МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Рассмотрим $a^2b^2c^2$:

$a^2b^2c^2 \vdots a^2c^2 \vdots 7^{39\cdot 2} = 7^{78} \Rightarrow$ в $(abc)^2$ и 7 содержится хотя бы в 78-й степени

$a^2b^2c^2 = ab\cdot bc\cdot ac \vdots 2^{15}\cdot 2^{17}\cdot 2^{23} = 2^{55} \Rightarrow$ в $(abc)^2$ 2 содержится хотя бы в 55 степени. Т.к. $(abc)^2$ – квадрат натурального числа, 2 должно содержаться там в чётной степени, т.е. хотя бы в 56 $\Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{56}\cdot 7^{78}$, т.к. 2 и 7 взаимно простые $\Rightarrow abc \geq 2^{28}\cdot 7^{39}$.

Приведём пример, когда $abc = 2^{28}\cdot 7^{39}$:

$a = 2^{10}\cdot 7^{21}$
$b = 2^5$
$c = 2^{13}\cdot 7^{18}$

$ab = 2^{15}\cdot 7^{21} \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$
$ac = 2^{23}\cdot 7^{39} \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$
$bc = 2^{18}\cdot 7^{18} \vdots 2^{17}\cdot 7^{18}$
$abc = 2^{28}\cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{39}$

№2

~~Рассмотрим на что можно~~

Найдём наибольшее m, на которое можно сократить дробь, обратную данной (это будет равно то же m, что и в условии, т.к. дроби вида $\frac{x}{y}$ и $\frac{y}{x}$ сократимы на одни и те же числа)

$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b}$, тогда

$m = НОД(9ab, a+b)$. Если $m > 9$, то $НОД(ab, a+b) > 1$.

Покажем, что это невозможно.

$НОД(ab, a+b) = НОД(ab - b(a+b), a+b) = НОД(-b^2, a+b) =$
$= НОД(b^2, a+b)$

Пусть $НОД(b^2, a+b) > 1$, тогда p – общий простой делитель b^2 и $a+b \Rightarrow b^2 \vdots p \Rightarrow b \vdots p$ в силу простоты p. $(a+b) \vdots p$, $b \vdots p \Rightarrow a \vdots p \Rightarrow$ ~~$НОД(a, b) = p > 1$ –~~ ⚡, т.к. тогда дробь ⚡, т.к. в этом случае дробь $\frac{a}{b}$ сократима на $p \Rightarrow$
$\Rightarrow НОД(ab, a+b) = 1 \Rightarrow m \leq 9$. На $m = 9$ есть пример:

$a = 7$, $b = 11$.

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{18}{369}$, $18 \vdots 9$; $369 \vdots 9$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

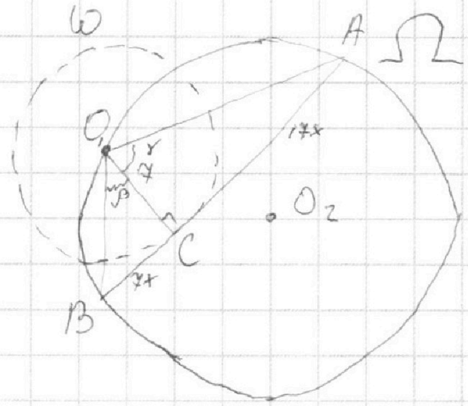
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

Дано!
$\omega(O_1; 7)$
$\Omega(O_2; 13)$
$A, B \in \Omega$
$O_1 \in \Omega$
$AB \cap \omega = C$
$AC : BC = 17 : 7$

$AB - ?$



$\angle O_1CA = 90^\circ$, т. к. AB - касательная

$\exists BC = 7x,\ AC = 17x.$

$\exists \angle BO_1A = \alpha,\ \angle CO_1B = \beta,\ \angle CO_1A = \gamma.$

По теор. синусов $\frac{AB}{\sin\alpha} = 2 \cdot R_\Omega = 26 = \frac{24x}{\sin\alpha}$

По теор. Пифагора:

$O_1A = \sqrt{49 + 289x^2}$

$O_1B = \sqrt{49 + 49x^2} = 7\sqrt{x^2+1}$

$\sin\beta = \frac{7x}{7\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\cos\beta = \frac{7}{7\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\sin\gamma =$

$= \frac{17x}{\sqrt{49+289x^2}}$, $\cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{49+289x^2}}$ $\Rightarrow \sin\alpha = \sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma +$

$+ \sin\gamma\cos\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49+289x^2}} + \frac{17x}{\sqrt{49+289x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{24x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49+289x^2}}$

$\frac{24x}{\sin\alpha} = 26 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{24x}{26} = \frac{24x}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{49+289x^2}}$

$\sqrt{(x^2+1)(289x^2+49)} = 26$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(x^2+1)(289x^2+49)=676$

$289x^4+338x^2+49=676$

$289x^4+338x^2-627=0$

Пусть $y=x^2$

$289y^2+338y-627=0$

$\frac{D}{4}=169^2+627\cdot 289=209764$

$\left[\begin{array}{l} y=\frac{-169+\sqrt{209764}}{289} \\ y=\frac{-169-\sqrt{209764}}{289}<0 \end{array}\right.$ — не подходит, т.к. y — квадрат длины отр.

$y=\frac{458-169}{289}=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ — не подходит, т.к. x — длина отрезка $\Rightarrow x=1 \Rightarrow AB=24x=24$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

$\rceil\ a = 3x^2-6x+2,\ b = 3x^2+3x+1,\ c = 1-9x$, тогда:

$a-b=c$.

Заметим, что $a^2-b^2 = 3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 =$

$= 1-9x = c$

$$\begin{cases} a-b=c \\ a^2-b^2=c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=c \\ c(a+b)=c \end{cases}$$ Пусть $c \neq 0$, случай $c=0$ рассмотрим отдельно:

$1-9x=0$

$x=\frac{1}{9}$ Подставим в нач. ур-е: $\sqrt{\frac{3}{81}-\frac{6}{9}+2} - \sqrt{\frac{3}{81}+\frac{3}{9}+1} =$

$= \sqrt{\frac{37}{27}} - \sqrt{\frac{37}{27}} = 0 = 1-9\cdot\frac{1}{9} \Rightarrow x=\frac{1}{9}$ корень.

Пусть $c \neq 0$:

$a+b=1$

$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1+2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 1 \quad (*)$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1+2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} \geq 3(2x^2-x+1) =$

$= 3\left(\left(x\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\right) \geq 3\cdot\frac{7}{8} > 1 \Rightarrow (*)$ не имеет корней

$\Rightarrow a+b=1$ не имеет корней $\Rightarrow x=\frac{1}{9}$ – ед. корень Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

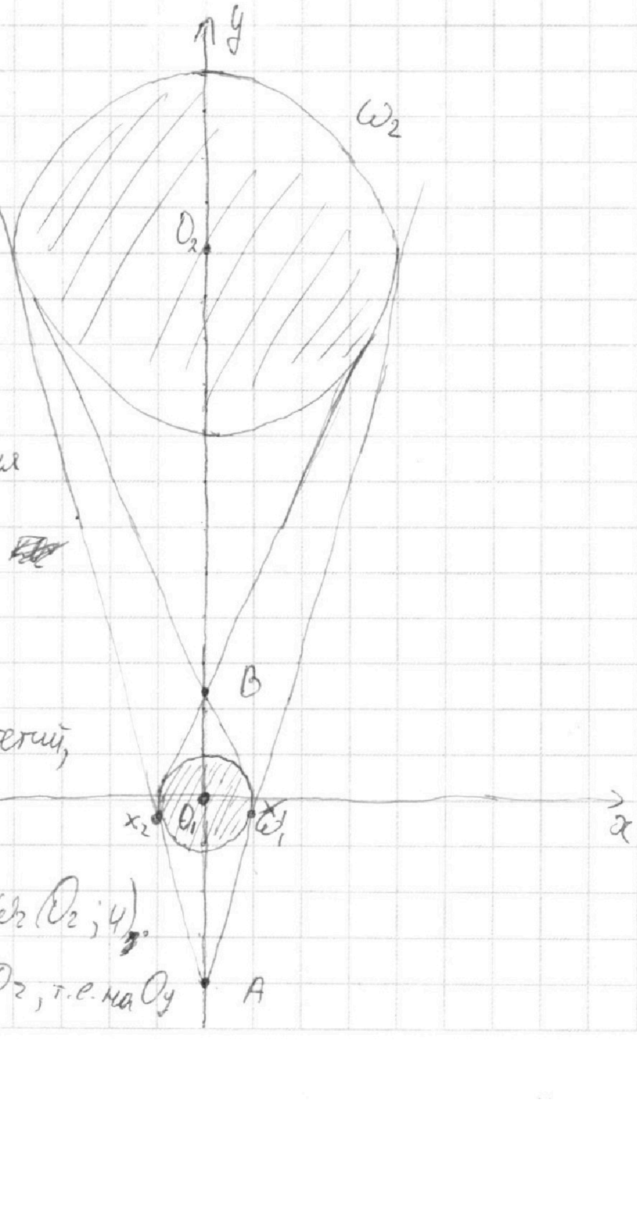
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

$$\begin{cases} x\cdot a + y - 8b = 0 \\ (x^2+y^2-1)\,(x^2+(y-12)^2-16) \le 0 \end{cases}$$

Изобразим решения второго неравенства на коорд. плоскости. Ур-я $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-12)^2=16$ задают окружности с радиусами 1 и 4 и центрами $(0;0)$ и $(0;12)$ соответственно $\Rightarrow$ эти окружности не пересекаются $\Rightarrow$ неравенством задаются 2 круга, ограниченные этими окружностями.



Ур-е $y=8b-ax$ задаёт прямую, при этом, она будет пересекать отмеченную зону в 2-х точках только если будет являться общей касательной.

Пусть A и B – точки пересечения ~~внутренн~~ внешних и внутр. касат. соотв. При этом A и B будут центрами гомотетий, переводящих один круг в другой, обозначим круги за $\omega_1(O_1;1)$, $\omega_2(O_2;4)$.

Поэтому A и B лежат на O_1O_2, т.е. на Oy

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Найдём координаты A и B. $\rceil$ $A(0; y_1)$, $B(0; y_2)$.

Из гомотетии:

$$\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{4} = \frac{-y_1}{-y_1+12} \qquad \frac{BO_1}{BO_2} = \frac{y_2}{12-y_2} = \frac{1}{4}$$

$$y_1 = -4 \qquad y_2 = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

Пусть $X_1(x;y)$ – точка касания ω_1 с внеш. кас., тогда $X_2(-x;y)$ – точка кас. со второй внеш. кас. из симметрии относит. O_y. ~~Положим $x, y > 0$ $x > 0$.~~

$\angle OX_1A = 90^\circ$ в силу касания $\Rightarrow \overrightarrow{OX_1} \cdot \overrightarrow{AX_1} = 0$

$\overrightarrow{OX_1}(x;y)$, $\overrightarrow{AX_1}(x; y+4)$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OX_1} = x^2 + y(y-4) = x^2 + y^2 + 4y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ т.к. } X \in \omega_1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y = 1 + 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{1-y^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \\ x = -\sqrt{1-y^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \end{array}\right.$$

Найдём уравнение (AX_1):

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{y+4}{-\frac{1}{4}+4}$$

$$y + 4 = \frac{15}{4}x \cdot \frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$y = x\sqrt{15} - 4$$

Аналогично, (AX_2): $y = -x\sqrt{15} - 4$. Таким образом,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мы ~~вы~~получили, что $a = \pm\sqrt{15}$, если $y = 8b - ax$ - внешняя касательная.

Рассмотрим случай, если $y = 8b - ax$ - внутр. общ. кас.
Пусть $X_3(x;y)$, $X_4(-x;y)$ - точки касания ω_1 с 2-мя внутр. кас. Тогда $\overrightarrow{BX_3}\cdot\overrightarrow{OX_3} = 0$.

$\overrightarrow{BX_3}(x; y-2,4)$, $\overrightarrow{OX_3}(x;y)$.

$\overrightarrow{BX_3}\cdot\overrightarrow{OX_3} = x^2 + y(y-2,4) = x^2+y^2-2,4y = 0$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow 1 - 2,4y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2,4} = \frac{5}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{1-\frac{25}{144}} = \frac{12}{13} \\ x = -\sqrt{1-\frac{25}{144}} = -\frac{12}{13} \end{array}\right. \Rightarrow X_3\left(\frac{12}{13}; \frac{5}{12}\right), X_4\left(-\frac{12}{13}; \frac{5}{12}\right)$.

~~(BX_4)~~:

(BX_3):

$\frac{x}{\frac{12}{13}} = \frac{y-2,4}{\frac{5}{12}-2,4}$

$y - 2,4 = \frac{-1547}{720}x$

$y = \frac{-1547}{720}x + 2,4$

Аналогично, (BX_4): $y = \frac{1547}{720}x + 2,4 \Rightarrow$ Если $y = 8b - ax$ внутренняя общая касательная, то $a = \pm\frac{1547}{720}$.

В итоге имеем: $\left[\begin{array}{l} a = \sqrt{15} \\ a = -\sqrt{15} \\ a = \frac{1547}{720} \\ a = -\frac{1547}{720} \end{array}\right.$

Ответ: $\sqrt{15}$; $-\sqrt{15}$; $\frac{1547}{720}$; $-\frac{1547}{720}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

Дано:

$\triangle ABC$ вписан в ω

M - сер. $\smile AB$

N - сер. $\smile AC$

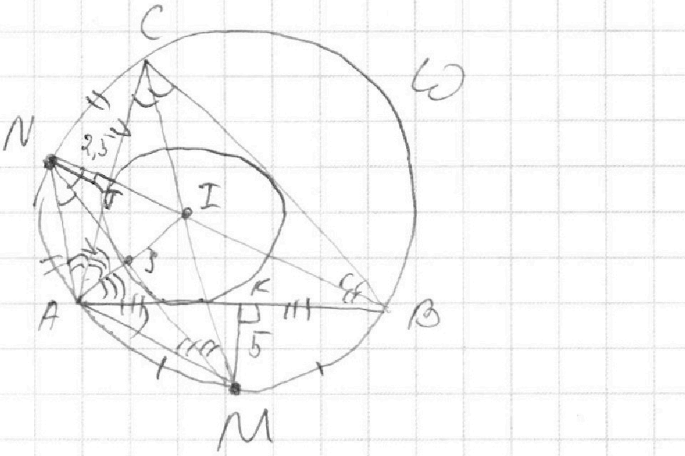
$T \mid NT \perp AC, T \in AC$

$NT = 2,5$

$K \mid MK \perp AB, K \in AB$

$MK = 5$. I - инцентр

AI - ?



CM, BN - биссектрисы, т.к. M, N - серед. дуг. Также, M лежит на серпере к AB т.к. M - середина $\smile AB$ $\Rightarrow AK = KB$, аналогично $CT = AT$.

$I \in NB$, $I \in CM$, т.к. I - точка пересеч. биссектрис. По лемме о трезубце:

$MI = AM$, $NI = AN$. ~~$\exists AB = a$, $AC = b$, тогда $AK = \frac{a}{2}$, $AT = \frac{b}{2} \Rightarrow AM = MI = \sqrt{25 + \frac{a^2}{4}}$, $AN = NI = \sqrt{6,25 + \frac{b^2}{4}}$.~~

MN - сер/пер. к AI $\Rightarrow \angle AMN = \angle NMI = \angle ABN = \angle NBC = \beta$, $\angle ANM = \angle INM = \angle ACM = \angle BCM = \alpha$. $AM = \frac{5}{\sin\alpha}$, $AN = \frac{2,5}{\sin\beta}$, $\exists MN \cap AI = S$

$AS = AM \cdot \sin\beta = \frac{5 \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = IS \Rightarrow AI = 10 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 10 \cdot \frac{5}{2,5} = 20$ Отв: 20

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$, $bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{18}$, $ac \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$

$ab \geq 2^{15}\cdot 7^{11}$ $a = 2^{10}\cdot 7^{6}$ $ab = k\cdot 2^{15}\cdot 7^{11}$

$bc \geq 2^{17}\cdot 7^{18}$ $b = 2^{5}\cdot 7^{5}$ $ac = n\cdot 2^{23}\cdot 7^{39}$

$ac \geq 2^{23}\cdot 7^{39}$ $c = 2^{13}\cdot 7^{2}$ $bc = m\cdot 2^{17}\cdot 7^{18}$ $a+b=1$

$a-b=c$

$(a-b)(a+b)=c$

$(abc)^2$ $ab^2c = b^2\cdot n\cdot 2^{23}\cdot 7^{39} =$

$abc \geq 2^{23}\cdot 7^{34}$

$b \leq 2^5\cdot 7^5$ $= 2^{22}\cdot 7^{29}\cdot mk$

$b \geq \frac{2^5\cdot 7^{11}}{a}$ $a \geq$

$b^2\cdot n = \frac{mk}{2\cdot 7^{10}}$

1) $\exists a \leq 2^{8}\cdot 7$

$a = 2^{10}\cdot 7^{6}$ $c =$ $b^2 = \frac{mk}{2\cdot 7^{10}\cdot n}$

$b = 2^5\cdot 7^5$ $b = 1$ $(abc)^2 = mnk\cdot 2^{55}\cdot 7^{68}$

$ac \geq 2^{23}\cdot 7^{39}$ $ab \geq b$ $(abc)^2 \geq 2^{55}\cdot 7^{78}$

$a \geq \frac{2^{23}\cdot 7^{38}}{c}$

$c\cdot ab \geq 2^{23}\cdot 7^{39}\cdot b$ $(abc)^2 = 2^{56}\cdot 7^{78}$

$abc \geq 2^{23}\cdot 7^{39}\cdot b$ $abc = 2^{28}\cdot 7^{39}$

$c \geq 2^{17}\cdot 7^{18}$ $abc^2 \geq 2^{40}$ $abc^2 \leq 2^{40}\cdot 7^{57} \geq 2^{15}\cdot 7^{11}\cdot c$

$a \geq 2^{15}\cdot 7^{11}$ a $(a,b) = 1$

$a^2b^2c^2 \geq 2^{46}\cdot 7^{78}\cdot b^2$ $a^2 \leq ab$

$abc \geq 2^{23}\cdot 7^{37}$ $b \geq 2^{23}\cdot 7^{34}$ $3x^2+3x = (x\sqrt{3})^2 +$

$+2\cdot\sqrt{3}\cdot x\cdot t$

$\sqrt{3x^2+3x+1} = \sqrt{3x^2+2\sqrt{3}x+1+(3-2\sqrt{3})x}$ $3 = 2\cdot\sqrt{3}\cdot t$

$t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x^2 - \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{8}$

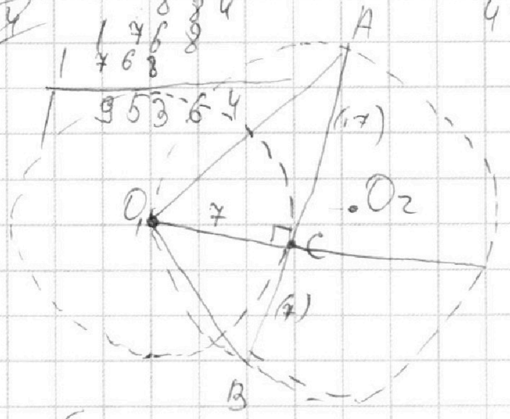
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$7x \cdot 17x$ $119x^2$

$4 \cdot 49 = 196$



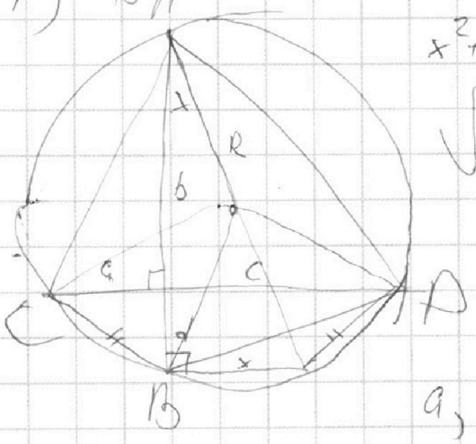
$(17x^2+7)^2 = 196$

$576x^2 +$

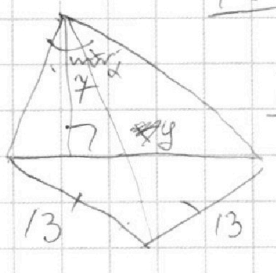
$x^2 + (b+d)^2 =$

$\sqrt{49+289x^2}$

$7^2 + 17^2$



$\cos 2x$



$\frac{a}{\sin y} = 13$

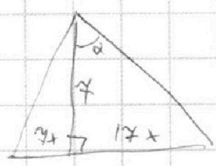
$a, R, \frac{b}{d}$

$b + d = 2R \cdot \sin\alpha$

$a \cdot c = bd$

$2 \cdot 169 - 2 \cdot 169 \cdot \cos 2y$

$\sin\alpha = \frac{17x}{\sqrt{49+289}}$



$17^2 + 7^2 = 2 \cdot 17 \cdot 7$

$10^2 = 0$

119

209764

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$3x^2+3x+1=\left(x\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+0,25 \geq \cancel{\frac{3}{4}+0,25}$

$x=-\frac{1}{2}$

$\cancel{\sqrt{3x^2}}$ $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$

$3x^2+3x^2-3x+3+2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}=1$

$3(2x^2-x+1)$

$2x^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot x+1=\left(x\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2+\frac{7}{8}$

$4,\ 7$ $\frac{9ab}{a+b}$ НОД $(ab, a+b)=$

$=$

$\frac{4+\cancel{7}9}{16-7\cdot\cancel{28}4+\cancel{49}}\ 81=\frac{11}{\cancel{48}\ 131}$ $\frac{a+b}{9ab}=\frac{1}{9b}+\frac{1}{9a}$

$49\ \cancel{3}\ \cancel{127}\ \cancel{47}-16=131$

$(a+b)(a+b+1)-1=\frac{15}{16-28\cdot 11+121}$

$ab=k(a+b)$

13

$\cancel{127}$ $676-49=627$

$ab=ka+kb$ $\cancel{28}$ $137-308$

$\frac{18}{\cancel{49}-7\cdot 7\cdot 11+\cancel{7}121}$ $308-137=171$

$ab-ak=kb$ $170-539$

$ab-b(a+b)=$

$a(b-k)=kb$ $539-170=369$

$=-b^2,\ a+b$

$\cancel{a=\frac{kb}{b-k}}$ $\frac{a}{b}=\frac{k}{b-k}$

$b^2,\ a+b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2(x_1 - x_2) + y_1 - y_2 = 14$

$y = 26$

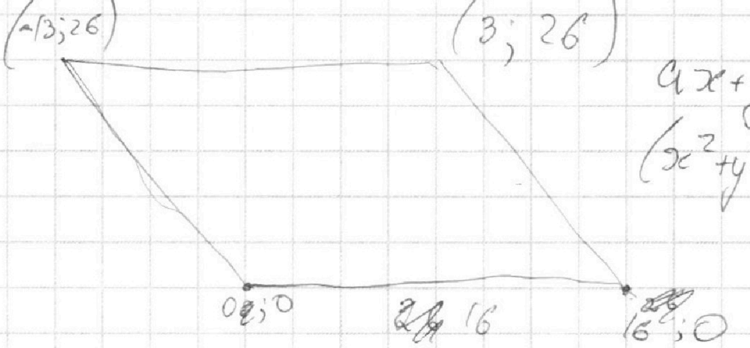
$y = 0$

$\frac{x-16}{3-16} = \frac{y}{26}$

$-y = 2x - 32$

$y = 32 - 2x$

$26x - 16 \cdot 26 = -13y$



$ax + y - 8b = 0$

$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-1)$

$\frac{x}{-13} = \frac{y}{26}$

B

$y = -2x$

A(7;3)

$2x_1 + y_1 = 14 + 3 = 17$

$y = -2x + 32$

$2x_2 + y_2 = B$

$$\begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq -2x + 32 \\ y \leq 26 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$2x_1 + y_1 - (2x_2 + y_2) = 14$

$2x_1 + y_1 \geq 0 \quad -(2x_2 + y_2) \leq 0$

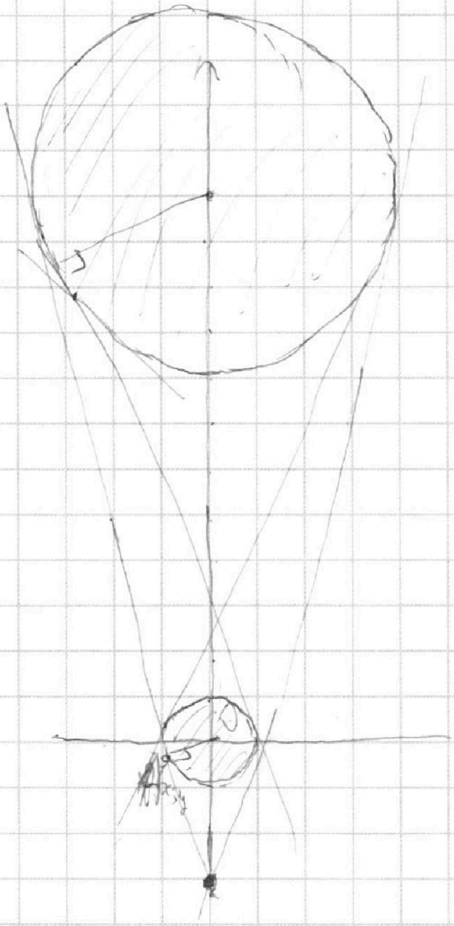
VI

-32

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\vec{OA}\,(x;y)$

$y=$

$$\frac{5}{12}-\frac{12}{5}=\frac{25-144}{60}=\frac{-119}{60}\cdot\frac{13}{12}$$

720

$$\begin{array}{r} \times\, 119 \\ 13 \\ \hline 357 \\ 119 \\ \hline 1547 \end{array}$$