



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



$$54 \cdot 10 = 540$$

$$14 + 14 = 28$$

1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2 - a(x_1)}$$

$$a \cdot b = 2 \cdot 7$$

$$b \cdot c = 2 \cdot 4$$

$$a \cdot c = 2 \cdot 7$$

$$a \cdot b + b \cdot c = 2 \cdot 7$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$x \cdot b = \frac{5}{4}$$

$$2 - 4x = t$$

$$x_1 > x_2$$

$$4x_1 > 4x_2$$

$$-4x_1 < -4x_2$$

$$+ a \cdot b = 2 \cdot 7 \cdot k$$

$$b \cdot c = 2 \cdot 4 \cdot n$$

$$a \cdot b = 2 \cdot 7$$

$$b \cdot c = 2 \cdot 4$$

$$p = (2x^2 - 5x + 3)$$

$$f(x) = 2 - 4x$$

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2 - a(x_1)} \cdot \sqrt{x_2} - \sqrt{x_2 - a(x_2)} \cdot \sqrt{x_2 + 3} =$$

ab

$$b(a+c) = 2 \cdot 7 \cdot (k + 2 \cdot 4 \cdot n)$$

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2 - a}$$

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2 - a} \cdot \sqrt{x_2} -$$

$$x_2 > x_1$$

$$\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0$$

$$\sqrt{x_2 - a(x_2)} - \sqrt{x_1 - a(x_1)} > 0$$

$$\begin{cases} a \cdot b = 2 \cdot 7 \cdot k \\ b \cdot c = 2 \cdot 4 \cdot n \\ a \cdot c = 2 \cdot 7 \cdot p \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = \frac{2 \cdot 7 \cdot k}{a} \\ \frac{k \cdot c}{a} = 2 \cdot 4 \cdot n \end{cases}$$

$$m \cdot 4 \cdot (a \cdot b \cdot c) \quad 2(x - \frac{5}{2})(x - 1)$$

$$\begin{cases} a \cdot b = 2 \cdot 7 \cdot 10 \\ b \cdot c = 2 \cdot 4 \cdot 17 \\ a \cdot c = 2 \cdot 7 \cdot 34 \end{cases} \quad \frac{5}{a} = 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot n \quad 2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 3$$

$$a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 7 \cdot 51 \quad k \cdot p = n \quad \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 3$$

$$a \cdot b \cdot c \quad (2x - 5) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - (2x + 2) \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Запишем условие:  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ;  $ab = 2 \cdot 7 \cdot 10$   
 $bc = 2 \cdot 7 \cdot 14$   
 $ac = 2 \cdot 7 \cdot 20$  }  $\min(abc) = ?$

Рассмотрим  $ab = 2 \cdot 7 \cdot 10 \Rightarrow ab = 2 \cdot 7 \cdot k$ ,  $k, \ell, n \in \mathbb{N}$   
 Аналогично  $bc = 2 \cdot 7 \cdot \ell$ ,  $ac = 2 \cdot 7 \cdot n$

Тогда можно записать систему:

$$\begin{cases} ab = 2 \cdot 7 \cdot k & (1) \\ bc = 2 \cdot 7 \cdot \ell & (2) \\ ac = 2 \cdot 7 \cdot n & (3) \end{cases}$$

Перемножим (1) и (2) и (3):

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2 \cdot 7 \cdot k \cdot \ell \cdot n$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^3 \cdot 7^3 \cdot k \ell n$$

$$\sqrt{a^2 b^2 c^2} = 7 \sqrt{2^3 \cdot k \ell n}$$

т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  $\sqrt{a^2 b^2 c^2} = abc$ .

$$abc = 7 \sqrt{2^3 \cdot k \ell n}$$

натуральное натуральное  $\Rightarrow \sqrt{2^3 \cdot k \ell n}$  - натуральное;

Тогда надо найти  $\min(k \ell n)$ , что  $abc \sqrt{2^3 \cdot k \ell n} \in \mathbb{N}$

$$k, \ell, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \min(k \ell n) = 2 \Rightarrow abc = 7 \cdot 2$$

Ответ:  $\min(abc) = 7 \cdot 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 2.

Заменим условие:  $\frac{a}{b}$  - несократима ~~и взаимно просты~~

$$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$$

Пусть  $\max(m)$

$$\begin{cases} a+b : m & (1) \\ a^2 - 8ab + b^2 : m & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим  $a^2 - 8ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 8ab = (a+b)^2 - 8ab$ .

Тогда:  $\begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2 - 8ab : m \end{cases}$  Если  $a+b : m$ , то  $(a+b)^2 : m \Rightarrow$  в уравнении (2)  $8ab$  тоже кратно  $m$ .

$\begin{cases} a+b : m & (1) \\ 8ab : m \end{cases}$  Если  $a : m$ , то из (1) следует, что  $b : m$ , тогда  $\frac{a}{b}$  можно сократить на  $m$ , что противоречит условию.

Аналогично  $b : m \Rightarrow 8 : m, m = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ .

Рассмотрим пример:  $a=3, b=5$ :

$$\frac{3+5}{9-8 \cdot 3 \cdot 5+25} = \frac{8}{39-30 \cdot 3} = \frac{8}{39-90} = \frac{8}{-51} = \frac{8}{-7 \cdot 8} \Big|_{m=8} =$$

$$= -\frac{1}{7} \Rightarrow \exists \max(m) = 8$$

Ответ:  $\max(m) = 8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

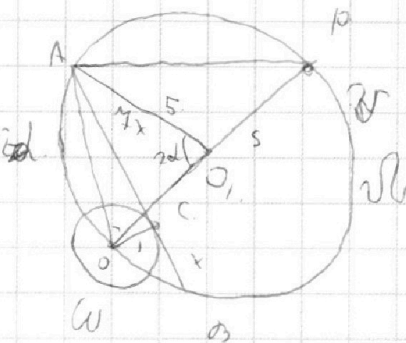
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

дано:

$\omega; \Omega; O \in \Omega; O - \text{центр } \omega$

$A \in \Omega, B \in \Omega, A \in \omega, A \cap \omega = C; \frac{AC}{CB} = 4$

$r(\text{радиус } \omega) = 1$

$R(\text{радиус } \Omega) = 5$

$AB = ?$

Решение:

Рассмотрим  $O_1$  - центр  $\omega$ . Прямая  $OO_1 \cap \Omega = P$ .

Рассмотрим  $\triangle AOP$ :  $\angle OAP = 90^\circ$ , т.к.  $OP$  - диаметр

$$AO_1^2 = OO_1 \cdot OP \quad OO_1 = O_1P = R$$

" " " "  $\Rightarrow AO_1 \perp OP$ . Рассмотрим  $\triangle AO_1O$ :

$\angle AO_1O = 90^\circ$ , т.к.  $AO_1 \perp OP$ . По теореме Пифагора:

$$AO^2 = AO_1^2 + OO_1^2 = 50 \Rightarrow AO = 5\sqrt{2}$$

$AB$  - касательная к  $\omega \Rightarrow OC \perp AB$ . Рассмотрим  $\triangle ACO$ :

$\angle ACO = 90^\circ$ ;  $OC = r = 1$ , тогда по теореме Пифагора:

$$AO^2 - OC^2 = AC^2; AC^2 = 49 \Rightarrow AC = 7 \Rightarrow CB = 1 \Rightarrow AB = 8$$

Ответ:  $AB = 8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Заметим, что  $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 - (2 - 4x)$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3 - (2 - 4x)} = 2 - 4x$$

Если  $2 - 4x = 0$ , то  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 0$  - решение.

$x = \frac{2}{4}$ . Покажем, что других нет:

$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ ;  $x \in [\frac{2}{4}, +\infty)$   $f(x) \uparrow$ ;  $x \in (-\infty, \frac{2}{4})$   $f(x) \downarrow$

$a(x) = 2 - 4x$   $x \in (-\infty, \infty)$   $a(x) \downarrow$ .

Исходя из этого:

$\sqrt{f(x)}$ , ( $f(x) \geq 0$ ).  $\uparrow$  если  $x \in [\frac{2}{4}, +\infty)$   $\wedge f(x) \geq 0$

$\sqrt{f(x) - a(x)}$   $\uparrow$  если  $f(x) - a(x) \geq 0 \wedge x \uparrow \Rightarrow$

$\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x) - a(x)}$   $\uparrow$   $a(x) \geq 0$  если  $a(x) \geq 0 \Rightarrow$  отню

$a(x) \downarrow \Rightarrow$  1 решение. Если же  $a(x) \leq 0$

$\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x) - a(x)}$  ~~можно упрощать, но если функция~~

~~симметрична относительно начала координат:~~

но точка перегиба функции лежит выше  $\frac{2}{4} \Rightarrow$

пересечения не будет. Значит  $x = \frac{2}{4}$  - ед. решение.

Ответ.  $x = \frac{2}{4}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 продолжение.

1) ~~если  $\ell \cap \omega = A$  и  $\ell \cap \Omega = B$~~   
~~если~~

если  $\ell \cap \omega = A$  и  $\ell \cap \Omega = B$ , то если  $\ell$  — ось симметрии, то система имеет ровно два решения.

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 = ax + y + 10\beta = 0 \\ x^2 + y^2 = ax + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} D((x+8)^2 + (ax+10\beta)^2 - 1) = 0, \quad D(f(x)) - \text{дискриминант от } f(x) \\ D(x^2 + (ax+10\beta)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20ax\beta + 100\beta^2 - 1) = 0 \\ D(x^2 + a^2x^2 + 20ax\beta + 100\beta^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(x^2(1+a^2) + x(16+20a\beta) + 63+100\beta^2) = 0 \\ D(x^2(1+a^2) + 20ax\beta + 100\beta^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (16+20a\beta)^2 - 4(1+a^2)(63+100\beta^2) = 0 \\ 400a^2\beta^2 - 4(1+a^2)(100\beta^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 256 + 640a\beta + 400a^2\beta^2 - 4(63 + 63a^2 + 100\beta^2 + 1000\beta^2) = 0 \\ 4000\beta^2 - 4(63 + 63a^2 + 100\beta^2 + 1000\beta^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 256 + 640a\beta - 252 - 252a^2 - 4000\beta^2 = 0 \\ -4000\beta^2 + 16 + 16a^2 = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$$\begin{cases} ax - y + 10\beta = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + 10\beta = y & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

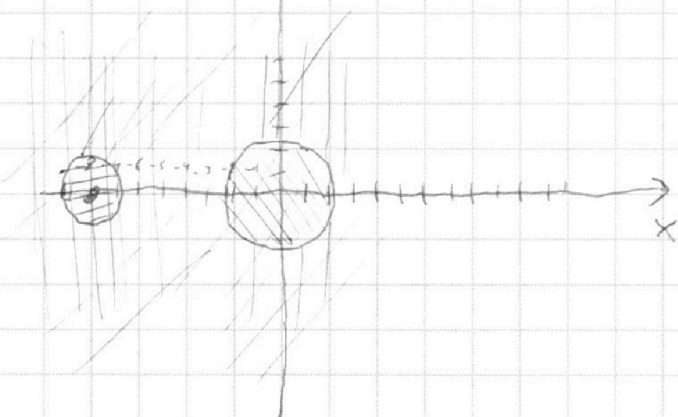
$$(2) : 1) (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \wedge x^2 + y^2 - 4 \leq 0$$

↑ y

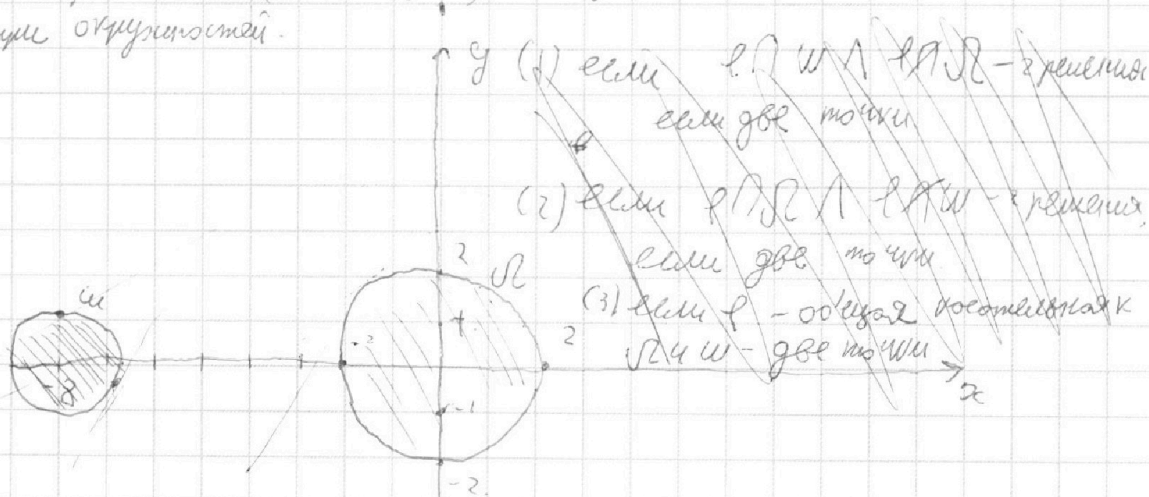
/// и /// для 1 случая; ||| и ≡ для второго

$$2) (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \wedge x^2 + y^2 - 4 \geq 0$$

будет малая ω, а большая Ω. Прямая y = ax + 10β будет l



Знают решения  $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$  являются области внутри окружностей.





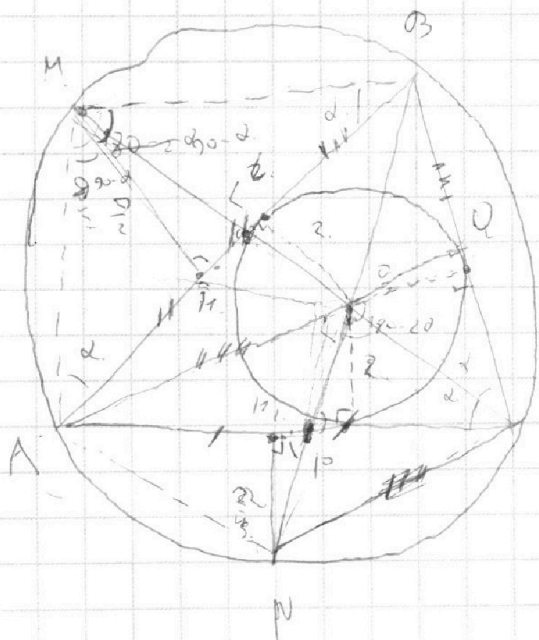
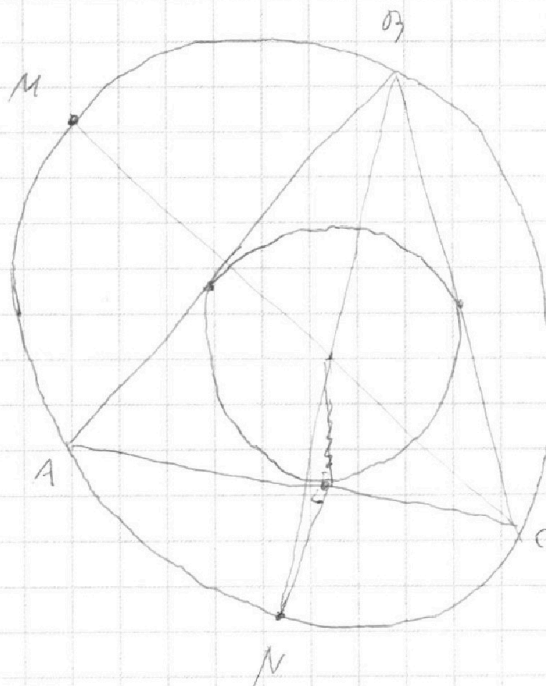
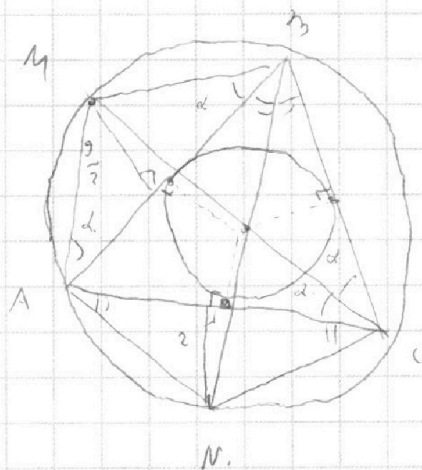
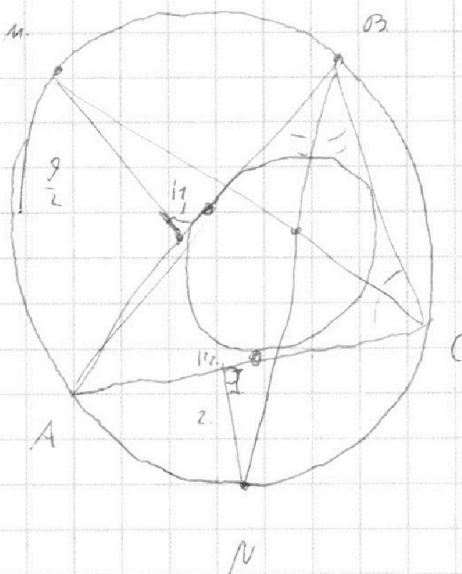
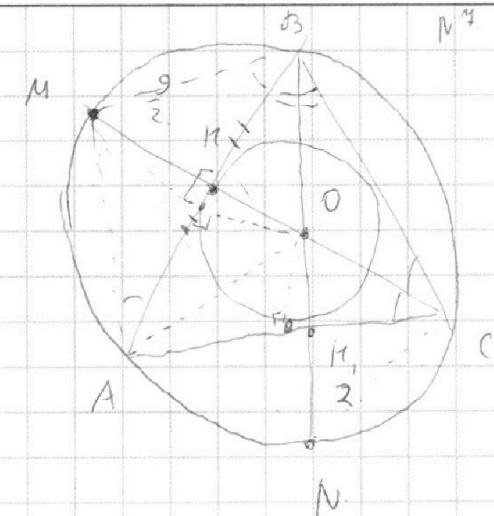
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ML}{LO}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{MP}{PO}$$

$$V = \frac{100LO}{ML \cdot MP}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

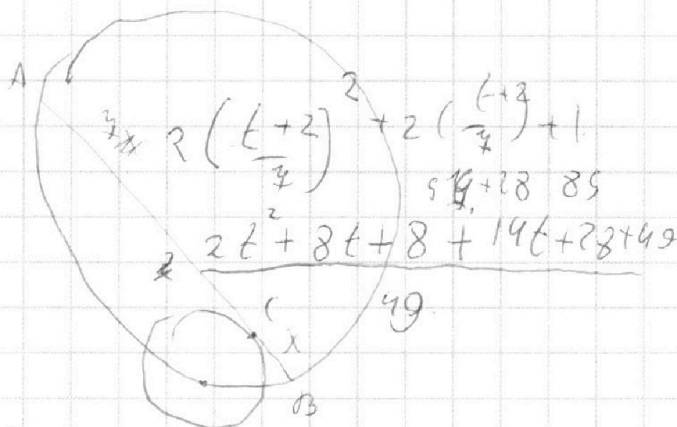
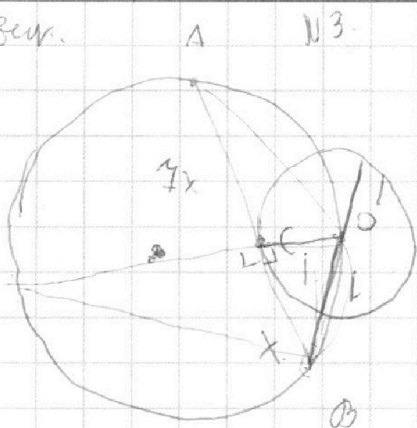
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



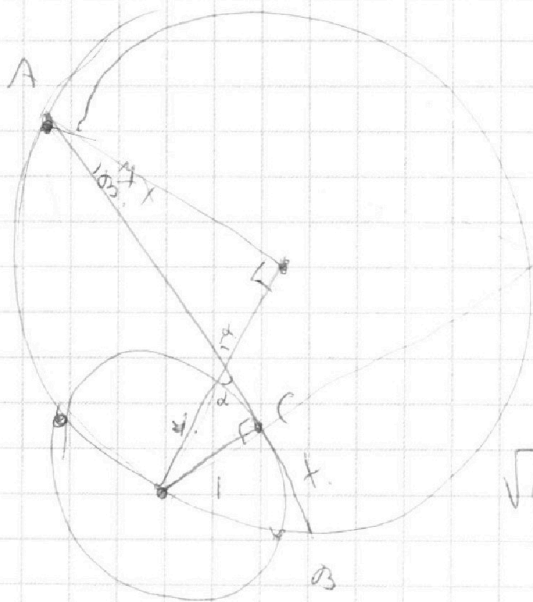
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.



$$x \ominus \ominus x^2 = y \cdot (y+2)$$

$$2t^2 + 22t + 85$$



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 4x + 1} = 2 - 4x$$

$$D_1 = 5^2 - 24 = 1$$

$$D_2 = 4^2 - 2 \cdot 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \left[ \frac{6}{4} \right]$$

$$2 \left( x - \frac{3}{2} \right) (x - 1)$$

$$2x - 2x - x + 3$$

$$\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$t$

$$t = x - 1 \quad \sqrt{(2t-1)(t+1)} - \sqrt{2(t+2)(t+3)+1} = 2 - 4(t+1)$$

$$2t - 1 = 2(t+2) - 1$$

$$\sqrt{(2t-1)t} - \sqrt{2(t^2 + 5t + 6) + 1}$$

25-24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

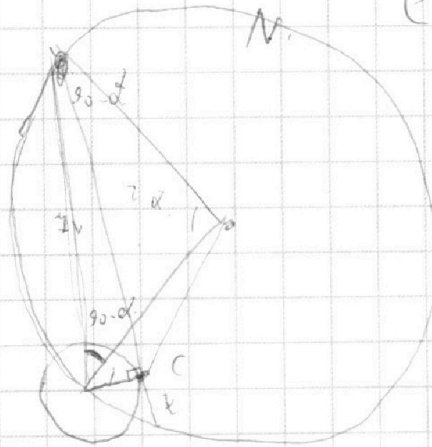
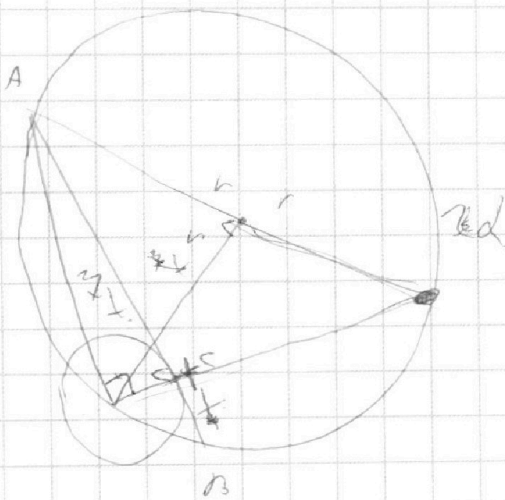
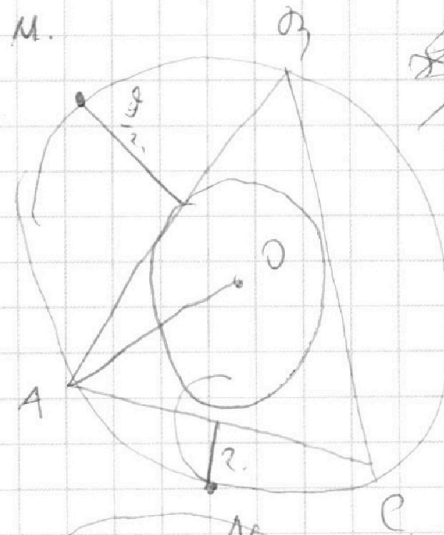
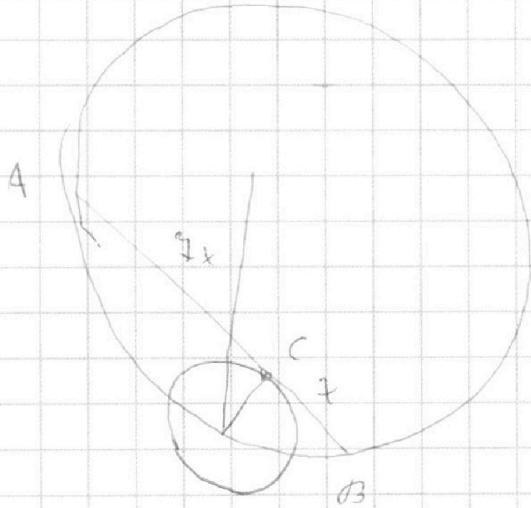
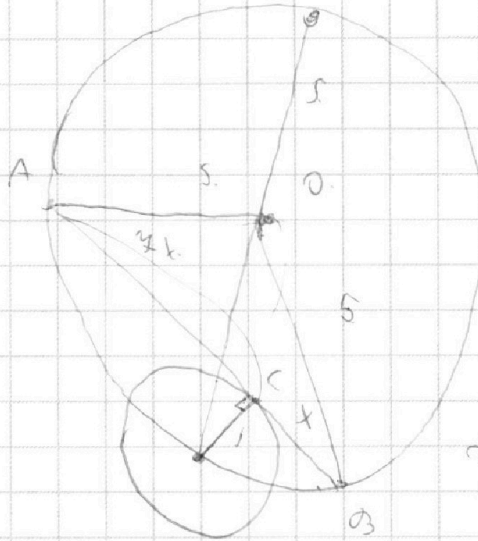
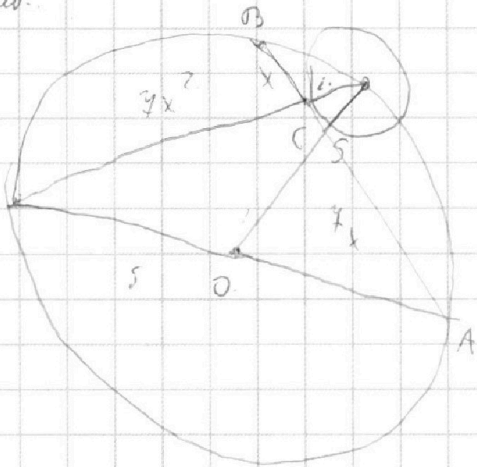
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

чернови.



Handwritten mathematical notes and calculations on the right side of the page:

- $2x$
- $5x+3$
- $2x-5x+3$
- $2x-1x$
- $2 \cdot \frac{9}{4} + 2 \cdot 2 + 1$
- $2-9 \cdot 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N° 4.

*черновик*

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x \quad | \quad \uparrow^2 \quad 2x^2 - 5x + 3 = t \quad 2 - 4x$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + (2 - 4x)^2 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 4x)^2$$

$$2 - 4x - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (2 - 4x)^2 \quad 2x^2 - 5x + 3 - t = 0$$

$$2 - 4x - 2\sqrt{(2x-3)(x-1)}\sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}} = (2 - 4x)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24x + 4}}{4}$$

*замена*

$$2 - 4x = t \Rightarrow x = \frac{2-t}{4}$$

$$2x - 3 = 2\left(\frac{2-t}{4}\right) - 3 = \frac{2t + 4 - 2(2t - 14)}{4} = \frac{2t - 14}{4}$$

$$x - 1 = \frac{2-t}{4} - 1 = \frac{t-5}{4}$$

$$t - 2\sqrt{\left(\frac{2t-14}{4}\right)\left(\frac{t-5}{4}\right)} = \sqrt{\frac{2t^2 + 22t + 85}{49}} = t$$

$$2 - 4x = t \Rightarrow \frac{2-t}{4} = x \quad \sqrt{t+a} - \sqrt{t} = a$$

$$2x - 3 = 2\left(\frac{2-t}{4}\right) - 3 = \frac{4-t-21}{4} = \frac{-14-t}{4}$$

$$x - 1 = \frac{2-t}{4} - 1 = \frac{-5-t}{4} \quad 2\sqrt{2+2+11} = 2 \cdot 4$$

$$2\left(\frac{2-t}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{2-t}{4}\right) + 1 = 2 \quad \frac{2(4-4t+t^2) + 14(2-t) + 49}{49} = \sqrt{49}$$

$$= \frac{8 - 8t + 2t^2 + 28 - 14t + 49}{49} = \frac{85 - 22t + 2t^2}{49} \quad \frac{9}{2} + \frac{6}{2} + t$$

$$t - 2\sqrt{\frac{(14+t)(5+t)}{49}} = \sqrt{\frac{85 - 22t + 2t^2}{49}} = t \quad \sqrt{t+a} - \sqrt{t} = a$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{t+a} = a$$

$$t - 2\sqrt{t}\sqrt{t+a} + t + a = a$$

$$t + t - a\sqrt{t+a} - \sqrt{t} = a$$

$$2t - 2\sqrt{t^2 + ta} = a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

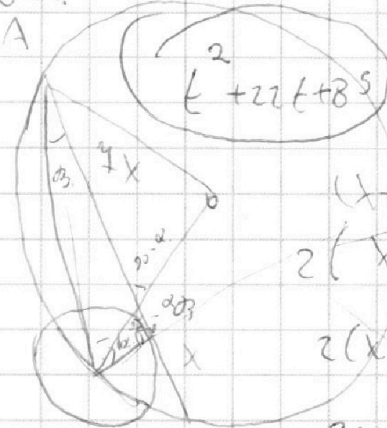
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



нормиров.



$$2x^2 - 5x + 3$$

A

$$(x+1)t = 2 - 4x$$

$$2\left(x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)$$

$$2(x^2 + x + 1)$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$\sqrt{2x^2}$$

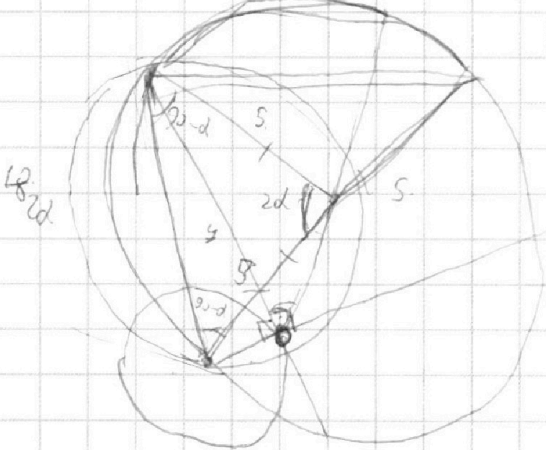
$$2t^2 - 22t + 85$$

2t

$$121 - 4 = 484$$

85

C  
180 - 2d



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2x^2 + 2x + 2$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 + 2x^2 \dots$$

$$2 - 4x = t$$

$$2x + 1 = t$$

$$-t = 4x - 2$$

$$(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) =$$

$$-\frac{t}{4} = x - \frac{2}{4}$$

$$= 4x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 + 10x$$

$$-\frac{2t}{4} = 2x - \frac{1}{2} \quad + 6x^2 + 6x + 3$$

$$4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3$$

$$4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 \quad \left[ \frac{2x^2 - 5x + 3}{x-1} \right]$$

$$4 - 6 - 2 + 1 + 3$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 3 \overline{) x - 1} \\ 2x^2 - 2x \phantom{+ 3} \\ \hline -3x + 3 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

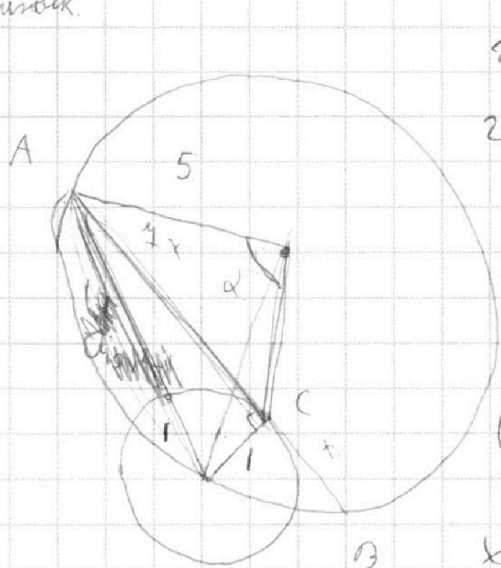
- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.



$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \left( \sqrt{t} - \sqrt{t+0} = a \right)$$

$$2 \left( x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \right)$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4}x + \frac{25}{16} - \frac{1}{16}$$

$$1 + \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{25}{16}}$$

$$\left( x - \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{1}{16}$$

$$x + \frac{1}{2} = t, \quad 1 - t - \frac{5}{4} = x - \frac{5}{4}$$

$$2x + 1 = 2t$$

~~$$(y+1)x = 49x^2$$~~

~~$$y+1 = 49x$$~~

~~$$y = 49x^2 - 1$$~~

~~$$49x^2 = 1 - 19x^2$$~~

$$\left( \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{2} \right)^2 = 1 + t^2$$

$$(4x)^2 = (1+y)y$$

$$49x^2 = y^2 + y$$

$$y^2 + y - 49x^2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 49 \cdot 4x^2 = 1 - 784x^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 784x^2}}{2}$$

$$4x \left( \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{2} \right)^2 = 4 + 4t^2$$

$$1 + 2\sqrt{1 - t^2} + 1 - t^2 = 4 + 4t^2$$

$$\sqrt{1 - t^2} = k$$

~~$$1 + 2k + k^2 = 4 + 4k^2$$~~

$$2\sqrt{1 - t^2} = 2 + 5t^2$$

$$t^2 = k$$

$$2\sqrt{1 - k} = 2 + 5k$$

$$k(14 + 25k) = 0$$

$$k = -$$

$$4(1 - k) = 4 + 10k + 25k^2$$

$$19k + 14k + 25k^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 продолжение

Надо найти  $\forall \theta$  все  $a$ , что удовлетворяют уравнению:

$$\begin{cases} 4 + 6400\theta - 252a^2\theta - 400\theta^2 = 0 & (1) \\ 16 - 400\theta^2 + 160a^2 = 0 & (2) - \sqrt{1} \end{cases}$$

(2) - (1):

$$12 - 640a\theta + 2660\theta^2 = 0$$

$$3 + 1600a\theta +$$

$$6 + 320a\theta + 133a^2 = 0$$

$$133a\theta = \frac{-133a^2 - 6}{-320a} \quad a \neq 0$$

Ответ. при  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  или  $a \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Заметим, что  $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 + 2 - 4x$ .

~~Пусть  $b = 2x^2 + 2x + 1$ ,  $a = 2 - 4x$ .~~

~~$\sqrt{b} - \sqrt{b-a} = a$ .~~

~~$\sqrt{a}$~~

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3 - (2 - 4x)} = (2 - 4x)$$

~~Пусть  $(2 - 4x) = a(x)$ ;  $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$~~

~~$\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x) - a(x)} = a(x)$ ;  $a(x)$  убывает при  $\forall x$ .~~

~~$f(x) \uparrow$  если  $x \in (\frac{5}{4}; +\infty)$ ;  $f(x) \downarrow$  если  $x \in (-\infty; -\frac{5}{4})$ .~~

~~$2x^2 - 5x \sqrt{f(x)} = f(x) - a(x)$~~

~~$\sqrt{f(x)}$  мон. при, если  $a$   $f(x)$ , поэтому  $f(x) \geq 0$~~

~~$\sqrt{f(x) - a(x)} \uparrow$  если  $f(x) - a(x) \uparrow \Rightarrow x \uparrow$~~

~~$\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x) - a(x)} = a(x)$ .~~

~~Пусть  $\frac{2-t}{4} = t$ ;  $2-t = 4x$ ;  $x = \frac{2-t}{4}$ .~~

~~$\sqrt{2(\frac{2-t}{4})^2 - 5(\frac{2-t}{4}) + 3} - \sqrt{2(\frac{2-t}{4})^2 - 5(\frac{2-t}{4}) + 3 - t} = t$~~

~~$t^2$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$\frac{a+b}{a^2-60b+b^2}$$

$$a+b : m$$
$$a^2-60b+b^2 : m$$

$$D = 36b^2 - 4b^2 = 32b^2$$

$$a : b$$

$$a^2$$
$$\frac{a}{b}$$

$$a+b : m$$

$$a^2 + 20b + b^2 - 80b$$

$$a^2 + b^2 - 60b : m$$

$$(a+b)^2 - 80b : m$$

$$a^2 - 20b + b^2 - 40b : n$$

$$a+b : m$$

$$(a-b)^2 - 40b : m$$

$$80b : m$$

$$a+b : m$$

$$m \leq 8, \quad a = 1, 2, 4, 8$$

$$\begin{cases} a+b : m \\ 80b : m \end{cases}$$

$$8 : m$$

$$\frac{5+5}{9-6 \cdot 3 \cdot 5+85} = \frac{8}{34-90} = \frac{8}{-56}$$