МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc. $2^{28}\cdot 7^{39}$

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x. \qquad 1/9,\ 1\ .\ .\ .$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$. 3481

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения. $\pm\sqrt{15}$; $\pm\frac{\sqrt{107}}{5}$

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №1.

Дано:
$ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$
$bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{18}$
$ac \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$

Найти наим abc.

$$\begin{cases} x+y\geq 15\\ y+z\geq 17\\ x+z\geq 23\\ x'+y'\geq 11\\ y'+z'\geq 18\\ x'+z'\geq 39 \end{cases}$$

Решение:

1) Очевидно, чтобы abc было наименьшим числа a, b, c должны состоять только из 2 и/или 7, т.к. иначе у нас будут дополнительные множители, которые не влияют на делимость данную в условии, но увеличат произведение abc. Тогда, пусть $a = 2^{x}\cdot 7^{x'}$, $b = 2^{y}\cdot 7^{y'}$, $c = 2^{z}\cdot 7^{z'}$, тогда из условия задачи получим систему неравенств (так же $x, y, z, x', y', z' \geq 0$ и $\in \mathbb{Z}$)

2) Из этой системы получим, что $x+y+z \geq 27{,}5$ и $x'+y'+z' \geq 34$. Нетрудно заметить, что наименьшая сумма $x+y+z$ будет при 28, т.к. меньше она быть не может (по условию $x+y+z \geq 27{,}5$ и то, что они целые неотрицательные и значит их сумма целая) и при $x+y+z=28$ у нас есть решение, которое удовлетворяет системе ($(x;y;z) = (10;5;13)$) и удовлетворяет условиям на $x;y;z$ $\Rightarrow$ Наим $x+y+z=28$.

3) Если мы будем действовать с числами x', y', z' аналогично пункту 2), то получим, что $x'+y'+z' \geq 34$ и значит наим $x'+y'+z'=34$, но это не так, т.к. при $x'+y'+z'=34$ у нас как минимум одно из чисел отрицательно. Тогда взглянем на последнее неравенство ($x'+z' \geq 39$) и получим, что $x'+y'+z' \geq 39$ (т.к. $39 \leq x'+z' \leq x'+y'+z'$ при $x', z', y' \geq 0 \Rightarrow x'+y'+z' \geq 39$). Теперь наим значение 39. Тогда подставим в систему значение x', y', z' удовл. равенству $x'+y'+z'=39$ и получим решение (к примеру: $(x';y';z') = (16;0;23)$) Т.к. это решение удовлетворяет условиям на x', y', z' и системе и мы доказали, что сумма $x'+y'+z'$ не может быть меньше 39, то значит наим. $x'+y'+z' = 39$.

4) Теперь найдем наименьшее значение abc:
$abc = 2^{x}\cdot 7^{x'}\cdot 2^{y}\cdot 7^{y'}\cdot 2^{z}\cdot 2^{z'} = 2^{(x+y+z)}\cdot 7^{(x'+y'+z')}$ – чтобы это значение стало минимальным нужно, чтобы $x+y+z$ было мин. и $x'+y'+z'$ было минимальным $\Rightarrow$ $x+y+z=28$ и $x'+y'+z'=39$. И тогда наименьшее значение произведения $abc = 2^{28}\cdot 7^{39}$ ~~Очевидно, что это число удовлетворяет условиям~~

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

Дано:
$\frac{a}{b}$ - несократима
$a, b \in N$

$m_{max} = ?$

Решение

1) Т.к. нам нужно сократить дробь $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ на максимальное значение m, то это значение будет НОД$(a+b; a^2-7ab+b^2)$, т.к. на большее число у нас не поделится хотя бы одно из чисел $a+b$ или $a^2-7ab+b^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 (X) 4 5 6 7

МФТИ

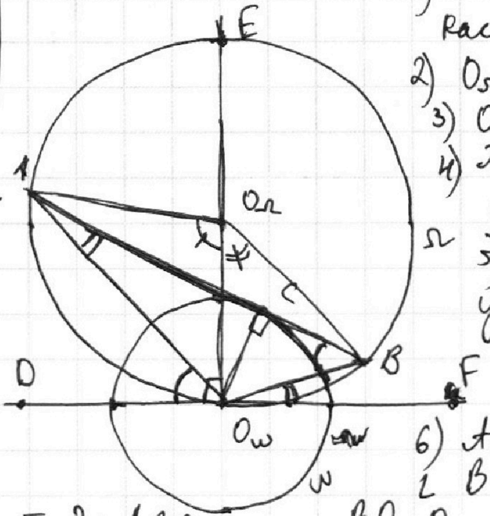
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

Дано:
$AC : CB = 17 : 7$
$O_\omega \in \Omega$
$R_\omega = 7$
$R_\Omega = 13$

$AB = ?$

Решение:



1) $OC \perp AB$, т.к. это радиус в точку касания к касательной.
2) $O_\Omega O_\omega \cap \Omega = (\cdot) O_\omega$ и $(\cdot) E$
3) $O_\Omega A = O_\Omega B = O_\Omega O_\omega = R_\Omega = 13$.
4) Проведем касательную DF к окружности Ω в точке O_ω.
5) $\angle DO_\omega A = \angle ABO_\omega$, т.к. это угол между кас и хордой и вписанный угол опирающиеся на одну и ту же дугу.
6) Аналогично пункту 5):
$\angle BO_\omega F = \angle O_\omega AB$.

7) $\angle AO_\Omega O_\omega = 2\angle ABO_\omega$ и $\angle BO_\Omega O_\omega = 2\angle O_\omega AB$, т.к. это центральные и вписанные углы опирающиеся на одну и ту же дугу.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.

Решить уравнение $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right) \\ x \text{ - любое} \end{cases}$

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$ | Введем замену: $a = 1-9x$

$\sqrt{3x^2+3x+1+1-9x} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$ | $b = 3x^2+3x+1$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{b} = a$ Возведем обе части в квадрат:

$a+b+b-2\sqrt{b(a+b)} = a^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{b(a+b)} = 2b+a-a^2$ Опять возводим в квадрат.

$a^2+4b^2+a^4+4ab-2a^3-4a^2b = 4b^2+4ab \Leftrightarrow a^2(a^2-4b-2a+1) = 0 \Leftrightarrow a^2((a-1)^2-4b) = 0$

$\left[\begin{array}{l} a^2=0 \\ (a-1)^2-4b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ (a-1)^2-4b=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 1-9x=0 \\ (-9x)^2-4(3x^2+3x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ 81x^2-12x^2-12x-4=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ 69x^2-12x-4=0 \end{array}\right. \quad \frac{D}{4} = \left(\frac{12}{2}\right)^2 - (-4)\cdot 69 = 312 = 4\cdot 78 \quad x = \frac{-\left(-\frac{12}{2}\right) \pm \sqrt{D/4}}{69} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{6-2\sqrt{78}}{69} \\ x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \end{array}\right.$

Мы получили три корня и остается проверить их на ~~одз~~ ОДЗ:

$\frac{3-\sqrt{3}}{3} \vee \frac{1}{9}$

$3(3-\sqrt{3}) \vee 1$

$9-3\sqrt{3} \vee 1$

$8 \vee 3\sqrt{3} \uparrow^2$

$64 > 27$

$\Downarrow$

$\frac{3-\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{9} \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \Rightarrow \frac{1}{9} \in$ ОДЗ.

$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

$2\sqrt{78} \vee 63+23\sqrt{3} \uparrow^2$

$312 < 63^2+23^2\cdot 3+2\cdot 23\cdot 63\cdot\sqrt{3}$

т.к. $312 < 63^2$

$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{6-2\sqrt{78}}{69} < \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

$\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

$6-2\sqrt{78} \vee 63-23\sqrt{3}$

$-2\sqrt{26} \vee 21\sqrt{3}-23$

$23 \vee 21\sqrt{3}+2\sqrt{26}$

$23 < 21\sqrt{3}+2\sqrt{26}$

$\frac{6-2\sqrt{78}}{69} < \frac{3-\sqrt{3}}{3}$,

т.к. $23^2 < 21^2\cdot 3 \Rightarrow 23 < 21\sqrt{3}$.

Т.к. $\frac{6-2\sqrt{78}}{69} < \frac{3-\sqrt{3}}{3}$, то $\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \Rightarrow \frac{6-2\sqrt{78}}{69} \in$ ОДЗ.

$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} \vee \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

$2\sqrt{78} \vee 63-23\sqrt{3}$

$2\sqrt{26} \vee 21\sqrt{3}-23 \uparrow^2$

$23^2 \vee 21^2\cdot 3+4\cdot 26-4\cdot 21\cdot\sqrt{26\cdot 3}$

$4\cdot 21\sqrt{26\cdot 3} \vee 898$

$2\cdot 21\sqrt{26\cdot 3} \vee 449 \uparrow^2$

$137592 < 201601$

$\frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

Т.к. $\frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{3-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \in$ ОДЗ.

$\Rightarrow$ Все три ответа подходят.

Ответ: $\frac{1}{9}$; $\frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [ ] [ ] [X] [ ] [ ]

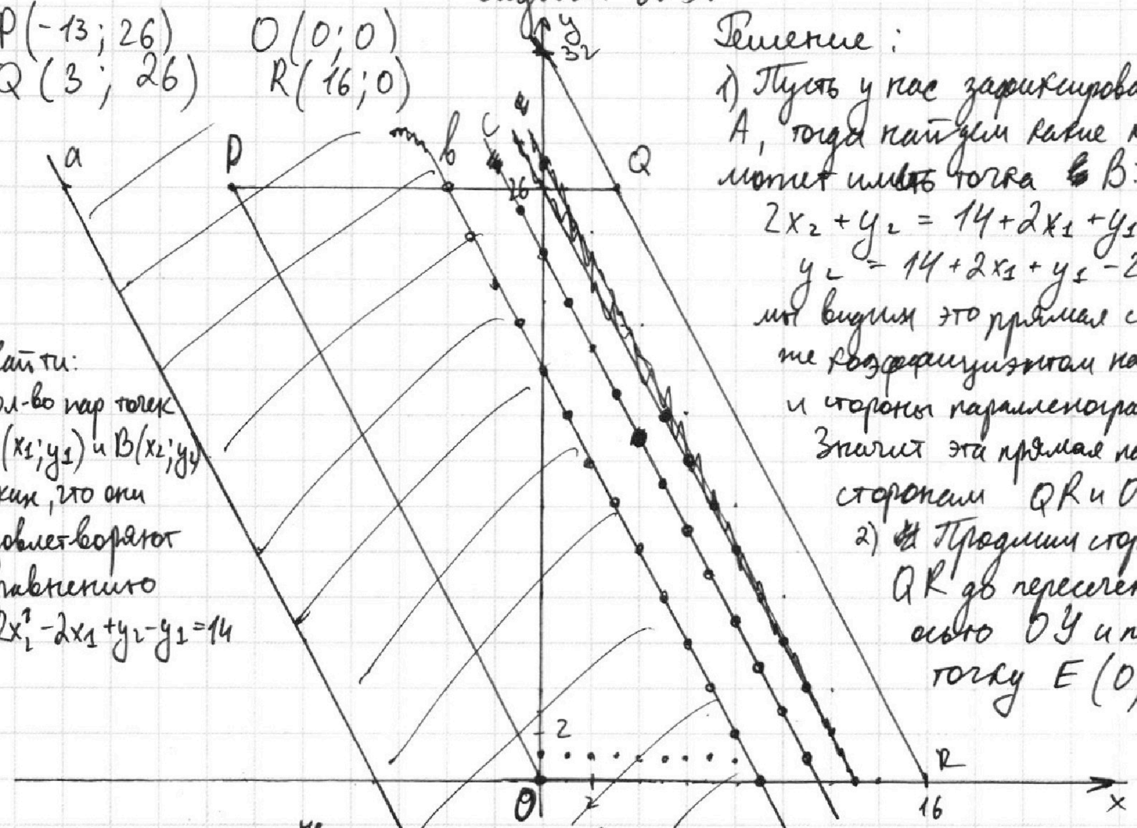
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5.

$P(-13; 26)$ $O(0;0)$

$Q(3; 26)$ $R(16;0)$



Найти:
Кол-во пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ таких, что они удовлетворяют уравнению $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

Решение:

1) Пусть у нас зафиксирована точка A, тогда найдем какие координаты может иметь точка B:

$2x_2+y_2=14+2x_1+y_1$

$y_2=14+2x_1+y_1-2x_2$, как мы видим это прямая с таким же коэффициентом наклона, как и стороны параллелограмма (QR и OP). Значит эта прямая параллельна сторонам QR и OP

2) Продлим сторону QR до пересечения с осью OY и получим точку $E(0; 32)$.

3) Т.к. точка B не должна лежать вне параллелограмма, то крайние для нее случаи это стороны PO и QR и значит вот значения для свободного члена: $0 \le 14+2x_1+y_1 \le 32 \iff -14-2x_1 \le y_1 \le 18-2x_1$ Значит теперь мы получили ограничение на координаты точки A $\Rightarrow$ Точка A может лежать только между прямыми a и b (включая их), где прямая a имеет уравнение $y=-14-2x$, а прямая b: $y=18-2x$. (Заштрихованная область это то, где может лежать точка A).

4) Для каждой точки A может быть либо 13 точек B, либо 14. Если координаты Y пересечения прямой $y_2=14+2x_1+y_1-2x_1$ и оси OY нечетные, то вариантов 13, а если четные, то 14 (пример прямые b и c, жирные точки - точки в которых может быть точка B). Чтобы это пересечение было нечетным, сумма $2x_1+y_1$ должна быть нечетной, значит y_1 - нечетный.

5) Кол-во точек A с нечетным y_1 - это $n_1=13\cdot 9$ (тринадцать рядов по 9 точек). А кол-во точек с четным ~~кол-вом~~ y_1 - это $n_2=14\cdot 10$ (14 рядов по 10 точек). А значит кол-во пар точек A и B это $N=14n_2+13n_1=14^2\cdot 10+13^2\cdot 9=1521+1960=3481$

Ответ: 3481 пара.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6.

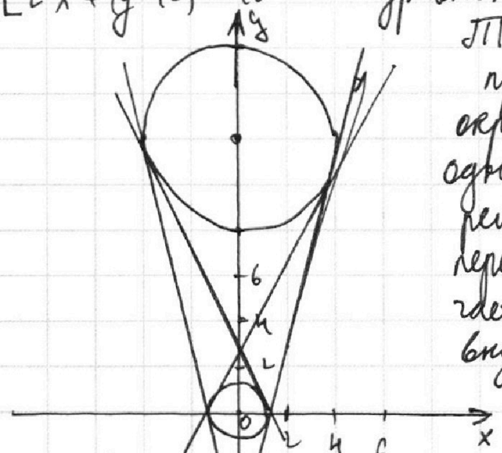
Найти все знач. параметра a, при которых найдется b и будет 2 решения системы

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0. \end{cases}$$

Первое уравнение в системе это прямая, а второе неравенство равносильно:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\ge 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнение $x^2+y^2=1$ — уравнение окружности с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 1, а неравенство $x^2+y^2\le 1$ — это окружность и круг внутри нее. Аналогично с уравнением окружности $x^2+(y-12)^2=16$



Т.к. у нас должно быть 2 решения, значит прямая $ax+y-8b=0$ должна касаться обеих окружностей, т.к. если она касается только одну, а другую не касается и не пересекает, то решение 1 — и это точка касания. А если прямая пересекает хотя бы одну окружность, то там получается бесконечно много решений (отрезок лежащий внутри окружности). Значит у нас 4 варианта для коэффициента наклона прямой (a) — это 4 касательных (общих) две внешних и две внутренних. Теперь найдем параметр a при котором это так. Сделаем это через расстояние от точки до прямой:

$$\begin{cases} 4=\frac{|a\cdot 0+12-8b|}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1=\frac{|a\cdot 0+0-8b|}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{a^2+1}=|12-8b| \\ \sqrt{a^2+1}=|-8b| \end{cases}$$

Теперь рассмотрим 3 случая для разл. значений b и открытий модулей

При $b\in(-\infty;0]$ $\begin{cases} 4\sqrt{a^2+1}=12-8b \\ \sqrt{a^2+1}=-8b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2+1}=4 \Rightarrow a^2+1=16 \Rightarrow a=\pm\sqrt{15}$

При $b\in(0;\frac{3}{4}]$ $\begin{cases} 4\sqrt{a^2+1}=12-8b \\ \sqrt{a^2+1}=8b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2+1}=\frac{12}{5} \Rightarrow a^2+1=\frac{12^2}{5^2} \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{12^2-5^2}{5^2}}$

$a=\pm\frac{\sqrt{119}}{5}$

При $b\in(\frac{3}{4};+\infty)$ $\begin{cases} 4\sqrt{a^2+1}=+8b-12 \\ \sqrt{a^2+1}=8b \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2+1}=-4 \Rightarrow$ решений нет, т.к. $\sqrt{a^2+1}>0$.

Вот мы и получили 4 различных варианта для параметра a, что соответствует 4 различным касательным (с различными коэффициентами наклона).

~~Ответ: $\pm\sqrt{15}$ $\pm\sqrt{119}$~~ Ответ: $\pm\sqrt{15}$; $\pm\frac{\sqrt{119}}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 [x] 5 [x] 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

Задача ~~№4~~

ОДЗ: $3x^2-6x+2\geq 0$
$3x^2+3x+1\geq 0$

Решить уравнение $\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

Решение: $\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$ | Введем замену: $a=1-9x$, $b=3x^2+3x+1$

$\sqrt{3x^2+3x+1+1-9x}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

$\sqrt{a+b}-\sqrt{b}=a$ Возведем обе части в квадрат:

$a+b-2\sqrt{b}\cdot\sqrt{a+b}+b=a^2 \Leftrightarrow a+2b-a^2=2\sqrt{b(b+a)}$ Опять возводим в квадрат:

$a^2+\cancel{4b^2}+a^4+\cancel{4ab}-2a^3-4a^2b=\cancel{4b^2}+\cancel{4ab} \Leftrightarrow a^4-4a^2b-2a^3+a^2=0$

$a^2(a^2-4b-2a+1)=0$ Теперь перейдем к равносильной совокупности:

$\left[\begin{array}{l}a^2=0\\a^2-4b-2a+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\(a-1)^2-4b=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-9x=0\\(-9x)^2-4(3x^2+3x+1)=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}9x=1\\81x^2-12x^2-12x-4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{9}\\69x^2-12x-4=0\end{array}\right.$

$69x^2-12x-4=0$

$\frac{D}{4}=6^2-(-4)\cdot 69=312=4\cdot 78 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{12+\sqrt{312}}{69}\\x=\frac{12-\sqrt{312}}{69}\end{array}\right.$

Из этой системы получаем значения для $x=\left\{\frac{1}{9};\ \frac{12-\sqrt{312}}{69};\ \frac{12+\sqrt{312}}{69}\right\}$

Теперь нужно проверить подходят ли эти значения под ОДЗ:

$\left\{\begin{array}{l}3x^2-6x+2\geq 0\\3x^2+3x+1\geq 0\end{array}\right.$ $\left\{x^2-2x+\frac{2}{3}\geq 0\right.$ $\Rightarrow x=1\pm\sqrt{3}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

$x=\frac{2}{4}=\cancel{2}\ 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ $\quad x=\frac{1\pm}{\sqrt{3}}$

$6+2\cdot\sqrt{2\cdot 39}=$
$=2\cdot 39=2\cdot 3\cdot 13.$

$6\pm 2\sqrt{78}\ \vee\ \frac{3\pm\sqrt{3}}{3}\cdot 23$

$6\pm 2\sqrt{78}\ \vee\ 69\pm 23\sqrt{3}$

$\pm 2\sqrt{78}\ \vee\ 63\pm 23\sqrt{3}$

$312\ \vee\ 63^2+23^2\cdot 3\pm 2\cdot 63\sqrt{3}\cdot 23$

$6+2\sqrt{78}\ \vee\ 69-23\sqrt{3}$

$+2\sqrt{78}\ \vee\ 63-23\sqrt{3}$

$+2\sqrt{26}\ \vee\ 21\sqrt{3}-23$

$23\ \vee\ 21\sqrt{3}-2\sqrt{26}$

$23^2\ \vee\ 21^2\cdot 3+2^2\cdot 26-2\cdot 2\sqrt{26}\cdot 21\sqrt{3}$

$6+2\sqrt{78}\ \vee\ 69-23\sqrt{3}$

$23^2\ \vee\ 21^2\cdot 3+4\cdot 26.$

21
$21\times 21=441$
$441\times 3=1323$
$1323+104=1427$
529
898

$26\times 4=104$
$23\times 23=529$

441
$441\times 4=1764$
$1764\times 26=45864$
$45864\times 3=137592$

$449\times 449=201601$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 $\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+3x+1+(1-9x)}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

$a=3x^2+3x+1 \qquad \sqrt{a+b}-\sqrt{a}=b. \qquad 2\sqrt{a(a+b)}=(2a+b-b^2)$

$b=1-9x \qquad a+b+a-2\sqrt{a^2+ab}=b^2 \qquad 4a(a+b)=4a^2+b^2+b^4+4ab-4ab^2-2b^3$

$\cancel{4a^2}+\cancel{4ab}=\cancel{4a^2}+b^2+b^4+\cancel{4ab}-4ab^2-2b^3 \Leftrightarrow 0=b^2(1+b^2+4a-2b)$

Если $b=0$, то a - любое $\Rightarrow b=0 \Leftrightarrow 1-9x=0 \quad x=1/9$

$1+b^2+4a-2b=0 \Leftrightarrow 4a+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow 12x^2+12x+4+81x^2=0$

$93x^2+12x+4=0 \Rightarrow$ решений нет

$\frac{D}{4}=6^2-4\cdot 93<0$

$4+3+5\cdot 3+6$

$8\cdot 3+6=27+6=33$

ОДЗ: $3x^2+3x+1\geq 0$ - всегда

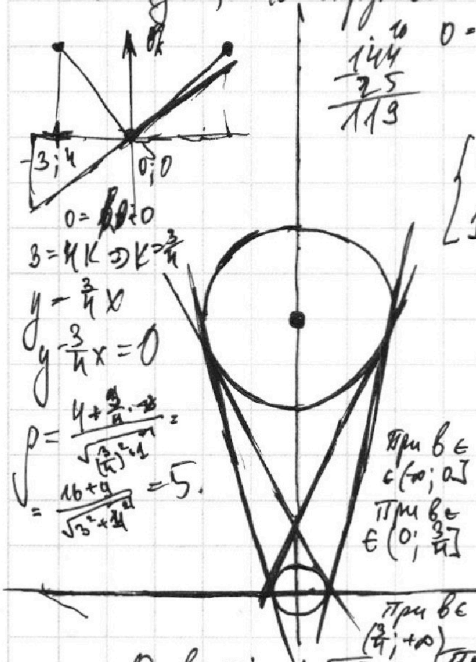
$3x^2-6x+2\geq 0 \quad 3\cdot\frac{1}{9\cdot 9}-6\cdot\frac{1}{9}+2=\frac{1}{27}-\frac{2}{3}+2\geq 0$

Ответ: $1/9$.

~~должно быть только в одном круге~~

№6. $x^2+y^2=1$ - окружность центр $(0;0)$ $R=1$

$x^2+(y-12)^2=16$ окружность центр $(0;12)$ $R=4$.



$0=ax+y-8b$ - четыре касательных к окружностям (вн. и внешн.)

$\rho=\frac{|ax_m+y_m|-8b|}{\sqrt{a^2+1}}$

$144-25=119$

$\begin{cases} 4=\frac{|a\cdot 0+12-8b|}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1=\frac{|a\cdot 0+0-8b|}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Leftrightarrow 4\sqrt{a^2+1}=|12-8b|$

$\sqrt{a^2+1}=|8b|$

$16(a^2+1)=12^2-8\cdot 12\cdot 2b+64b^2$

$a^2+1=64b^2 \Rightarrow 15a^2+15=144-64\cdot 3b.$

$0=ax+y$

$3=4k \Rightarrow k=\frac{3}{4}$

$y=\frac{3}{4}x$

$y-\frac{3}{4}x=0$

$\rho=\frac{4+\frac{3}{4}\cdot 3}{\sqrt{(\frac{3}{4})^2+1}}=\frac{16+9}{\sqrt{3^2+4^2}}=5.$

$\begin{cases} 4c=|12-8b|=8|\frac{3}{2}-b| \\ c=|-8b| \end{cases}$

$+ \quad 0 \quad + \quad \frac{3}{4} \quad -$ \qquad $a=\pm\sqrt{15}$

при $b\in(-\infty;0]$ $\begin{cases} 4c=12-8b \\ c=-8b \end{cases} \Rightarrow 3c=12 \Rightarrow c=4 \Rightarrow \sqrt{a^2+1}=4 \Rightarrow a^2+1=16$

при $b\in[0;\frac{3}{4}]$ $\begin{cases} 4c=12-8b \\ c=8b \end{cases} \Rightarrow 5c=12 \Rightarrow c=\frac{12}{5} \Rightarrow a^2+1=\frac{12^2}{5^2} \Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{12^2-5^2}}{5}$

при $b\in(\frac{3}{4};+\infty)$ $\begin{cases} 4c=8b-12 \\ c=8b \end{cases} \Rightarrow 3c=-12$ - невозможно

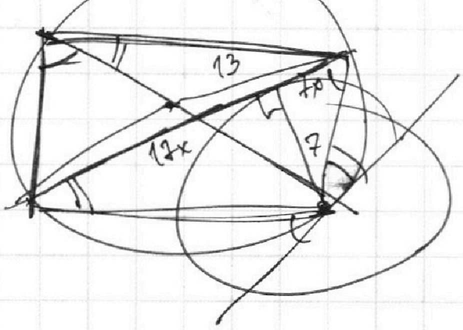
Ответ: $\pm\sqrt{15}; \pm\frac{\sqrt{119}}{5}$

x^2

НОД$(a+b;\ a^2-7ab+b^2)$

НОД$(a+b;\ -9ab)$

$(a-b)^2-5ab.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 $ab: 2^{15}7^{11}$ $bc: 2^{17}7^{18}$ $ac: 2^{23}7^{39}$

$a = 2^x 7^{x'}$ $b = 2^y 7^{y'}$ $c = 2^z 7^{z'}$

$\begin{cases} x+y \geq 15 \\ y+z \geq 17 \\ x+z \geq 23 \end{cases}$ и $\begin{cases} x'+y' \geq 11 \\ y'+z' \geq 18 \\ z'+x' \geq 39 \end{cases}$

$x+y+z$ – наим $z'+x'+y'$ – наим

$abc_{наим} = 2^{23} \cdot 7^{34}$

$2x+2y+2z \geq 15+17+23$

$x+y+z \geq 22{,}5 \Rightarrow x+y+z_{наим} = 23$

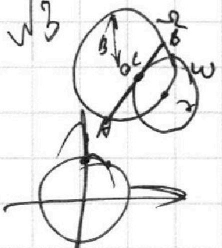
$2x'+2y'+2z' \geq 11+18+39$ $x'+y'+z'_{наим} = 34$

$x'+y'+z' \geq 34$

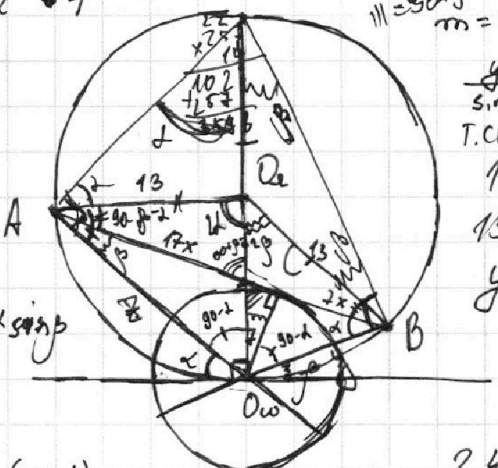
$26 = -14 - 2x_1$ $c = \cancel{x}$
$13 = -7 - x_1 \Rightarrow x_2 = -20.$

$15+17 = 32$
$32+23 = 55$
$29+39 = 68$

№3



$\sin(\beta+\alpha) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$



$m = \alpha - \beta$ $y^2 = (7x)^2 + 49$
$z^2 = 7^2 + (17x)^2$

$\frac{y}{\sin 2\beta} = \frac{13}{\sin(90-\beta)}$ $\frac{z}{\sin 2\alpha} = \frac{13}{\sin(90-\alpha)}$

Т. синусов

$13 = \frac{\sin 90-\beta}{\sin 2\beta} \cdot y = \frac{\cos\beta}{2\sin\beta\cos\beta} = \frac{y}{2\sin\beta}$

$13 = z / 2\sin\alpha$

$y \cdot 2\sin\alpha = z \cdot 2\sin\beta$

$y\sin\alpha = z\sin\beta = 7$

$\frac{24x}{\sin(2(\alpha+\beta))} = \frac{13}{\sin(90-\beta-\alpha)}$

$13 = 24x \cdot \frac{\cos(\beta+\alpha)}{2\sin(\beta+\alpha)\cos(\beta+\alpha)} \Rightarrow 13 = \frac{24x}{2\sin(\beta+\alpha)}$ $\frac{24x}{2\sin(\beta+\alpha)} = \frac{z}{2\sin\alpha}$

$24x \sin\alpha = z(\sin(\beta+\alpha))$

$24x\sin\alpha = z\sin\alpha\cos\beta + z\cos\alpha\sin\beta = z\sin\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\cos\alpha$

$24x = z\cos\beta + y\cos\alpha$

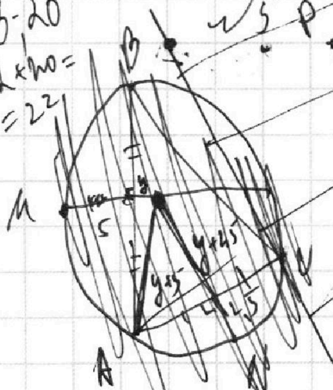
$\frac{z}{\sin\alpha} = \frac{24x}{\sin(180-\alpha-\beta)} = \frac{24x}{\sin(\alpha+\beta)}$

$36 + 4 \cdot 69$
$4(9+69)$
$4 \cdot 78 = 312$

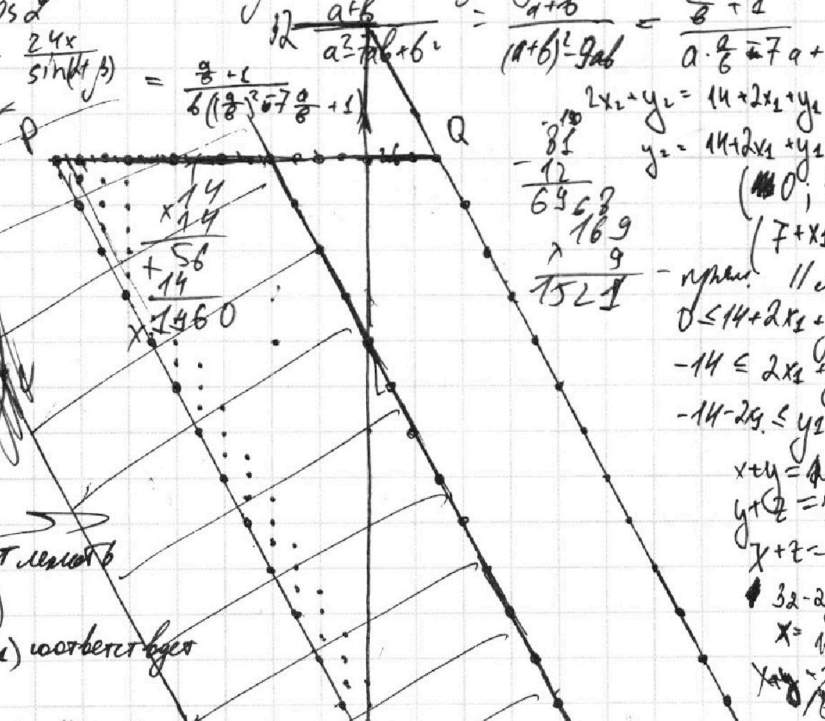
$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{\frac{a}{b}+1}{a \cdot \frac{a}{b} - 7a + b} = \frac{\frac{a}{b}+1}{b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\frac{a}{b} + 1\right)}$

№5

$-13 \cdot 20$
$14 + 12 \times 10 =$
$1 = 2^2$



$x \frac{14}{14}$
$+\frac{56}{14}$
$x\, 1460$



$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$
$y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$

$-\frac{81}{12}$
69

169
$\frac{9}{1521}$

$(0; 14+2x_1+y_1)$
$(7 + x_1 + \frac{y_1}{2}; 0)$
– прям. // стороне.

$0 \leq 14 + 2x_1 + y_1 \leq 32$

$-14 \leq 2x_1 + y_1 \leq 18$

$-14 - 2x_1 \leq y_1 \leq 18 - 2x_1$

$x+y = 15$
$y+z = 17$
$x+z = 23$

$32 - 2y = 23 \Rightarrow y = 4{,}5$
$x = 10{,}5$ $z = 12{,}5$

область где может лежать точка $(x_1; y_1)$

Каждой точке $(x_1; y_1)$ соответствует 14 точек $(x_2; y_2)$

Кол-во точек $(x_1; y_1)$: $14 \cdot 10 + 13 \cdot 9 =$
$= 140 + 90 + 27 = 230 + 27 = 257$

$\Sigma = 14 \cdot 257 = 3598$