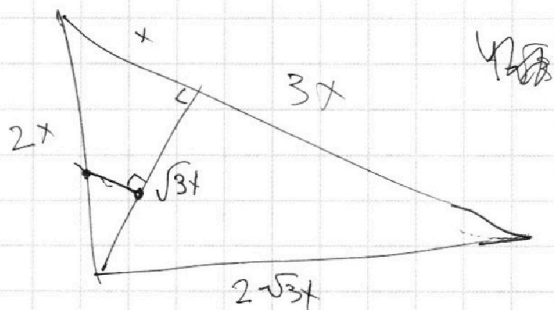
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{r}{r^4} + 0,5r - 8 = 0$$

$$r^5 - 2r^4 + 1 = 0$$

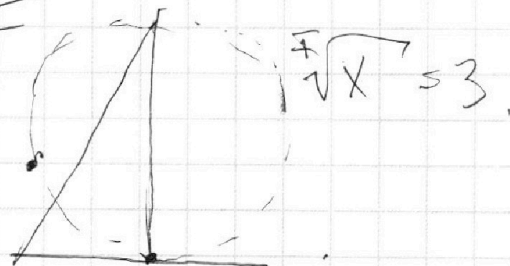
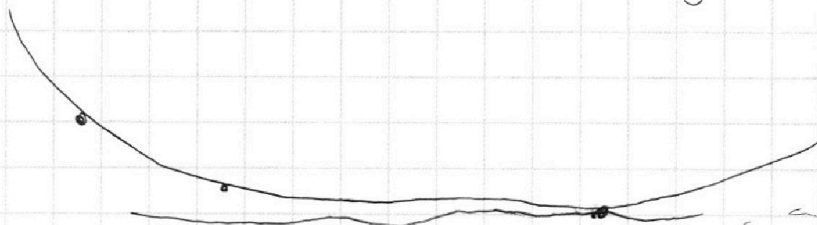


$$2 \log_{\sqrt{3}} \log_{\sqrt{3}} 2 + \log_{\sqrt{3}} 16 - \log_{\sqrt{3}} 4 = 0$$

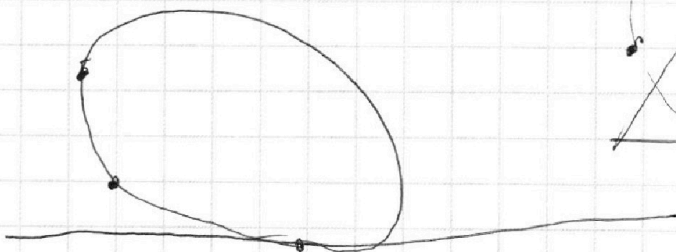
$$AB \cdot BC = (AO - r)(AO + r)$$

$$\log_4 32t^6 - 1 = 0$$

$$3^t = x \quad 32t^6 = 4$$



$$\sqrt[4]{x} = 3$$



$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x$$

$$\log_3 x = \hat{r}$$

$$\log_x 3 = \frac{1}{\hat{r}}$$

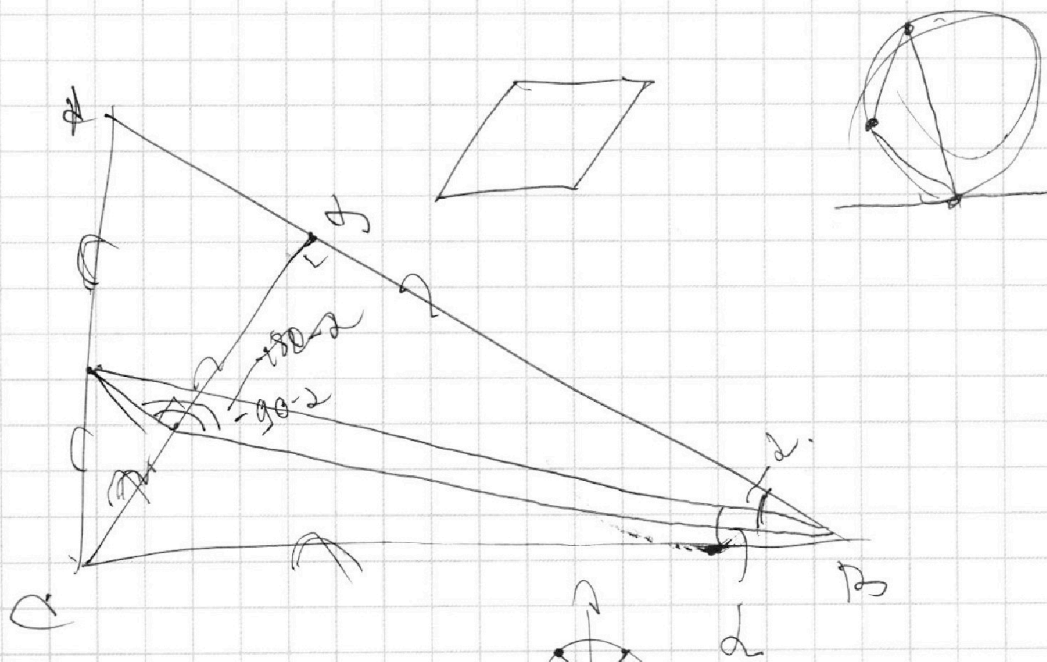
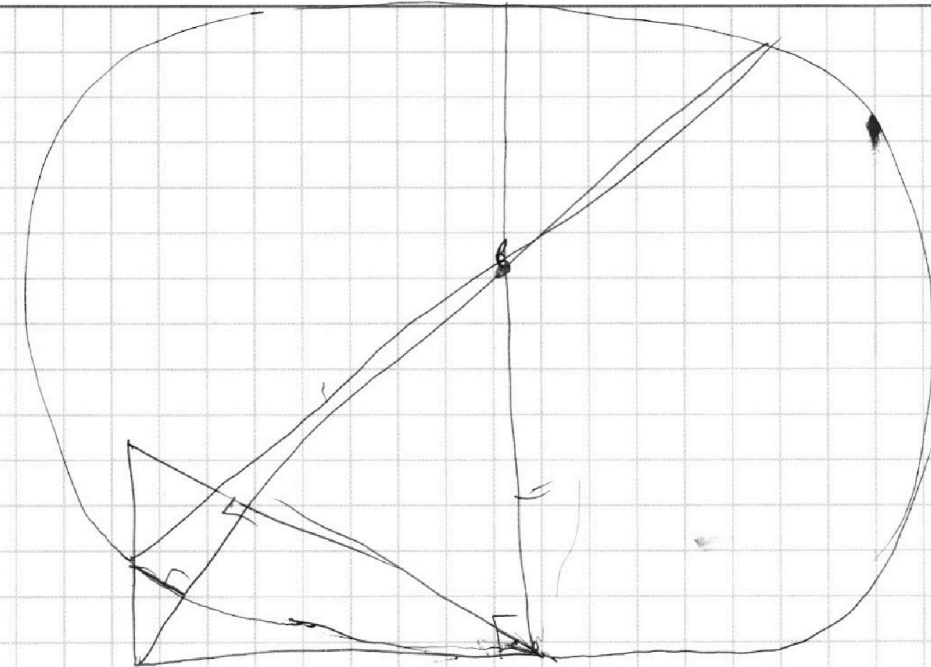
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

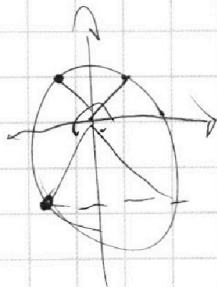
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\sin \varphi) = \varphi$$

$$\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi) = \pi - \varphi$$



$$\varphi \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$$

$$180 - \varphi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3}$$

$$b = 2^{n_4} \cdot 3^{n_5} \cdot 5^{n_6}$$

$$c = 2^{n_7} \cdot 3^{n_8} \cdot 5^{n_9}$$

$$n_1 + n_4 \geq 9$$

$$n_1 + n_4 + n_7 \text{ min.}$$

$$n_4 + n_7 \geq 14$$

$$n_1 + n_4 + n_7 \geq 21$$

$$n_1 + n_4 \geq 19$$

$$n_1 - n_7 = 5$$

$$n_1 + n_7 = 9$$

$$n_1 = 4 \quad n_7 = 2$$

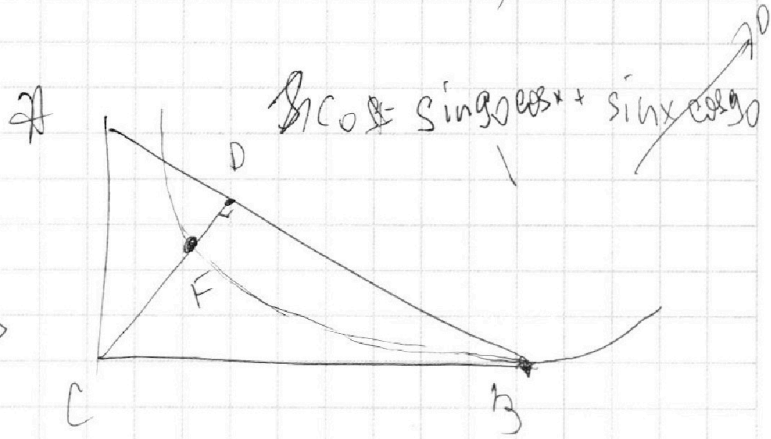
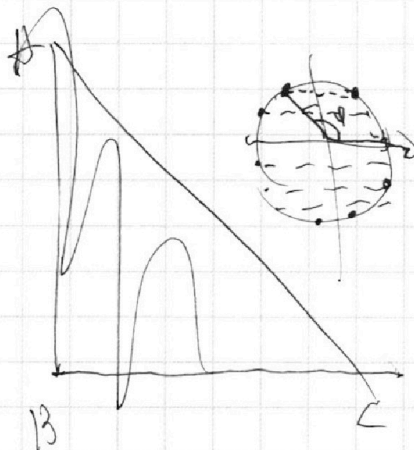
$$n_7 = 12$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(90-x))$$

$$\cos x = \sin(90-x)$$

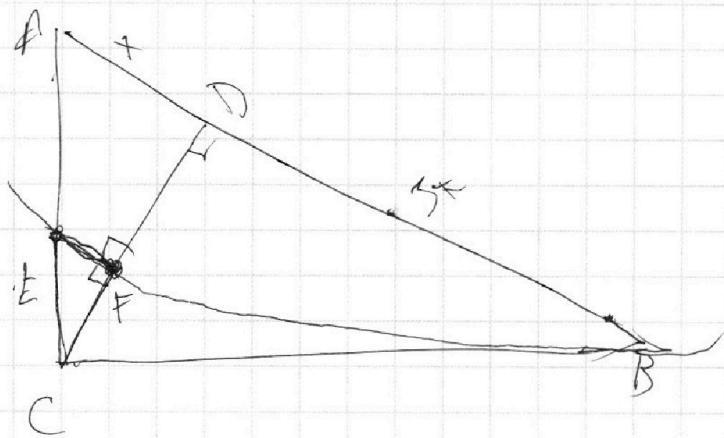
$$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$



$$\arcsin(\sin \varphi)$$

$$\varphi - 90$$

$$\varphi - (24 - 0.80) = 170 - \varphi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



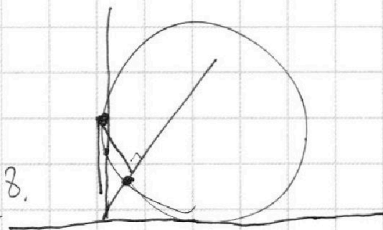
$$(x^2 + y^2 - 9) \left((x^2 - 6)^2 + y^2 + 4 \right) = 0$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 =$$

$$2^3 = 8$$

$$3^{5y} = t.$$

$$3 = \log_2 8.$$



$$h_2 - h_5 = .5 \quad 5y = \log_{3^5} 3$$

$$h_8 + h_9 = 14$$

$$h_2 + h_5 = 11$$

$$h_2 = 8 \quad h_5 = 3. \quad h_8 = 10.$$

$$h_9 - h_3 = 4$$

$$h_9 + h_3 = 30$$

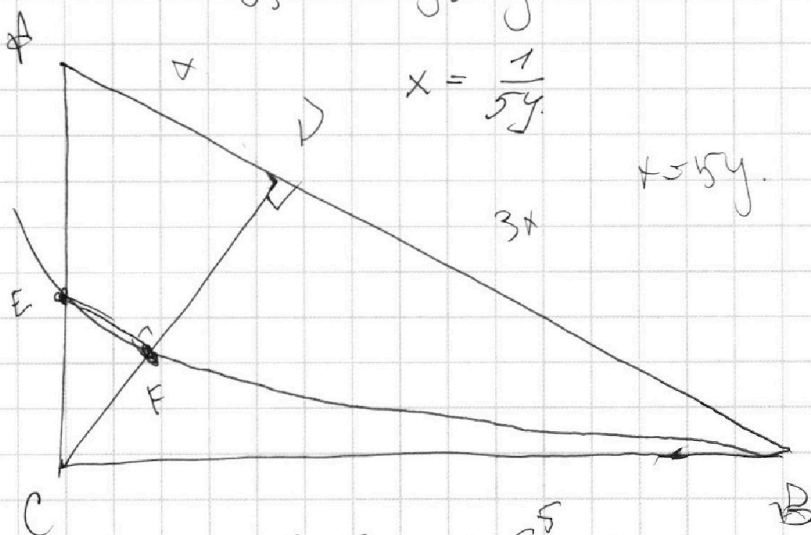
$$h_9 = 14$$

$$h_3 = 13$$

$$\log_3 x = \log_{3^5} 3$$

$$x = \frac{1}{5y}$$

$$t = 5y.$$



$$32^F + 4^F = 6.$$