



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-15; 90)$ ,  $Q(2; 90)$  и  $R(17; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



<sup>N1</sup>  
Условия можно переписать так:

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \text{ord}_2(a) + \text{ord}_2(b) \geq 6 \\ & \text{ord}_2(a) + \text{ord}_2(c) \geq 16 \\ & \text{ord}_2(b) + \text{ord}_2(c) \geq 14 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ord}_2(abc) = \\ \text{ord}_2(a) + \text{ord}_2(b) + \text{ord}_2(c) \geq \\ \frac{6+16+14}{2} = 18$$

$p$ -во  $\forall$  в  $\mathbb{N}$  при  $\text{ord}_2(a)=4, \text{ord}_2(b)=2, \text{ord}_2(c)=12$ .  
( $\forall$  в  $\mathbb{N}$  линейной сист. при этом сод.)

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \text{ord}_5(a) + \text{ord}_5(b) \geq 11 \\ & \text{ord}_5(b) + \text{ord}_5(c) \geq 13 \\ & \text{ord}_5(a) + \text{ord}_5(c) \geq 28 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ord}_5(abc) = \\ \text{ord}_5(a) + \text{ord}_5(b) + \text{ord}_5(c) \geq \\ \text{ord}_5(a) + \text{ord}_5(c) \geq 28$$

$p$ -во  $\forall$  в  $\mathbb{N}$  при  $\text{ord}_5(a)=14, \text{ord}_5(b)=0, \text{ord}_5(c)=14$ .  
( $\forall$  в  $\mathbb{N}$  линейной сист. при этом сод.)

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \text{ord}_3(a) + \text{ord}_3(b) \geq 13 \\ & \text{ord}_3(b) + \text{ord}_3(c) \geq 21 \\ & \text{ord}_3(a) + \text{ord}_3(c) \geq 25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ord}_3(abc) = \\ \text{ord}_3(a) + \text{ord}_3(b) + \text{ord}_3(c) \geq \\ \frac{25+21+13}{2} = \frac{59}{2} = 29,5 \\ \Rightarrow \text{ord}_3(abc) \geq 30 \\ \text{с.н.} \quad \text{ord}_3(abc) \in \mathbb{N}$$

$p$ -во  $\forall$  в  $\mathbb{N}$  при  $\text{ord}_3(a)=8, \text{ord}_3(b)=5, \text{ord}_3(c)=17$ .  
( $\forall$  в  $\mathbb{N}$  линейной сист. сод.)

Имеем, что  $abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ .

$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$  тогда, тогда  $\forall$  в  $\mathbb{N}$  заданы при  
 $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}, b = 2^2 \cdot 3^5, c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$ .

Ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

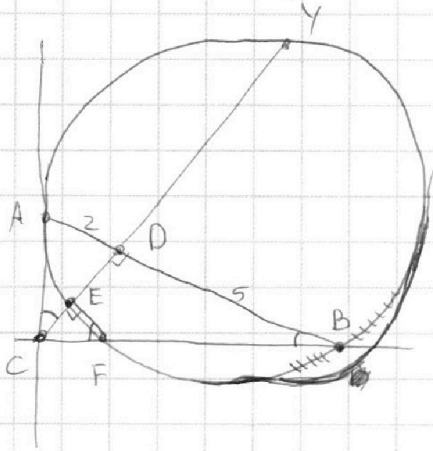
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2 (часть 1)



Обозначим длину AD как  
2 у.е., тогда т.к.  $\frac{AD}{DB} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow$   
 $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{5} \Rightarrow$  длина DB равна 5 у.е.  
далее пойдём к длин и танген-  
сам будет произведённым  
в у.е. и (у.е.)<sup>2</sup> соответ. и длинны  
результатом будет у.е. не будут.

1)  $\frac{AD}{CD} = \frac{PC}{BD} \Rightarrow DC^2 = AD \cdot BD = 10 \Rightarrow DC = \sqrt{10}$  (по теореме  $\Delta$  о разн. высотам в  $\Delta$ )  
 $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4 + 10} = \sqrt{14}$   
 $CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{25 + 10} = \sqrt{35}$  (теор. Пиф.)

2) Продлим CE до второго пересек. Y с окружностью (AEFY).  
 Тогда  $\deg(B) = 2 \cdot 5 = AD \cdot BD = ED \cdot DY = (CD - CE) \cdot DY = (\sqrt{10} - CE) \cdot DY$   
 $\deg(C) = AC^2 = 14 = CE \cdot CY = CE \cdot (CD + DY) = CE(\sqrt{10} + DY)$

$\Rightarrow$  получаем сист.  $\begin{cases} 10 = (\sqrt{10} - CE) \cdot DY \\ 14 = CE(\sqrt{10} + DY) \end{cases}$

для удобства  $CE = a, DY = b$

$\begin{cases} 10 = \sqrt{10} \cdot b - ab \\ 14 = ab + \sqrt{10} \cdot a \end{cases} \Rightarrow 24 = \sqrt{10}(a+b) \Rightarrow b = \frac{24}{\sqrt{10}} - a > 0$

$\Rightarrow 14 = a \left( \frac{24}{\sqrt{10}} - a \right) + \sqrt{10} \cdot a = -a^2 + \left( \frac{24}{\sqrt{10}} + \sqrt{10} \right) a = -a^2 + \frac{34}{\sqrt{10}} a$

$\Rightarrow a^2 - \frac{34}{\sqrt{10}} a + 14 = 0$

$D_a = \frac{34^2}{10} - 4 \cdot 14 = \frac{1156 - 560}{10} = \frac{596}{10}$

$a = \frac{\frac{34}{\sqrt{10}} \pm \sqrt{D_a}}{2} = \frac{\frac{34}{\sqrt{10}} \pm \frac{\sqrt{596}}{\sqrt{10}}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{149}}{\sqrt{10}}$

Если  $a = \frac{17 + \sqrt{149}}{\sqrt{10}}$  т.к.  $\sqrt{149} < \frac{24}{\sqrt{10}}$   $\Rightarrow 17 + \sqrt{149} < 24 \Rightarrow \sqrt{149} < 7 \Rightarrow 149 < 49 \Rightarrow$   
 $a \neq \frac{17 + \sqrt{149}}{\sqrt{10}} \Rightarrow a = \frac{17 - \sqrt{149}}{\sqrt{10}} > 0 \Rightarrow CE = \frac{17 - \sqrt{149}}{\sqrt{10}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 (часть 2)

3)  $\triangle ACD \sim \triangle CBD$  (CD - высота в  $\triangle$ )

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$  (EF || DB и  $\angle$  общий)

$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle CFE \Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CFE}} = k^2_{подобия} = \frac{AD^2}{CE^2} =$

$$\frac{4}{\frac{(17 - \sqrt{149})^2}{10}} = \frac{40}{289 - 34\sqrt{149} + 149} = \frac{40}{438 - 34\sqrt{149}} = \frac{20}{219 - 17\sqrt{149}}$$

Ответ:  $\frac{20}{219 - 17\sqrt{149}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k = \frac{9\pi - 2x}{10} \Leftrightarrow 5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 8x = 20\pi k - 4\pi \\ \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \in [0; \pi], k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k = \frac{9\pi - 2x}{10} \Leftrightarrow -5\pi + 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 12x = 14\pi - 20\pi k \\ -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k \in [0; \pi], k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k + \frac{\pi}{2} + 2\pi k \in [0; \pi], k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \pi - \frac{\pi k}{5} \in [0; \pi], k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{k}{5} \in [0; 1], k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k + 2\pi k \in [0; \pi], k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi k}{3} \in [0; \pi], k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{k}{3} \in [0; 1], k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow k \in \{0, 1, -1, -2\} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5\pi k}{3}, k \in \{2, 1, 0, 1\}$$

Ответ:  $\left[ \begin{array}{l} x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, k \in [0; 5] \\ x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}, k \in [2; 1] \end{array} \right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



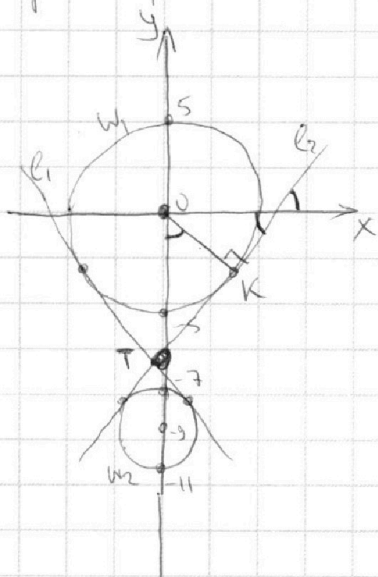
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



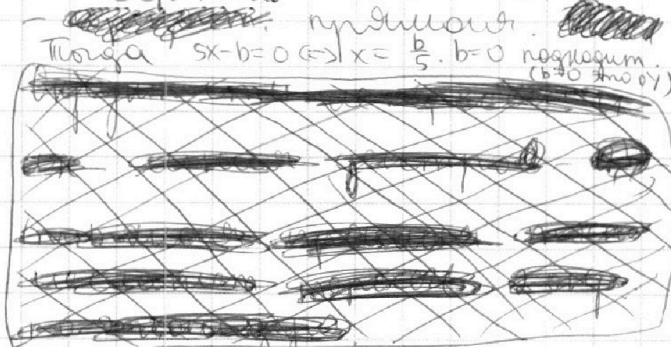
№4 (часть 1)

Второе ур-ние: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 = 81 - 77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

две окр-ти с у.  $(0; 0)$  и  $r=5$  и с у.  $(0; -9)$ ,  $r=2$ .



Если  $a=0$ , то первое ур-ние ~~вертикаль~~ ~~прямая~~.



Пусть  $a \neq 0 \Rightarrow$  перв-ое ур-ние представим в виде

$$6ay = b \cdot sx \Leftrightarrow y = -\frac{s}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

Проведем 2 касат.  $l_1$  и  $l_2$ , которые будут касаться окр-тей,  $l_1$  имеет отриц. наклон, а  $l_2$  - положит. Они пересекут. в точке  $T \in OY$  в силу симм. относит.  $OY$ .

Пусть  $O_1$  - центр окр-ти  $W_1$  с у.  $(0; 0)$  и  $r=5$ , а  $O_2$  - центр окр-ти  $W_2$  с у.  $(0; -9)$  и  $r=2$ .

Тогда  $\frac{O_1T}{O_2T} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{2} \Rightarrow O_1T = \frac{5}{2}O_2T$

также  $O_1T + TO_2 = 9 \Rightarrow \frac{7}{2}O_2T = 9 \Rightarrow O_2T = \frac{18}{7}$   
 $\Rightarrow O_1T = 9 - \frac{18}{7} = \frac{63-18}{7} = \frac{45}{7} \Rightarrow T(0; -\frac{45}{7})$

Пусть  $l_2$  касат.  $W_1$  в  $K \Rightarrow OK^2 + KT^2 = TO_1^2$  (теор. Пиф.,  $\angle OKT = 90^\circ$  в силу касат.)

$$\Rightarrow TK^2 = O_1T^2 - O_1K^2 = \frac{45^2}{49} - r_1^2 = \frac{45^2}{49} - 25 = \frac{45^2 - 35^2}{49} = \frac{10 \cdot 80}{49} = \frac{800}{49}$$

$$\Rightarrow TK = \frac{\sqrt{800}}{7} = \frac{20\sqrt{2}}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4 (часть 2)

Котр. наклона  $\ell_2 = \text{tg} \angle (\ell_2, OX) = \text{tg} \angle \tau_{OK}$

(в силу подобия  $\Delta$  образ. высотой  $b$   $\Delta$ )

$$= \frac{TK}{OK} = \frac{20\sqrt{2}}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{1}$$

В ~~силу~~ силу симм.  $\ell_1, \ell_2$  отн.  $OY$ , котр. наклона  $\ell_1$  -  $-\frac{4\sqrt{2}}{1}$ .

Вернемся к прямой  $\Gamma$  ур-ния  $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ .

Пусть  $-\frac{5}{6a} \in \left[ \frac{4\sqrt{2}}{1}; \frac{4\sqrt{2}}{1} \right]$ . Тогда проведем

прямую с данным наклоном через  $T$

(сделать это можно, т.к.  $-\frac{b}{6a}$  может быть

любым и мы можем провести функцию прямой с наклоном  $-\frac{5}{6a}$  через любую точку на  $OX$ ).

Тогда, в силу  $-\frac{5}{6a} \in \left[ \frac{4\sqrt{2}}{1}; \frac{4\sqrt{2}}{1} \right]$ , прямая

$\Gamma$  ур-ния будет более пологой, чем касат., по отношению к  $OX$ , и не пересек. ни одну окр-ть, ~~или~~ или в точности совп. с

одной из касательных. Если пересек.  $O$ ,

тогда прямая  $\Gamma$  сфера. наклоном  $\ell_1$  и  $\ell_2$ ,

мы не сможем пересечь  $\ell_2$  и наоборот. Мы

не сможем пересечь её с обеими окр-тами и

получить 4 пересек. (и 4 реш. сист.), indica-

лированной с касательной: ~~или~~ при сдвиге вверх/

вниз, она моментально перестанет касать-

ся одной из окр-тми.

Значит,  $-\frac{5}{6a} \in \left( -\infty, -\frac{4\sqrt{2}}{1} \right) \cup \left( \frac{4\sqrt{2}}{1}, +\infty \right)$ . В том же

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (попытка 3)  
лучше, проведем прямую Эулиера через  $T$ , она будет более резкой чем обе касат. и пересечет обе окружности привели по 2 раза, а значит такой пар.  $b$  можно будет подобрать.

~~Итого имеем:~~ Итого имеем:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7}, a \neq 0 \\ -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7}, a \neq 0 \\ a = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \cdot \frac{6}{5}, a \neq 0 \\ \frac{1}{a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \cdot \frac{6}{5}, a \neq 0 \\ a = 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35}, a \neq 0 \\ \frac{1}{a} < -\frac{24\sqrt{2}}{35}, a \neq 0 \\ a = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} 0 < a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \\ 0 > a > -\frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$a \in \left( -\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{Ответ: } \left( -\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

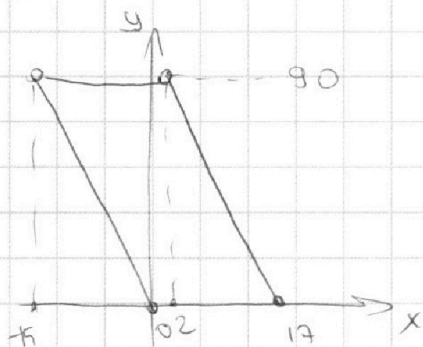
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N6



Условие  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$   
 $\Leftrightarrow y_2 = (48 + y_1 + 6x_1) - 6x_2 -$   
 прямая с накл.  $-6$   
 с пар. ради  $y_1, x_1$ .  
 кривая пересек. в  $OX -$   
 угловом поле.

Точки и прямые  $n$ -линии имеют наклон  $-6$ :  
 $y = -6x, y = 102 - 6x$ . ~~\_\_\_\_\_~~

Ищем, что точки, <sup>кон.</sup>удов. условию  $y_1$ ,  
 это попросту точки, лежащие на  
 отрезках вида  $y = k - 6x, k \in \mathbb{Z}, y \in [0; 90]$ .

Остатков посчитать сложно, потому  
 точек на каждом из 91 такого отрезка, и  
 задача решена.

Заметим, что при  $k_1 \equiv k_2 \pmod 6$  на отрезках  
 $y = k_1 - 6x, y = k_2 - 6x$  ( $y \in [0; 90]$ ) будет одина-  
 ковое количество точек, т.е. эти точки  
 были сдвинуты на вектор  $(1; 0)$  и целыми,  
 точки не падают.

Всего 16 отр. с  $k \equiv 0 \pmod 6$ , ~~\_\_\_\_\_~~ и по 15 отр.  
 всех ост.  $k$ .

На отрезке ~~\_\_\_\_\_~~ вида  $k \equiv 0 \pmod 6$  столько же, сколько  
 и на отр.  $y = -6x$  ( $y \in [0; 90]$ ). Подберём любой  $x \in \mathbb{Z}$   
 и  $0 \leq -6x \leq 90$  и никакой группой  $x$ . Всего 16 точек,  
 Аналогично рассуждая имеем для отр.  $k \equiv 1 \pmod 6$   
 и ост. по 15 точек. ~~\_\_\_\_\_~~

~~\_\_\_\_\_~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

на (часть  
Осталось только почитать сколько  
точек будет подходить  $y_1, x_1$  для каждого  
 $k = 48 + y_1 + 6x_1 \in [0, 90]$ . Положив цехи  $x_1$ ,  
мы сразу определим  $y_1 = 48 + k - 6x_1$  однозначно,  
т.е. каждый  $k$  предств.

узнают как-во ~~способов~~ предств,  
и как  $48 + y_1 + 6x_1$  ~~мы~~ мы упишем  
каждое такое число от 6 (при  $k \equiv 0$ )  
и 15 (при  $k \not\equiv 0$ ), сложим, и получим  
ответ.

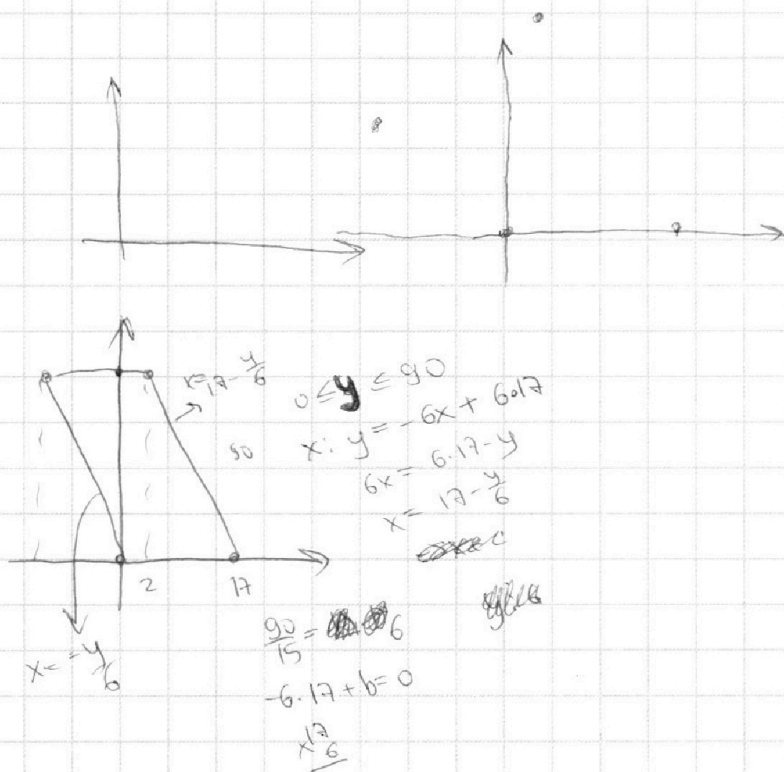
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

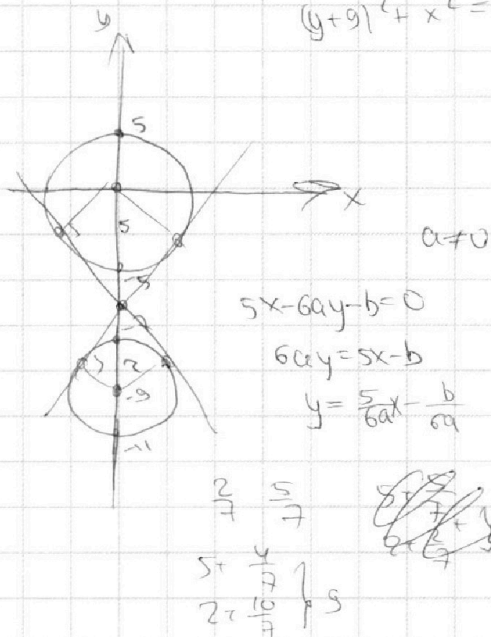


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$y_2 - y_1 = 6$~~

$(y+9)^2 + x^2 = 81 - 77 = 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{AD} = \frac{7}{5} \rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$$

$$CE^2 - (\sqrt{10} + \frac{\sqrt{6}}{5})CE + 4 = 0$$

$$\frac{596/4}{1139} = \frac{34}{136} = \frac{102}{1156}$$

$$10 \cdot 58 = 580$$

$$\frac{\sqrt{14}}{10} = \frac{2\sqrt{6}}{10} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$24 = \sqrt{10}(DY + CE) \rightarrow DY = \frac{\sqrt{10}}{10} - CE$$

$$14 = CE \cdot \sqrt{10} + \frac{\sqrt{10}}{10} - CE = -CE^2 + (\sqrt{10} + \frac{\sqrt{6}}{5})CE$$

$$10 = \sqrt{10}DY - CE \cdot DY$$

$$14 = \sqrt{10}CE + CE \cdot DY$$

$$\frac{17 \cdot 102}{102} = 17$$

$$15.4 + 16.2 = y = 1 - 6x$$

$$\begin{cases} 10 = ED \cdot DY = (10 - CE)DY \\ 14 = CE \cdot CY = CE \cdot (\sqrt{10} + DY) \end{cases}$$

$$14 = \frac{CE \cdot CE}{ED} + \frac{1}{ED} = \frac{CE^2 + 1}{ED}$$

$$x \in [0, 1] \rightarrow x = -14$$

$$x \in [0, 1] \rightarrow x = 15$$

$$x = 15 \rightarrow 2.5 = ED \cdot DY = (10 - CE)EY$$

$$CE(CE + DY) = 14 = CE \cdot CY = CE(CE + DY)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}$$

$$ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$$

$abc \rightarrow \min$

~~1: a+b+c=18~~

1:  $a+b=6$     ?  $a+b+c=18$

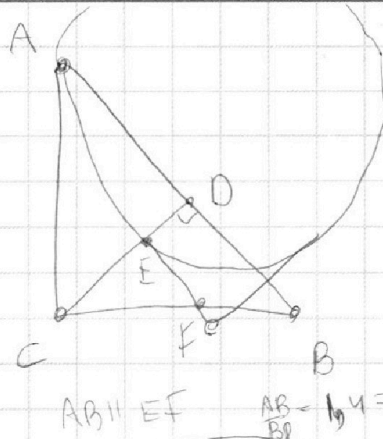
2:  $b+c=14$      $c=12$

$a+c=16$      $a=4$   
 $b=2$

3:  $a+b \geq 13$      $2(a+b+c) = 59$

$b+c \geq 21$      $a=8$   
 $a+c \geq 25$      $b=5$   
 $c=17$

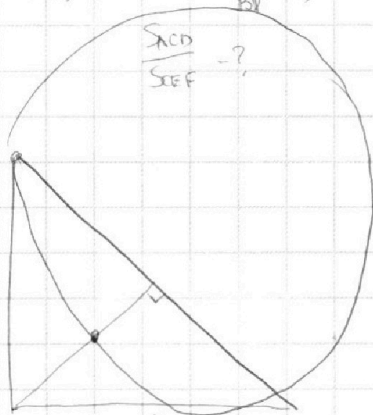
5:  $a+b=11$      $a+b+c = \frac{52}{2} = 26$   
 $b+c=13$      $b=2$   
 $a+c=28$      $c=15$   
 $a=13$



$AB \parallel EF$

$\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{DEF}} = ?$



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

~~$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$~~

~~$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$~~

~~$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$~~

$\forall x \in [0; \pi]$

~~$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) =$~~

$= \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

$-\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k = \frac{9\pi - 2x}{10}$

~~$\forall k \in \mathbb{Z}$~~

$-5\pi + 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k = \frac{9\pi - 2x}{10}$

$12x = 14\pi - 20\pi k$

$5\pi + 20\pi k - 10x + 2x - 9\pi = 0$

$x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k$

$8x = -4\pi + 20\pi k$

$-\frac{\pi}{2} + \frac{7}{6}\pi + 2\pi k = \frac{5}{3}\pi k$

$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$

$\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi k}{3} \in [0; \pi]$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \in [0; \pi] \Rightarrow \frac{5}{2}\pi k + 2\pi k \in [0; \pi]$

$\frac{45}{120} = \frac{3}{8}$   
 $\frac{165}{120} = \frac{11}{8}$   
 $(45-35)(45+35)$   
 $= 10 \cdot 80$

$\frac{45^2}{8} - 25^2 =$   
 ~~$\frac{2025}{8} - 625 =$~~   
 ~~$\frac{2025 - 5000}{8} =$~~   
 ~~$-\frac{2975}{8}$~~

$T(-5 - \frac{10}{2})$   
 $= -5 - 5$   
 $= -10$

$\frac{63}{18} = \frac{7}{2}$

$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$

$\frac{6\pi k - 5\pi}{3}$

$\frac{2}{2} + \frac{k}{3} \in [0; 1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



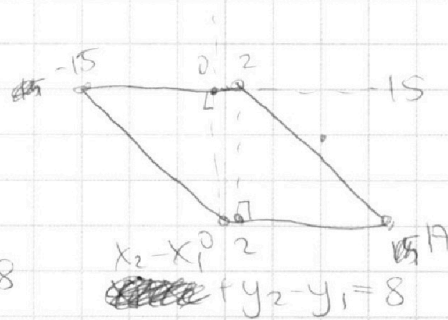
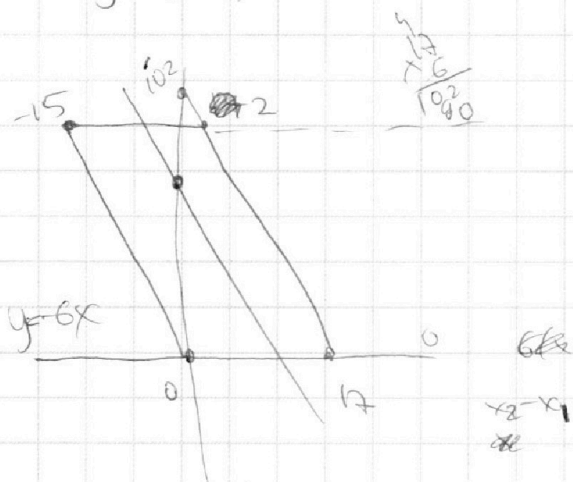
$$\log_{x^3}(11^{-2}) = -\frac{2}{3} \log_x(11) = \frac{-\frac{2}{3}}{\log_{11} x}$$

$$0,5y \rightarrow a$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 - \log_{x^3} \frac{1}{121} = \log_{11}^4(a) + \log_{11} 11 - \log_{a^3} 11^{-13}$$

$$-5 = \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} + \frac{2/3}{\log_{11} x} = \log_{11}^4 a + \frac{1}{\log_{11} a} + \frac{13/3}{\log_{11} a}$$

$$\log_{11}^4(xa)$$



$$\angle = 90^\circ$$

$$x_2 - x_1 \in [-32; 32]$$

$$y_2 - y_1 = 48 - 6(x_2 - x_1) \in [90; 90]$$

$$48 - 6(x_2 - x_1) \geq -90$$

$$6(x_2 - x_1) \leq 138$$

$$x_2 - x_1 \leq 23$$

$$48 - 6(x_2 - x_1) \leq 90$$

$$-42 \leq 6(x_2 - x_1)$$

$$x_2 - x_1 \geq -7$$

$$x_2 - x_1 \in [-7; 23]$$

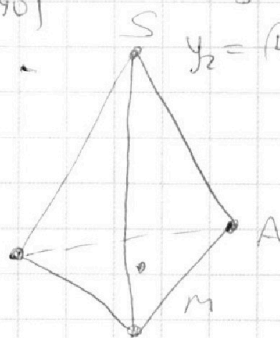
$$6(a_2 - a_1)$$

$$y = k - 6x$$

$$k \in [0; 102]$$

$$x = \frac{k}{6}$$

$$y = -6x - 16 \text{ мкс или } y = 16 \text{ мкс}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

