



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

Рассмотрим  $a^2 b^2 c^2$ :

$$a^2 b^2 c^2; a^2 c^2: 7^{35 \cdot 2} = 7^{78} \Rightarrow \sqrt{(abc)^2} \text{ и } 7 \text{ содержится}$$

хотя бы в  $78$ -й степени

$$a^2 b^2 c^2 = ab \cdot bc \cdot ac : 2^{15} \cdot 2^{17} \cdot 2^{23} = 2^{55} \Rightarrow \sqrt{(abc)^2} \text{ 2 содержится}$$

са хотя бы в  $55$  степени, т.к.  $(abc)^2$  - квадрат натурального

числа, 2 должно содержаться там в четной степе-

ни, т.е. хотя бы в  $56 \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{56} \cdot 7^{78}$ , т.к. 24 7 взаимно

$$\text{просты} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Приведем пример, когда  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ :

$$a = 2^{10} \cdot 7^{21}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{21} = 2^{15} \cdot 7^{21}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{18} = 2^{18} \cdot 7^{18}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

Рассмотрим, на что можно

Найдем наибольшее  $m$ , на которое можно сократить дробь, обратную данной. (это будет равно то же  $m$ , что и в условии, т.к. дроби вида  $\frac{x}{y}$  и  $\frac{y}{x}$  сократимы на  $xy$  и тем же число)

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b}, \text{ тогда}$$

$m = \text{НОД}(9ab, a+b)$ . Если  $m > 9$ , то  $\text{НОД}(ab, a+b) > 1$ .

Покажем, что это невозможно.

$$\begin{aligned} \text{НОД}(ab, a+b) &= \text{НОД}(ab - b(a+b), a+b) = \text{НОД}(-b^2, a+b) \\ &= \text{НОД}(b^2, a+b) \end{aligned}$$

Пусть  $\text{НОД}(b^2, a+b) > 1$ , тогда  $p$  - общий простой делитель  $b^2$  и  $a+b \Rightarrow b^2 : p \Rightarrow b : p$  в силу простоты  $p$ .  $(a+b) : p$ ,  $b : p \Rightarrow a : p \Rightarrow \text{НОД}(ab) = p > 1$ , т.к. тогда дроби

$\frac{a}{b}$ , т.к. в этом случае дробь  $\frac{a}{b}$  сократима на  $p \Rightarrow \Rightarrow \text{НОД}(ab, a+b) = 1 \Rightarrow m \leq 9$ . На  $m=9$  есть пример:

$$a=7, b=11.$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{18}{369} \rightarrow 18 : 9; 369 : 9$$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

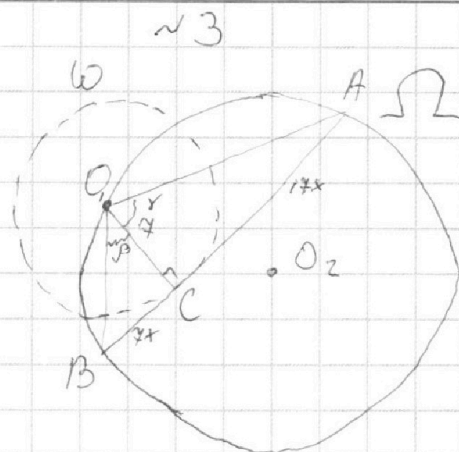
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  
 $\omega(O_1; 7)$   
 $\Omega(O_2; 13)$   
 $AB \in \Omega$   
 $O_1 \in \Omega$   
 $AB \cap \omega = C$

$AC : BC = 17 : 7$   
 $AB = ?$



$\angle O_1CA = 90^\circ$ , т.к.  $AB$  - касательная

$BC = 7x, AC = 17x$ .

$\angle BO_1A = \alpha, \angle CO_1B = \beta, \angle CO_1A = \gamma$ .

По теор. синусов  $\frac{AB}{\sin \alpha} = 2 \cdot R_\Omega = 26 = \frac{24x}{\sin \alpha}$

По теор. Пифагора:

$$O_1A = \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$O_1B = \sqrt{49 + 49x^2} = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

$$\sin \beta = \frac{7x}{7\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \cos \beta = \frac{7}{7\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \sin \gamma = \frac{17x}{\sqrt{49+289x^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{7}{\sqrt{49+289x^2}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49+289x^2}} + \frac{17x}{\sqrt{49+289x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{24x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49+289x^2}}$$

$$\frac{24x}{\sin \alpha} = 26 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{24x}{26} = \frac{24x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49+289x^2}}$$

$$\sqrt{(x^2+1)(289x^2+49)} = 26$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(x^2+1)(289x^2+49) = 676$$

$$289x^4 + 338x^2 + 49 = 676$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$\text{Пусть } y = x^2$$

$$289y^2 + 338y - 627 = 0$$

$$D = 169^2 + 627 \cdot 289 = 209764$$

$$y = \frac{-169 + \sqrt{209764}}{289}$$

$$y = \frac{-169 - \sqrt{209764}}{289} < 0 \quad \text{— не, т.к. } y \text{ — квадрат длины отрезка}$$

$$y = \frac{458 - 169}{289} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{— не, т.к. } x \text{ —}$$

$$\text{длина отрезка} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 24x = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Пусть  $a = 3x^2 - 6x + 2$ ,  $b = 3x^2 + 3x + 1$ ,  $c = 1 - 9x$ , тогда:

$$a - b = c$$

Заметим, что  $a^2 - b^2 = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 =$

$$= 1 - 9x = c$$

$$\begin{cases} a - b = c \\ a^2 - b^2 = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = c \\ c(a + b) = c \end{cases}$$

Пусть  $c \neq 0$ , случай  $c = 0$  рассмотрим отдельно:

$$1 - 9x = 0$$

$x = \frac{1}{9}$  Подставим в нач. ур-е:  $\sqrt{\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2} - \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{3}{9} + 1} =$   
 $= \sqrt{\frac{37}{27}} - \sqrt{\frac{37}{27}} = 0 = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$  корень.

Пусть  $c \neq 0$ :

$$a + b = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1 \quad (*)$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} \geq 3(2x^2 - x + 1) =$$

$$= 3\left(\left(x\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}\right) \geq 3 \cdot \frac{7}{8} > 1 \Rightarrow (*) \text{ не имеет корней}$$

$\Rightarrow a + b = 1$  не имеет корней  $\Rightarrow x = \frac{1}{9}$  - ед. корень Ответ:  $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$$\begin{cases} x \cdot a + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) (x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

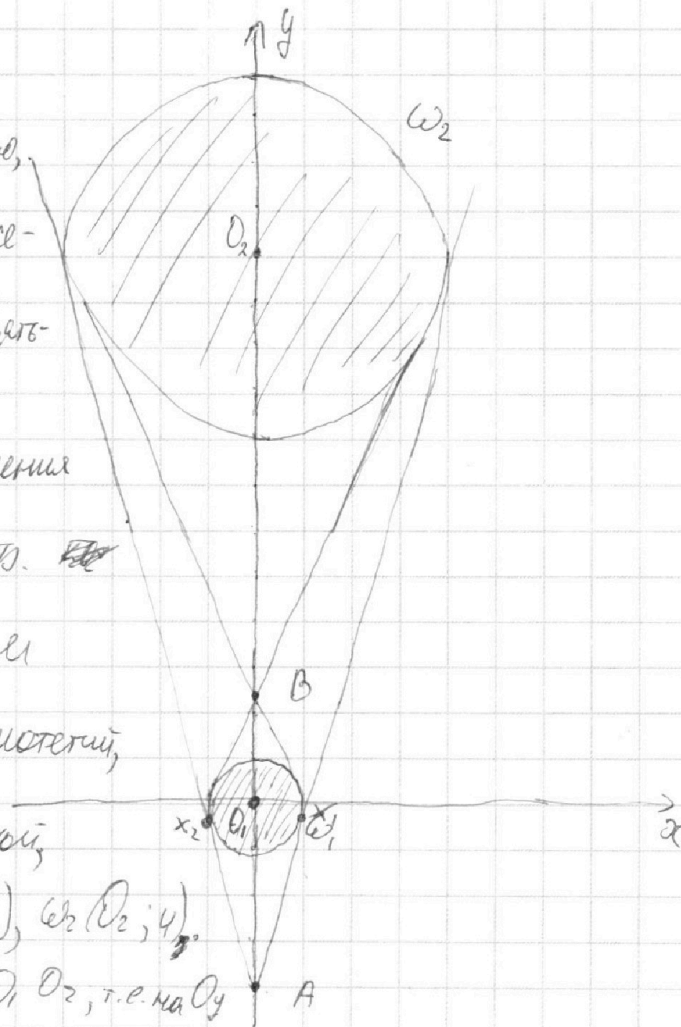
Изобразим <sup>решения</sup> стороны неравенства на коорд. плоскости. Пр-я  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + (y-12)^2 = 16$  задают окружности с радиусами 1 и 4 и центрами  $(0; 0)$  и  $(0; 12)$  соответственно  $\Rightarrow$  эти окружности не пересекаются  $\Rightarrow$  неравенством задаются 2 круга, ограниченные этими окружностями.

Пр-я  $y = 8b - ax$  задаёт прямую, при этом, она будет пересекать отмеченную зону в 2-х точках только если будет являться общей касательной.

Пусть  $A$  и  $B$  - точки пересечения ~~внутренней~~ внешних и внутр. касат. соотв. При этом

$A$  и  $B$  будут центрами гомотетий, переводящих один круг в другой, обозначим круги за  $\omega_1(O_1; 1)$ ,  $\omega_2(O_2; 4)$ .

Поэтому  $A$  и  $B$  лежат на  $O_1 O_2$ , т.е. на  $Oy$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдём координаты  $A$  и  $B$ .  $\rightarrow A(0; y_1), B(0; y_2)$ .

Из геометрии:

$$\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{4} = \frac{-y_1}{-y_1 + 12}$$

$$\frac{BO_1}{BO_2} = \frac{y_2}{12 - y_2} = \frac{1}{4}$$

$$y_1 = -4$$

$$y_2 = \frac{12}{5} = 2,4$$

Пусть  $X_1(x; y)$  - точка касания  $\omega_1$  с внешней кас., тогда  
 $X_2(-x; y)$  - точка кас. со второй внешней кас. из симметрии

относительно  $Oy$ . ~~Решим систему  $x > 0$ .~~

$\angle OAX_1 = 90^\circ$  в силу касания  $\Rightarrow \vec{OX}_1 \cdot \vec{AO} = 0$

$$\vec{OX}_1(x; y), \vec{AO}(x; y+4)$$

$$\vec{AO} \cdot \vec{OX}_1 = x^2 + y^2 + y(y+4) = x^2 + y^2 + 4y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ т.к. } X \in \omega_1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y = 1 + 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt{1 - y^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$x = -\sqrt{1 - y^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Найдём уравнение ~~( $Ox$ )~~  $(AX_1)$ :

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{y+4}{-\frac{1}{4}+4}$$

$$y+4 = \frac{15}{4} x \cdot \frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$y = x\sqrt{15} - 4$$

Аналогично,  $(AX_2)$ :  $y = -x\sqrt{15} - 4$ . Таким образом



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



мы получили, что  $a = \pm \sqrt{15}$ , если  $y = 8b - ax$  - внешняя касательная.

Рассмотрим случай, если  $y = 8b - ax$  - внутр. общ. кас.

Пусть  $X_3(x; y)$ ,  $X_4(-x; y)$  - точки касания  $\omega$ , с

2-мя внутр. кас. Тогда  $\vec{BX}_3 \cdot \vec{OX}_3 = 0$ .

$$\vec{BX}_3(x; y - 2,4), \vec{OX}_3(x; y)$$

$$\vec{BX}_3 \cdot \vec{OX}_3 = x^2 + y(y - 2,4) = x^2 + y^2 - 2,4y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 1 - 2,4y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2,4} = \frac{5}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \frac{12}{13} \\ x = -\sqrt{1 - \frac{25}{144}} = -\frac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow X_3\left(\frac{12}{13}; \frac{5}{12}\right), X_4\left(-\frac{12}{13}; \frac{5}{12}\right)$$

$(BX_3)$ :

$$\frac{x}{13} = \frac{y - 2,4}{12}$$

$$y - 2,4 = \frac{-1547}{720}x$$

$$y = \frac{-1547}{720}x + 2,4$$

Аналогично,  $(BX_4)$ :  $y = \frac{1547}{720}x + 2,4 \Rightarrow$  Если  $y = 8b - ax$

внутренняя общая касательная, то  $a = \pm \frac{1547}{720}$ .

В итоге имеем:

$$\begin{cases} a = \sqrt{15} \\ a = -\sqrt{15} \\ a = \frac{1547}{720} \\ a = -\frac{1547}{720} \end{cases}$$

Ответ:  $\sqrt{15}; -\sqrt{15}; \frac{1547}{720}; -\frac{1547}{720}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 7

Дано:

$\triangle ABC$  вписан в  $\omega$

$M$  - сев.  $\cup AB$

$N$  - сев.  $\cup AC$

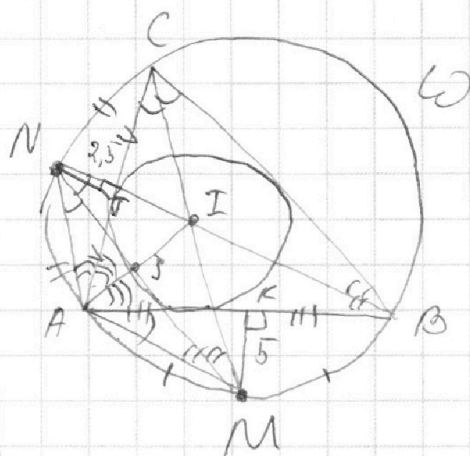
$IT \perp NT \perp AC, T \in AC$

$NT = 2,5$

$K \perp MK \perp AB, K \in AB$

$MK = 5, I$  - центр

$AI = ?$



$CM, BN$  - биссектрисы, т.к.

$M, N$  - сев. дуг. Также,

$M$  лежит на окружности  $k$

$AB \Rightarrow AK = KB$ , аналогично

$CT = AT$

$I \in NB, I \in CM$ , т.к.  $I$  - точка пересеч. биссектрис. По линии отрезок:

$MI = AM, NI = AN. \Rightarrow AB = a, AC = b$ , тогда  $AK = \frac{a}{2}$

$AT = \frac{b}{2} \Rightarrow AM = MI = \sqrt{2,5 + \frac{a^2}{4}}$ ,  $AN = NI = \sqrt{2,5 + \frac{b^2}{4}}$

$= \sqrt{6,25 + \frac{b^2}{4}}$

$MN$  - сев. пер.  $\angle AI = \Rightarrow \angle AMN = \angle NMI = \angle AON$

$= \angle NBC = \beta, \angle ANM = \angle INM = \angle ACM = \angle BCB$

$= \angle BCM = \alpha. AM = 5\beta, AN = 2,5 \Rightarrow MN \perp AI$

$AS = AM \cdot \sin \beta = \frac{5 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = IS \Rightarrow AI = 10 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 10 \cdot \frac{5}{2,5} = 20$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$ ,  $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$ ,  $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$

$ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}$   
 $bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18}$   
 $ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{10} \cdot 7^2$   
 $b = 2^{25} \cdot 7^{148}$   
 $c = 2^{13} \cdot 7^{148}$

$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$   
 $ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$   
 $bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$

$a+b=1$   
 $a-b=c$   
 $(a-b)(a+b)=c$   
 $(abc)^2 = b^2 \cdot k \cdot n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} =$

$abc \geq 2^{23} \cdot 7^{34}$   
 $b \geq \frac{2^{23} \cdot 7^{34}}{a}$   
 $b \leq 2^{22} \cdot 7^{29} \cdot mk$   
 $a \geq$   
 $b^2 \cdot n = \frac{mk}{2 \cdot 7^{10}}$

$1) \} a \leq 2 \cdot 7^5$   
 $a = 2^{10} \cdot 7^5$   
 $b = 2^5 \cdot 7^5$   
 $c =$   
 $b = 1$

$(abc)^2 = mnk \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$   
 $ab \geq b (abc)^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{78}$   
 $a \geq \frac{2^{23} \cdot 7^{38}}{c}$   
 $(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{78}$   
 $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

$abc^2 \geq 2^{40}$   
 $abc^2 \geq 2^{40} \cdot 7^{57} \geq 2^{15} \cdot 7^{60}$

$a \geq 2^{15} \cdot 7^{60}$   
 $abc^2 \geq 2^{46} \cdot 7^{98} \cdot b^2$   
 $abc \geq 2^{23} \cdot 7^{34} \cdot b \geq 2^{23} \cdot 7^{34}$

$\sqrt{3x^2 + 32x + 1} = \sqrt{3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 + (3-2\sqrt{3})x}$   
 $2x^2 - (2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})x + \frac{1}{8}$

$(a,b) \geq 1$   
 $3x^2 + 32x = (x\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x + t$   
 $3 = 2 \cdot \sqrt{3} + t$   
 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

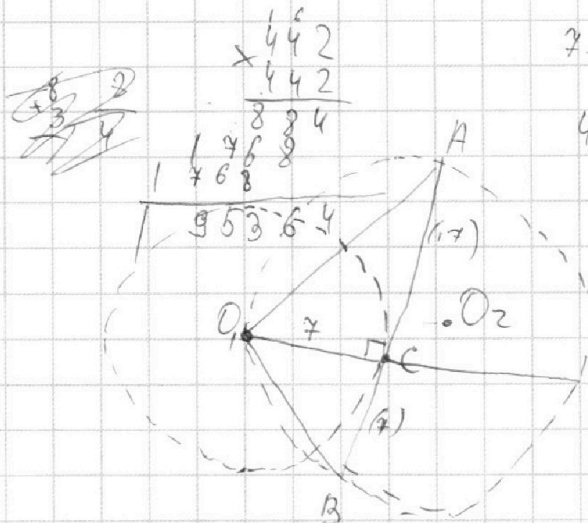
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 468 \\ \times 468 \\ \hline 2808 \\ 2808 \\ \hline 21888 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 13 \\ 32 \\ \hline 438 \\ \times 438 \\ \hline 1314 \\ 1752 \\ \hline 19184 \end{array}$$



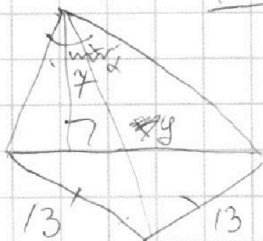
$$7x \cdot 17x \quad 19x^2$$

$$4 \cdot 49 = 196$$

$$(224x) \cdot 19x^2 + (17x^2 + 7)^2 = 1964$$

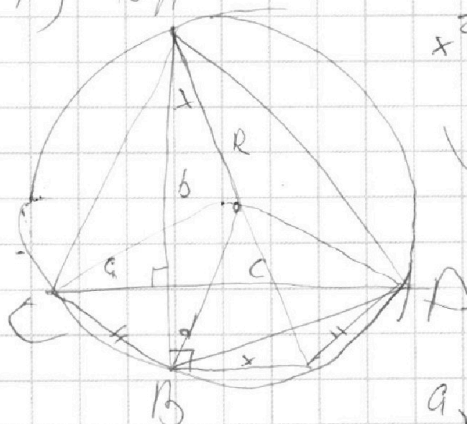
$$596x^2 + \begin{array}{r} 452 \\ \times 452 \\ \hline 2904 \\ 2352 \\ \hline 1808 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 452 \\ \times 452 \\ \hline 2260 \\ 2260 \\ \hline 204304 \\ 2260 \\ \hline 204304 \\ 2260 \\ \hline 1832 \end{array}$$



$$\frac{304}{9} = 13$$

$$7 \cdot 19x$$



$$x^2 + (b+d)^2 = 49 + 19x^2$$

$$7^2 + 17x^2$$

$$b+d = 2R \cdot \sin \alpha$$

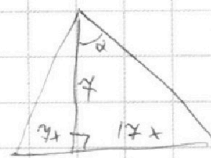
$$ac = bd$$

$$209764 \quad 2 \cdot 169 - 2 \cdot 169 \cdot \cos 2\gamma$$

$$17^2 + 7^2 = 2 \cdot 17 \cdot 7$$

$$10^2 = 0$$

$$119$$



$$\sin \alpha = \frac{7}{17x}$$

$$\sqrt{49 + 2297}$$

$$21$$

$$627$$

$$289$$

$$209764$$

$$\begin{array}{r} 33812 \\ \times 2 \\ \hline 67624 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1014 \\ 169 \\ \hline 28561 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 + 3x + 1 = \left(x\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0,25 \geq \frac{3}{4} + 0,25$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{3x^2} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 + 3x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1$$

$$3(2x^2 - x + 1)$$

$$2x^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + 1 = \left(x\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{x}{8}$$

$$4, 7$$

$$\frac{9ab}{a+b}$$

$$\text{НОС}^A(a, a+b) =$$

$$\frac{4 + 29}{16 - 7 \cdot 29 + 29} = \frac{11}{13}$$

$$\frac{a+b}{9ab} = \frac{1}{9b} + \frac{1}{9a}$$

$$49 - 14 \cdot 7 - 16 = 13$$

$$ab = k(a+b)$$

$$(a+b)(a+b+1) - 1 =$$

$$\frac{15}{16 - 28 \cdot 11 + 121}$$

$$ab = ka + kb$$

$$\frac{18}{49 - 7 \cdot 7 \cdot 11 + 121}$$

$$\begin{array}{r} 676 \\ - 49 \\ \hline 137 - 308627 \\ - 309 \\ \hline 137 \\ \hline 171 \end{array}$$

$$ab - ak = kb \quad 170 - 539$$

$$a(b-k) = kb$$

$$\frac{539}{170} = \frac{319}{319}$$

$$ab - b(a+b) =$$

$$= -b^2, a+b$$

$$\frac{a}{b-k} = \frac{kb}{b-k} \quad \frac{a}{b} = \frac{k}{b-k}$$

$$b^2, a+b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2(x_1 - x_2) + y_1 - y_2 = 14$$

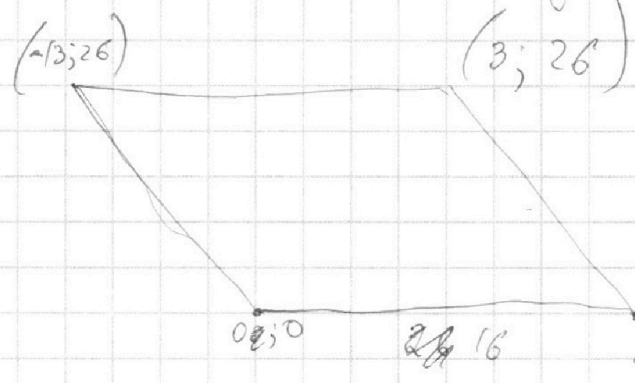


$$\frac{x-16}{3-16} = \frac{y-26}{26-26}$$

$$\begin{aligned} y &= 26 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -y &= 20x - 32 \\ y &= 32 - 20x \end{aligned}$$

$$26x - 16 \cdot 26 = -13y$$



$$\begin{aligned} ax + y - 8b &= 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2) & \end{aligned}$$

$$\frac{x}{-13} = \frac{y}{-26}$$

$B_2$

$$y = -2x$$

$$2x_1 + y_1 = 14 \quad 3 = 0_{17}$$

$$y = -2x + 32$$

$$2x_2 + y_2 = 3$$

$$\begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq -2x + 32 \\ y \leq 26 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$A(7; 3)$

$(3; 2)$

$$2x_1 + y_1 - (2x_2 + y_2) = 14$$

$$2x_1 + y_1 \geq 0 \quad -\underbrace{(2x_2 + y_2)}_{-32} \leq 0$$

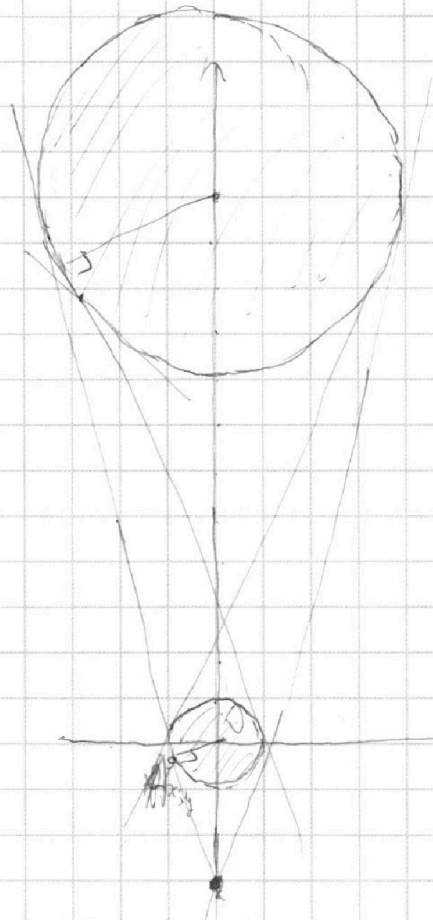
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1    2    3    4    5    6    7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~AO~~  
 $\vec{OA} = (x, y)$

$\frac{5}{12} =$

$$\frac{\sqrt{5}}{12} - \frac{12}{5} = \frac{25 - 144}{60} = \frac{-119}{60} \cdot \frac{13}{12}$$

720

$$\begin{array}{r} 119 \\ \times 13 \\ \hline 357 \\ 1190 \\ \hline 1547 \end{array}$$