



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.

$abc - ?$

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow b < a < c$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a: 2 \text{ и } a: 7$$

$$b: 2 \text{ и } b: 7$$

$$c: 2 \text{ и } c: 7$$

Также замечаем, что:

$$\begin{cases} abc^2: 2^{32} \cdot 7^{29} \\ abc^2: 2^{40} \cdot 7^{58} \\ a^2bc: 2^{38} \cdot 7^{50} \end{cases} \Rightarrow a^4 \cdot b^4 \cdot c^4: 2^{32+40+38} \cdot 7^{50+58+29}$$

$$a^4 \cdot b^4 \cdot c^4: 2^{110} \cdot 7^{137}$$

$$a^4 \cdot b^4 \cdot c^4: 2^{110} \cdot 7^{137}$$

Т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  $abc \geq 0$

Найдём целую часть с округлением в большую сторону от делителя наибольшего показателя на 4

$$\begin{array}{r|l} 110 & 4 \\ 8 & 27,5 \\ \hline 30 & \\ -28 & \\ \hline 20 & \\ -20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 137 & 4 \\ 12 & 34,25 \\ \hline 17 & \\ 16 & \\ \hline 10 & \\ 8 & \\ \hline 20 & \\ 20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$a \cdot b \cdot c =: 2^{27,5} \cdot 7^{\frac{137}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{28} \cdot 7^{35}$$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{35}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$b \neq 0$ , т.к.  $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{a+b}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})}$$

$$= \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b}}{\frac{a^2}{b^2} - 7\frac{a}{b} + 1} = \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right) \cdot \frac{1}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right) + 1}$$

$$x = \frac{a}{b}$$

т.к.  $a, b \in \mathbb{N}$

$$x^2 - 7x + 1$$

$$D = 49 - 4 = 45$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{(x+1) \frac{1}{b}}{x^2 - 7x + 1}$$

$$\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} - 1$$

$$7 - 3\sqrt{5} - 2$$

$$5 - 3\sqrt{5}$$

$$81 - 45 = 36$$

$$6 > 9.5$$

$$= \frac{(x+1)}{b \left(x - \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \frac{x+1}{b(x^2 - 7x + 1)}$$

#

$$D < \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \text{ т.к. } \dots$$

$$= \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right)}{b \left(\left(\frac{a}{b} + 1\right)^2 - 9\frac{a}{b}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{b}}{\frac{a}{b} + 1}$$



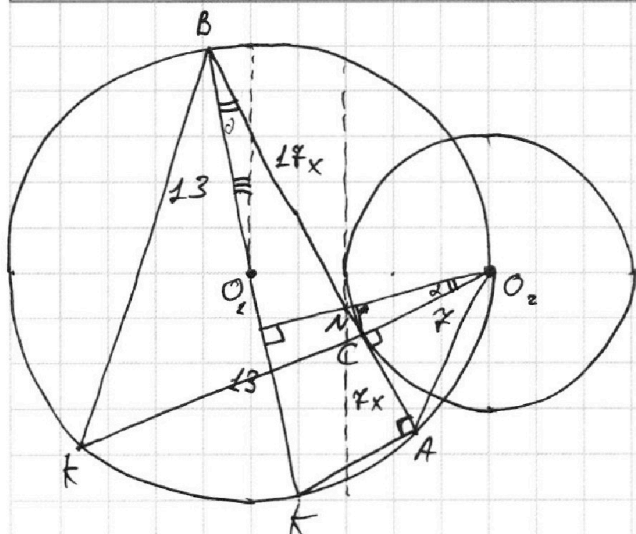
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \frac{AK}{AB} = \frac{NC}{O_2C}$$

$\triangle NCO_2$  и

$\triangle AKB$ :

$$\frac{7}{24x} = \frac{O_2N}{26} \quad | \cdot 2$$

$$\frac{7}{12x} = \frac{O_2N}{13}$$

$$AC \cdot BC = O_2C \cdot CK$$

$AO_2BK$  - гран.  $O_2A \parallel BK$  (т.о.  $KO_2 \perp AB$ )  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = KO_2 \quad \Rightarrow K = 1$$

Ответ: 24



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x \in \left(-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$$

Заметим, что  $3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) =$

$$= 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 1 - 9x$$

Значит,  $1 - 9x = \left(\left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2}\right)^2 - \left(\sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right)^2\right) =$

$$= \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right)$$

Подставим

$$\left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1\right) = 0$$

Тогда

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} & \sim -6x + 2 + 3x^2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \\ x \in \left(-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 9x &= 1 \\ x &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cup \frac{1}{9} \quad \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cup \frac{1}{3}$$

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{9} \cup \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{64}{81} > \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{9} - \text{корень}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{3x^2} - 6x + \cancel{2} = \cancel{1} - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \cancel{3x^2} + 3x + \cancel{1}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$$

$$4(3x^2 + 3x + 1) = 81x^2$$

$$12x^2 + 3x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 69 = 285$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{285}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{285}}{2 \cdot 69} = \frac{3 \pm \sqrt{285}}{138}$$

$$\begin{array}{r} 9x \geq 0 \\ x > 0 \\ \begin{array}{r} 285 \overline{) 5} \\ \underline{58} \\ 276 \\ \underline{276} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} < 1$$

$$3x^2 + 3x + 1 < 1 \quad | :3$$

$$3x \cdot (x + 1) < 0$$

$$x(x + 1) < 0$$

$$\begin{cases} x \in (-1; 0) \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Значит, реш. уравнения является  
ед. корень  $x = \frac{1}{9}$

Ответ:  $\frac{1}{9}$

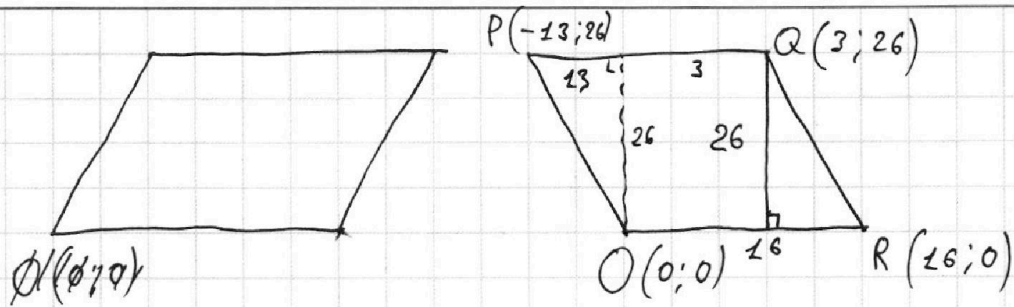
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$\vec{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

$$\vec{AB} \{x_2 - x_1; 14 + 2(x_1 - x_2)\}$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$y_2 - y_1 = 14 + 2x_1 - 2x_2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 & \sim y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 = 4^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 > 4^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2} \dots$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y - 12)^2 = 4 \end{cases}$$

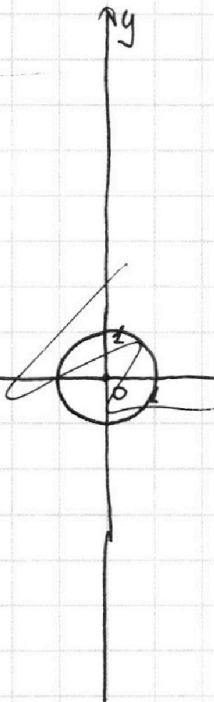
$$\begin{cases} x^2 + (-ax + 8b)^2 = 1 \\ x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & (-ax + 8b - 12 + ax - 8b) \cdot \\ & \cdot (-2ax + 16b - 12) = 15 \end{aligned}$$

$$-2ax + 16b - 12 = \frac{15}{4}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{1-x^2} + 8b = ax \\ \sqrt{1-x^2} = ax - 8b \end{cases}$$

$$\sqrt{1-x^2} + 8b = ax$$





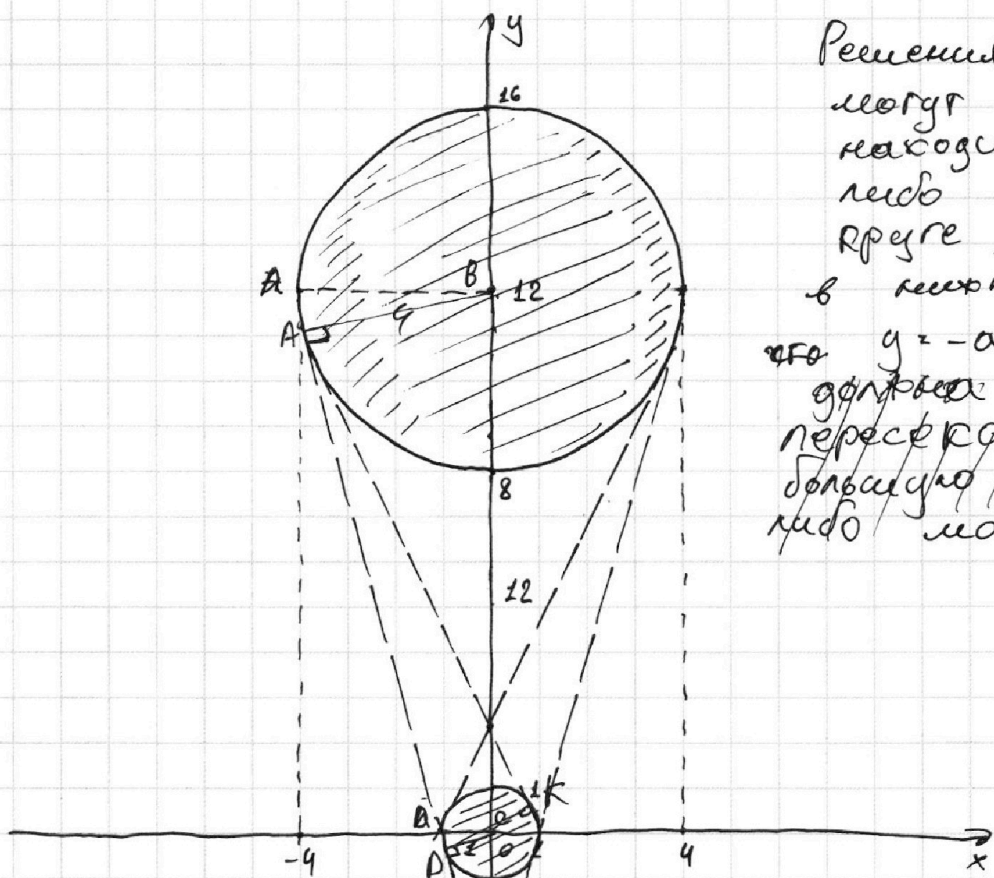
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решения  
могут  
находиться,  
либо в верхней  
части, либо  
в нижней =>  
что  $y = -ax + 8b$   
должна  
пересекать, либо  
большую окружность  
либо маленькую

Значит, единственными возможными  
прямыми будут, прямые  
касаящиеся обеих окружностей,  
- 2 реш.  
Так как:

Если прямая касается одной  
окружности - 1 реш.

Если  $\rho$  прямая пересекает  
одну окружность - интервал

$$\begin{cases}
 y = -ax + 8b \\
 x^2 + y^2 = 1 \\
 x^2 + (y - 12)^2 = 16
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 y = kx + b \\
 x^2 + k^2x^2 + b^2 + 2kx + b^2 = 1 \\
 x^2 + (-ax + 8b)^2 = 1 \\
 x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 y^2 - 24y + 144 - y^2 &= 15 \\
 24y + 144 &= 159 \\
 8y &= 43 \\
 y &= \frac{43}{8}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

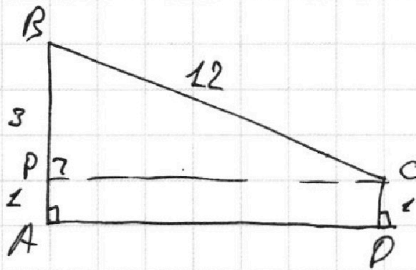
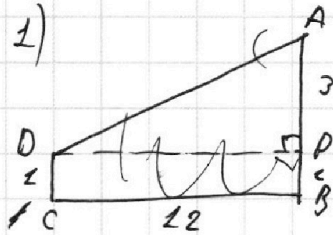
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассм.

ABCD:

Найти  $\operatorname{tg} \angle BCP$  - ?

$AB = 4$   
 $BC = 12$   
 $CD = 1$



$$\sin \angle BCP = \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\cos \angle BCP = \frac{\sqrt{143}}{12} = \sqrt{1 - \frac{1}{144}}$$

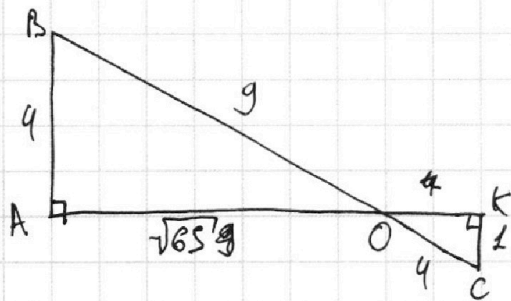
$$\operatorname{tg} \angle BCP = \frac{1}{\sqrt{143}} = \pm a$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{143}} = \pm \frac{\sqrt{143}}{143}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{143}}{143}$$

2) KСAB

Найти  $\operatorname{tg} \angle BOA$  - ?



$$\cos \angle BOA = \dots$$

$$\operatorname{tg} \angle BOA = \frac{4}{\sqrt{65}} = \pm a$$

$$a = \pm \frac{4}{\sqrt{65}}$$

Ответ:  $a \in \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{143}}; \pm \frac{4}{\sqrt{65}} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1    2    3    4    5    6    7  
                 

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})}$$
$$= \frac{a+b+3\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})}$$



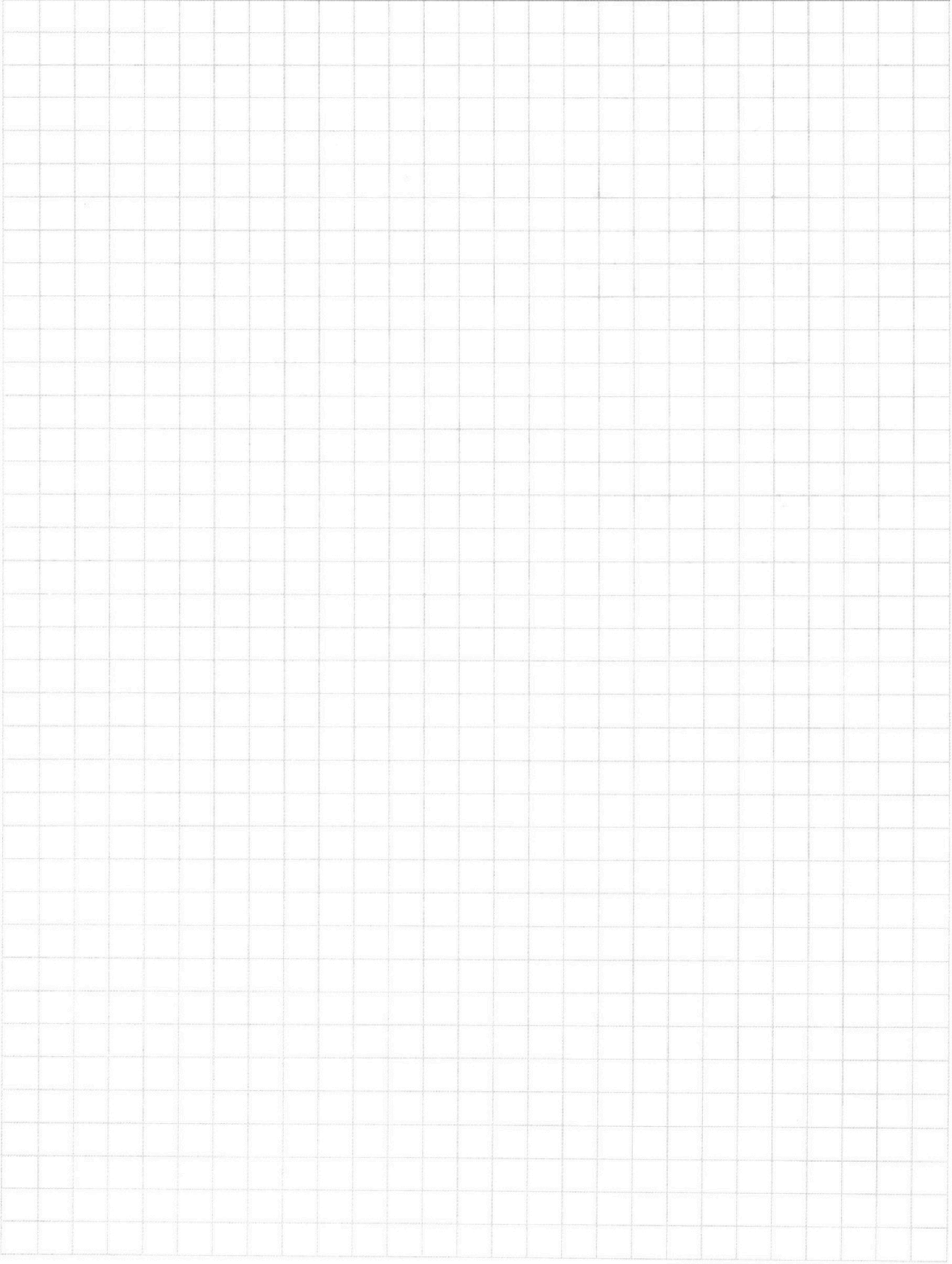
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



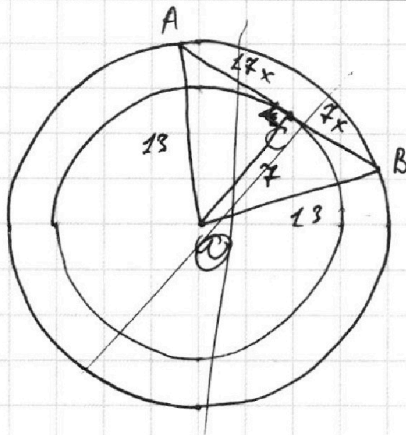
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

$$AB = 24x - ?$$

$$R_w = 7$$

$$R_{\text{op}} = 13$$

$$OC = R_w \perp AB \text{ в п.п.}$$

$$AB \perp \text{радиусу}$$

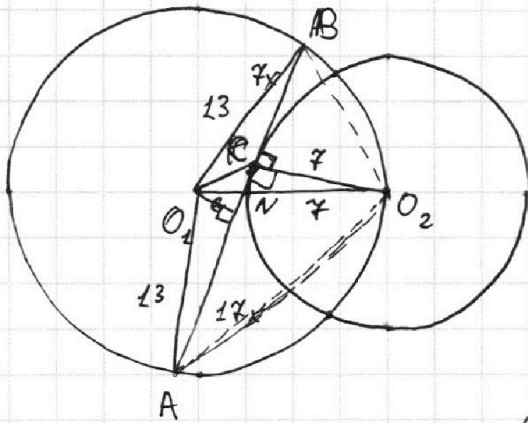
$$O_2N = R_{\text{op}} - R_w =$$

$$= 13 - 7 = 6$$

$$\text{Рассудим } \triangle O_2O_1K:$$

$$O_1O_2 = 13$$

$$KO_2 = 7$$



Проведем  $KO_2 \perp AB$

$$KO_2 \cap AB = C$$

$$\angle ACO_2 = \angle KCB = 90^\circ$$

$$= \frac{\angle ACO_2 + \angle KCB}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AO_2O_2 + \angle KO_2B = 180^\circ$$

$$CO_2 \cdot KC = AC \cdot BC$$

$$KC = 17x^2$$

$$\angle KAB = \angle KO_2B \text{ (как углы вписанные)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle O_2BC \sim \triangle AKC \text{ (по острому углу)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CO_2}{AC} = \frac{BC}{KC} \quad \frac{7}{17x} = \frac{7x}{9}$$