



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.

$abc - ?$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow b < a < c$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a : 2 \text{ и } a : 7$$

$$b : 2 \text{ и } b : 7$$

$$c : 2 \text{ и } c : 7$$

Также замечаем, что:

$$\begin{cases} abc^2 : 2^{32} \cdot 7^{29} \\ abc^2 : 2^{40} \cdot 7^{58} \\ a^2bc : 2^{38} \cdot 7^{50} \end{cases} \Rightarrow a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 : 2^{32+40+38} \cdot 7^{50+58+29}$$

$$a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 : 2^{110} \cdot 7^{137}$$

П.р. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $abc \geq 0$

Найдём целую часть с округлением в большую сторону от делителя 4 наибольшего показателя на 4

$$\begin{array}{r|l} 110 & 4 \\ 8 & 27,5 \\ \hline 30 & \\ -28 & \\ \hline 20 & \\ -20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 137 & 4 \\ 12 & 34,25 \\ \hline 17 & \\ 16 & \\ \hline 10 & \\ 8 & \\ \hline 20 & \\ 20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$a \cdot b \cdot c = : 2^{27,5} \cdot 7^{\frac{137}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{28} \cdot 7^{35}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{35}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$b \neq 0$, т.к. $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{a+b}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})}$$

$$= \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b}}{\frac{a^2}{b^2} - 7\frac{a}{b} + 1} = \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right) \cdot \frac{1}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right) + 1}$$

$$x = \frac{a}{b}$$

т.к. $a, b \in \mathbb{N}$

$$x^2 - 7x + 1$$

$$D = 49 - 4 = 45$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{(x+1) \frac{1}{b}}{x^2 - 7x + 1}$$

$$\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} - 1$$

$$7 - 3\sqrt{5} - 2$$

$$5 - 3\sqrt{5}$$

$$81 - 45 = 36$$

$$6 > 9.5$$

$$= \frac{(x+1)}{b \left(x - \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \frac{x+1}{b(x^2 - 7x + 1)}$$

#

$$D < \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \text{ т.к.}$$

$$= \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right)}{b \left(\left(\frac{a}{b} + 1\right)^2 - 9\frac{a}{b}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{b}}{\frac{a}{b}}$$



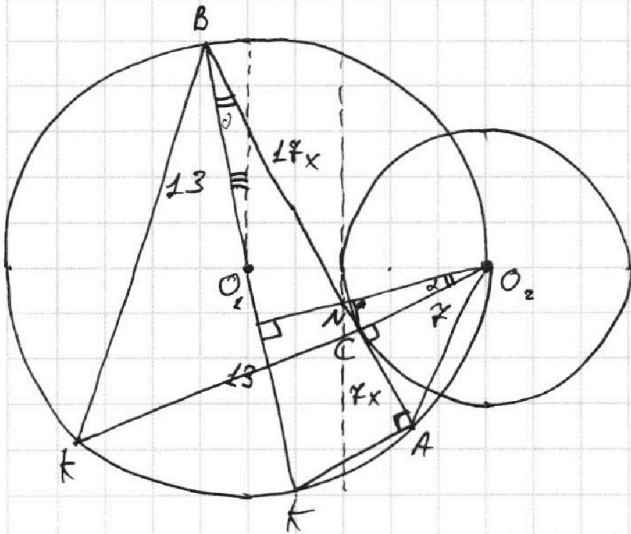
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \frac{AK}{AB} = \frac{NC}{O_2C}$$

$\triangle NCO_2$ и

$\triangle AKB$:

$$\frac{7}{24x} = \frac{O_2N}{26} \quad | \cdot 2$$

$$\frac{7}{12x} = \frac{O_2N}{13}$$

$$AC \cdot BC = O_2C \cdot CK$$

AO_2BK - гран. $O_2A \parallel BK$ (т.о. $KO_2 \perp AB$) \Rightarrow

$$\Rightarrow AB = KO_2 \quad \Rightarrow K = 1$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x \in \left(-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$$

Заметим, что $3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) =$

$$= 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 1 - 9x$$

$$\text{Значит, } 1 - 9x = \left(\left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \right)^2 - \left(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right)^2 \right) =$$

$$= \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right)$$

Подставим

$$\left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \right) \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 \right) = 0$$

Тогда

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} & \sim -6x + 2 + 3x^2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 & \begin{matrix} 9x = 1 \\ x = \frac{1}{9} \end{matrix} \\ x \in \left(-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right) \end{cases}$$

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cup \frac{1}{9} \quad \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cup \frac{1}{3}$$

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{9} \cup \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{64}{81} > \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{9} - \text{корень}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{3x^2} - 6x + \cancel{2} = \cancel{1} - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \cancel{3x^2} + 3x + \cancel{1}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$$

$$4(3x^2 + 3x + 1) = 81x^2$$

$$12x^2 + 3x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 69 = 285$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{285}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{285}}{2 \cdot 69} = \frac{3 \pm \sqrt{285}}{138}$$

$$\begin{array}{r} 9x \geq 0 \\ x > 0 \\ \begin{array}{r} 3 \\ \times 69 \\ \hline 276 \end{array} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 285 \\ 58 \end{array} \right| 5$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} < 1$$

$$3x^2 + 3x + 1 < 1 \quad | :3$$

$$3x \cdot (x + 1) < 0$$

$$x(x + 1) < 0$$

$$\begin{cases} x \in (-1; 0) \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Значит, реш. уравнения является
ед. корень $x = \frac{1}{9}$

Ответ: $\frac{1}{9}$

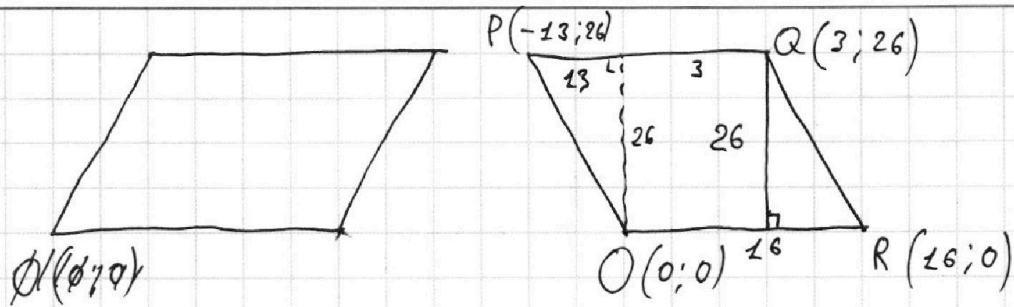
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$\vec{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

$$\vec{AB} \{x_2 - x_1; 14 + 2(x_1 - x_2)\}$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$y_2 - y_1 = 14 + 2x_1 - 2x_2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 & \sim y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 = 4^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 > 4^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2} \dots$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ x^2 + (y - 12)^2 = 4 \end{cases}$$

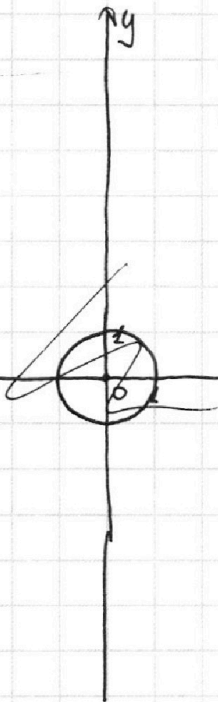
$$\begin{cases} x^2 + (-ax + 8b)^2 = 1 \\ x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & (-ax + 8b - 12 + ax - 8b) \cdot \\ & \cdot (-2ax + 16b - 12) = 15 \end{aligned}$$

$$-2ax + 16b - 12 = \frac{15}{4}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{1-x^2} + 8b = ax \\ \sqrt{1-x^2} = ax - 8b \end{cases}$$

$$\sqrt{1-x^2} + 8b = ax$$



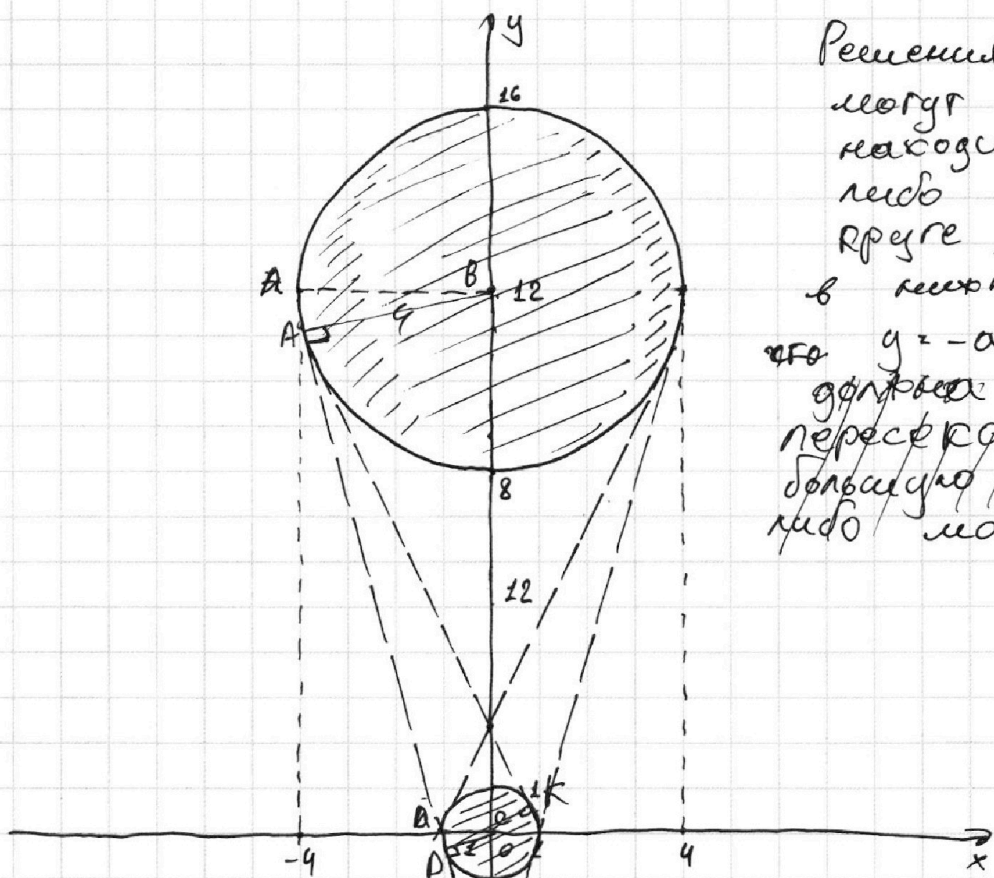
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решения
могут
находиться,
либо в верхней
части, либо
в нижней =>
что $y = -ax + 8b$
должна
пересекать, либо
большую окружность
либо маленькую

Значит, единственными возможными
прямыми будут, прямые
касаящиеся обеих окружностей,
- 2 реш.
Так как:

Если прямая касается одной
окружности - 1 реш.

Если \sqrt{a} прямая пересекает
одну окружность - 4 решения

$$\begin{cases}
 y = -ax + 8b \\
 x^2 + y^2 = 1 \\
 x^2 + (y - 12)^2 = 16
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 y = kx + b \\
 x^2 + k^2x^2 + b^2 + 2bkx + b^2 = 1 \\
 x^2 + (-ax + 8b)^2 = 1 \\
 x^2 + (-ax + 8b - 12)^2 = 16
 \end{cases}$$

$y^2 - 24y + 144 - y^2 = 15$
 $24y + 129 = 15$
 $8y = 43$
 $y = \frac{43}{8}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



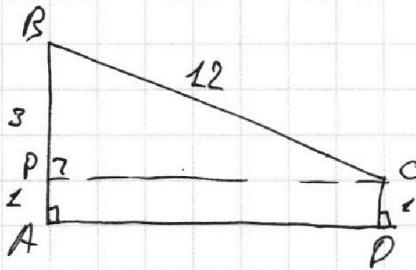
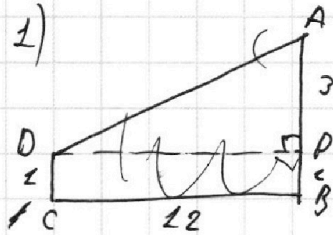
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассм.

ABCD:

Найти $\operatorname{tg} \angle BCP$ - ?

$AB = 4$
 $BC = 12$
 $CD = 1$



$$\sin \angle BCP = \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\cos \angle BCP = \frac{\sqrt{143}}{12} = \sqrt{1 - \frac{1}{144}}$$

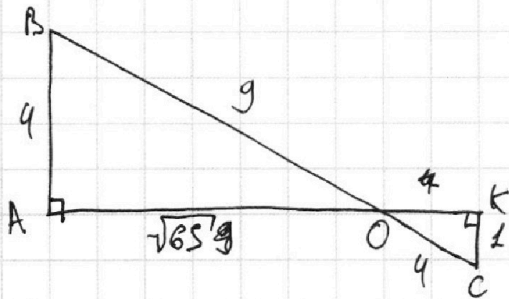
$$\operatorname{tg} \angle BCP = \frac{1}{\sqrt{143}} = \pm a$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{143}} = \pm \frac{\sqrt{143}}{143}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{143}}{143}$$

2) KСAB

Найти $\operatorname{tg} \angle BOA$ - ?



$$\cos \angle BOA = \dots$$

$$\operatorname{tg} \angle BOA = \frac{4}{\sqrt{65}} = \pm a$$

$$a = \pm \frac{4}{\sqrt{65}}$$

Ответ: $a \in \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{143}}; \pm \frac{4}{\sqrt{65}} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})}$$

$$= \frac{a+b+3\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})}$$



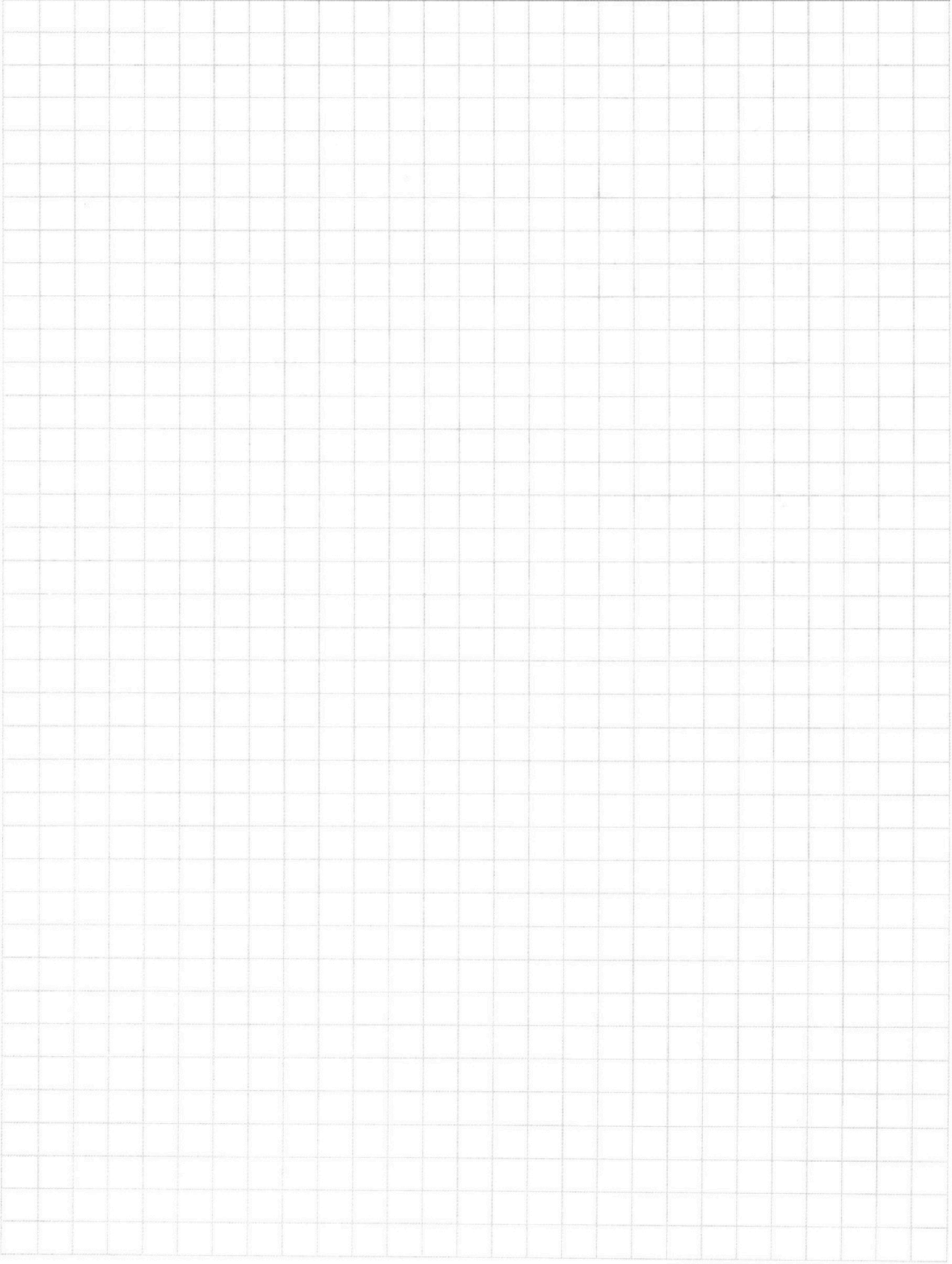
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



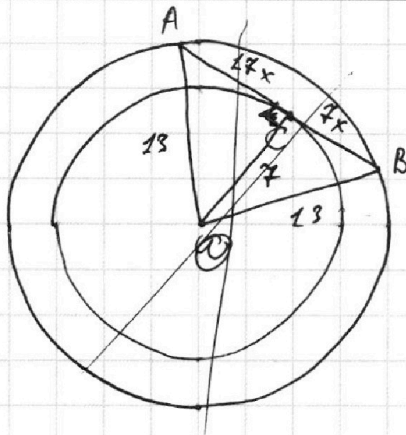
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

$$AB = 24x - ?$$

$$R_{\omega} = 7$$

$$R_{\gamma} = 13$$

$$OC = R_{\omega} \perp AB \text{ в п. п.}$$

$$AB \perp \text{радиусу}$$

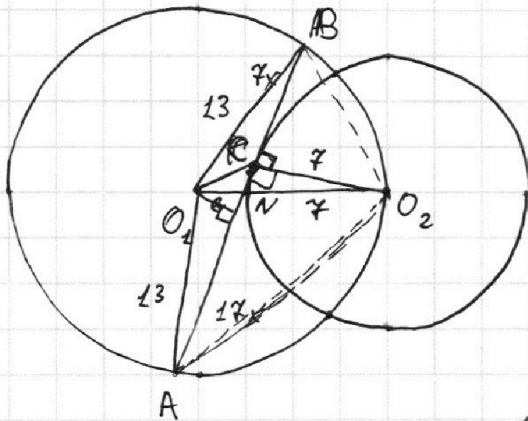
$$O_2N = R_{\gamma} - R_{\omega} =$$

$$= 13 - 7 = 6$$

$$\text{Рассудим } \triangle O_2O_1K:$$

$$O_1O_2 = 13$$

$$KO_2 = 7$$



Проведем $KO_2 \perp AB$

$$KO_2 \cap AB = C$$

$$\angle ACO_2 = \angle KCB = 90^\circ$$

$$= \frac{\angle ACO_2 + \angle KCB}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AO_2O_2 + \angle KO_2B = 180^\circ$$

$$CO_2 \cdot KC = AC \cdot BC$$

$$KC = 17x^2$$

$$\angle KAB = \angle KO_2B \text{ (как углы вписанные)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle O_2BC \sim \triangle AKC \text{ (по острому углу)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CO_2}{AC} = \frac{BC}{KC} \quad \frac{7}{17x} = \frac{7x}{9}$$

