МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\left(x_1;y_1\right)$ и $B\left(x_2;y_2\right)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab \vdots 2^{14} 7^{10}$, $bc \vdots 2^{17} 7^{17}$, $ac \vdots 2^{20} 7^{37}$. abc_{min} - ?

Чтобы abc было наим., нужно, чтобы a, b, c состояли только из степ. 2 и 7. : $a = 2^{k_1} 7^{n_1}$, $b = 2^{k_2} 7^{n_2}$, $c = 2^{k_3} 7^{n_3}$, $k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$, тогда $ab = 2^{k_1+k_2} 7^{n_1+n_2} \vdots 2^{14} 7^{10} \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2 \geq 14 & (1) \\ n_1+n_2 \geq 10. & (2) \end{cases}$ аналогично $\begin{cases} k_2+k_3 \geq 17 & (3) \\ n_2+n_3 \geq 17 & (4) \end{cases}$ и $\begin{cases} k_1+k_3 \geq 20 & (5) \\ n_1+n_3 \geq 37 & (6) \end{cases}$ требуется найти наим. сумму $k_1+k_2+k_3$ и $n_1+n_2+n_3$ для наим abc. $(1)+(3)+(5)$: $2(k_1+k_2+k_3) \geq 51 \Rightarrow k_1+k_2+k_3 \geq 25{,}5$, т.к. $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$, то $(k_1+k_2+k_3)_{min} = 26$, аналогично: $(2)+(4)+(6)$: $2(n_1+n_2+n_3) \geq 64 \Rightarrow (n_1+n_2+n_3)_{min} = 32$ т.е. $(abc)_{min} = 2^{26} 7^{32}$, но, т.к. $ac \vdots 2^{20} 7^{37}$, то abc уже $\vdots 7^{37}$, а $7^{32} \not\vdots 7^{37}$, то есть минимальная степень у 7 будет 37. Ответ: $(abc)_{min} = 2^{26} 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$\frac{a}{b}$ – несократима $(a, b \in \mathbb{N})$, т.е. НОД$(a;b)=1$.

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$, m_{max} – ? $a+b \vdots m$ и $a^2-6ab+b^2 \vdots m$

т.е. $a+b = km, k \in \mathbb{N}$, $a^2-6ab+b^2 = \overset{\vdots m}{(a+b)^2} - 8ab \Rightarrow$

$\Rightarrow$ требуется, чтобы $8ab \vdots m \Rightarrow 8ab = nm, n \in \mathbb{N}$.

Т.к. m_{max}, то ~~д~~ дробь получившаяся после сокращения ~~если~~ несократимая (иначе можно подобрать число t на которое она сократиться и такое значение m будет $m_{max} t$).

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{km}{k^2m^2-nm} \Big|^{:m} = \frac{k}{k^2m-n}$ НОД$(k; k^2m-n)=1$, а значит

НОД$(k;n)=1$. m_{max} будет при наим. k, $k=1$: $a+b=m$

тогда: $\cancel{(a+b)}$: $8ab \vdots (a+b)$. $8ab = t(a+b)$, $t \in \mathbb{N}$. $t\left(\frac{a+b}{8ab}\right)=1$

$= t\left(\frac{a}{8b}+\frac{b}{8a}\right)$ ~~несократимы знамен~~ ~~$\frac{a}{8b}+\frac{b}{8a}$ – несократима, чтобы~~

$t \in \mathbb{N}$ ~~требуется чтобы~~ $t = \frac{8ab}{a+b}$, т.к. ~~t~~ НОД$(a;b)=1$,

то $\frac{ab}{a+b}$ – несократима, т.е. макс. m при $a+b=m=8$.

Ответ: $m=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

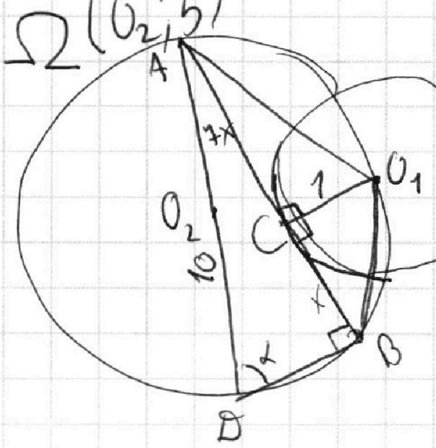
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3.

$\Omega(O_2; 5)$

$w(O_1; 1)$



т.к. $AC : BC = 7$, пусть $BC = x \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 7x$.

$AD = 2\cdot 5 = 10$

Проведем диаметр AD, тогда

$\angle ABD = 90^\circ$ (опир на диаметр)

Проведем $CO_1 (\perp AB)$ и O_1B, AO_1

$CO_1 = 1$. Пусть $\angle ADB = \alpha$, тогда, т.к. AO_1BD впис. в окружность, то $\angle AO_1B = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - \alpha$

$tg\angle AO_1C = 7x$, $tg\angle CO_1B = x$, $tg\angle AO_1B = tg(180^\circ - \alpha) = tg(\angle AO_1C + \angle CO_1B) =$
$= \dfrac{tg\angle AO_1C + tg\angle CO_1B}{1 - tg\angle AO_1C\, tg\angle CO_1B} = \dfrac{7x + x}{1 - 7x \cdot x} \Rightarrow tg\,\alpha = \dfrac{8x}{7x^2 - 1}$, но из Δ-ка ABD $tg\,\alpha = \dfrac{8x}{\sqrt{100 - 64x^2}} \Rightarrow 7x^2 - 1 = \sqrt{100 - 64x^2} \;|^2$

$49x^4 - 14x^2 + 1 = 100 - 64x^2 \Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$, т.к. $49 + 50 - 99 = 0$,

то $x_1^2 = 1$, а $x_2^2 = -\frac{99}{49}$ $\varnothing$ $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$. $AB = 8x = 8$

Ответ: 8

МФТИ

№4. $\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$ ОДЗ: $2x^2-5x+3\geq 0$; $2x^2+2x+1=x^2+(x+1)^2\geq 0$ всегда

$x\leq 1$ и $x\geq \frac{3}{2}$

$2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$, $2x^2+2x+1$ - не рассм на мн, т.к. этот многочлен не им. корней.

т.е. $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}>0$ всегда. Умножим левую и правую часть на $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}$.

$2x^2-5x+3-2x^2-2x-1=(2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1})$

$2-7x=(2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1})$

$(2-7x)(1-(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}))=0$

1. $x=\frac{2}{7}$. $2\cdot\frac{4}{49}-5\cdot\frac{2}{7}+3=\frac{8}{49}-\frac{10}{7}+3=-\frac{62}{49}+3>0$ подходит под О.Д.З.

2. $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1\Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}$ $|^2$

$\cancel{2x^2}-5x+3=1-2\sqrt{2x^2+2x+1}+\cancel{2x^2}+2x+1\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+2x+1}=7x-1$ $|^2$ и $7x-1\geq 0\Rightarrow x\geq\frac{1}{7}$.

$4(2x^2+2x+1)=49x^2-14x+1=8x^2+8x+4\Rightarrow$

$\Rightarrow 41x^2-22x-3=0$ $D_1=121+123=244=(2\sqrt{61})^2$.

$x_1=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}<\frac{1}{7}$ $\varnothing$. $x_2=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}\geq\frac{1}{7}$ и ≤ 1 подходит под О.Д.З.

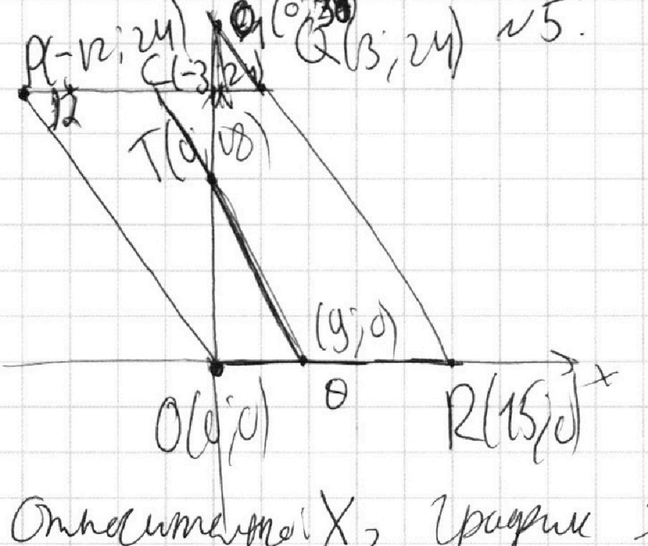
Ответ: $x=\left\{\frac{2}{7};\frac{11+2\sqrt{61}}{41}\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



№5.

$A(x_1;y_1), B(x_2;y_2) \in OPQR$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$

$tg\alpha = 2$ (вариант $A(x_1;y_1)$

Выразим через $x_1, x_2, y_1 \to y_2$ (1)

$y_2=-2x_2+2x_1+y_1+12$

Относительно x_2 график этой ф-ции — прямая $\parallel$ ~~стороне~~ PO и QR параллелограмма, т.е. если хотя бы одна т. графика принадлежит параллелограмму, то ей принадлежат сразу 13 (целочисленных) точек ~~значит~~ всего в параллелограмме таких точек ~~13~~ $\cdot 16$, а прямая, задаваемая этим графиком принадлежит параллелограмму, если $2x_1+y_1+12 \le 30$ и $2x_1+y_1+12 \ge 0$.

графики параллельны PO и QR $\begin{cases} y_1 \le -2x_1+18 \\ y_1 \ge -2x_1-12 \end{cases}$ т.к. $(x_1,y_1) \in OPQR$, то $y_1 \ge -2x_1-12$ выполняется.

$y_1 \ge -2x_1$. и $\begin{cases} y_1 \le -2x_1+18 \\ y_1 \ge -2x_1 \end{cases}$, т.е. подходят все точки ограниченные CD ($\parallel$ PO и $\parallel$ QR и проходящей через T(0;18). C(-3;24) D(9;0)), PQ, PC, OD. Всего таких точек $13 \cdot 10 = 130$ и для каждой из этих точек можно выбрать т. $B(x_2,y_2)$ ~~13·10 способами~~ 13·16 способами

Всего $130 \cdot 13 = 1690$ способов, но для каждой прямой $\parallel PO$ с целой координатой $(0; x (x \in \mathbb{Z}))$ ~~найдется~~ из промежутка $x \in [0;9]$ найдется точка с целочисл координатами, что она совпадет с (1). общее число вариантов: $2(1690-13 \cdot 10) = 3120$ Ответ: 3120

A,B и B,A равносильны

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

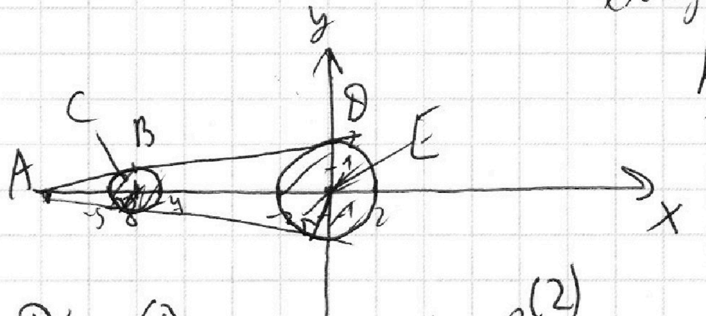
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \text{ и} \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}(x+8)^2+y^2\le 1\\ x^2+y^2\ge 4\end{cases} \\ \begin{cases}(x+8)^2+y^2\ge 1\\ x^2+y^2\le 4\end{cases}\end{array}\right.$$

нарисуем графики ф-ций $(x+8)^2+y^2=1$ – окр. с центр $(-8;0)$ радиус 1
$x^2+y^2=4$ – окр. центр $(0;0)$ радиус 2

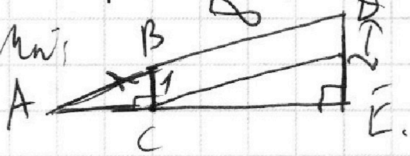


Заметим, что эта совокупность равносильна:

$$\left[\begin{array}{l}(x+8)^2+y^2\le 1\\ x^2+y^2\le 4\end{array}\right.$$

Р/С (1): $y=ax+10b$ (2) – прямая, т.к система должна иметь ровно 2 решения, то подходит только 2 прямые, изобр. на графике, они касаются окружностей

т/к конструкция:



проведем через C прямую $\parallel AB$ и перес. DE в т. T, BCTD – параллелограмм $\Rightarrow CT=8$, $DT=1 \Rightarrow TE=1 \Rightarrow CE=\sqrt{63}$

$$\operatorname{tg}\angle ABC=\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AE}=\frac{DE}{AC+CE}=\frac{1}{AC}=\frac{2}{AC+\sqrt{63}} \Rightarrow 2AC=AC+\sqrt{63} \Rightarrow AC=\sqrt{63} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\angle ABC=\frac{1}{\sqrt{63}}$. В уравнении (2) $y=ax+10b$ a = tg угла наклона, т.е либо $a=\operatorname{tg}\angle ABC=\frac{1}{\sqrt{63}}$, либо $a=-\operatorname{tg}\angle ABC=-\frac{1}{\sqrt{63}}$.

Для каждого из этих случаев подбирается единственная b (взятие т. этой прямой). Ответ: $a=\frac{1}{\sqrt{63}}$ или $a=-\frac{1}{\sqrt{63}}$.

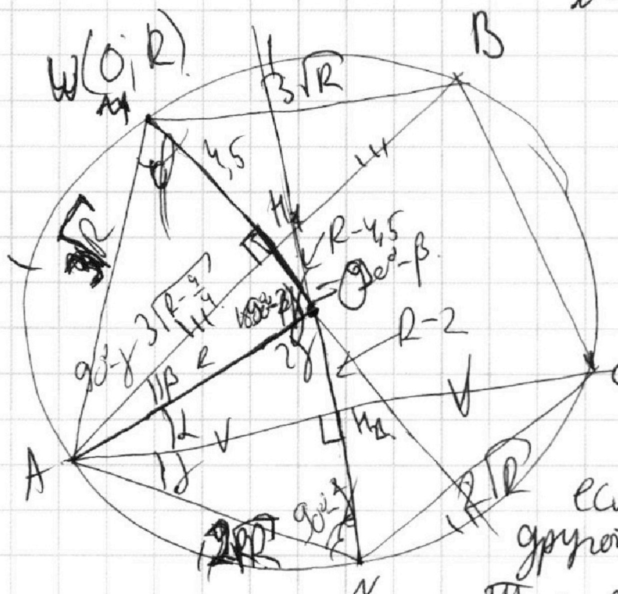
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7.



$MH_1 = 4,5$, $NH_2 = 2$.

т.к. дуги $\breve{AM}$ и $\breve{MB}$ равны, то равны и стягивающие их хорды, т.е. $AM = MB$, тогда из равенства Δ-ков AMH_1 и MH_1B $AH_1 = H_1B$, аналогично $AH_2 = H_2C$

Воспользуемся теоремой: если хорда окружности ⊥ другой и делит её пополам, то эта хорда - диаметр. Т.е. если продлить MH_1 и NH_2, то они будут диаметрами. Из Δ-ка AH_1O: $AH_1^2 = R^2 - (R-\frac{9}{2})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AH_1 = \sqrt{9R - \frac{81}{4}}$, аналогично из Δ-ка AOH_2: $AH_2 = 2\sqrt{R-1}$

$3\sqrt{R-\frac{9}{4}}$

из Δ-ка AMH_1: $AM = \sqrt{9R - \frac{81}{4} + \frac{81}{4}} = 3\sqrt{R}$, из Δ-ка AH_2: $AN =$

$= \sqrt{4R - 4 + 4} = 2\sqrt{R}$. ~~$\cos\angle OAH_2$~~ $\angle OAH_2 = \alpha$, $\angle OAH_1 = \beta$.

~~$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{2\sqrt{R-1}}{R} \cdot \frac{3\sqrt{R-\frac{9}{4}}}{R} - \frac{R-2}{R} \cdot \frac{R-4,5}{R} = \frac{6\sqrt{R-1}\sqrt{R-\frac{9}{4}} - }{R_2}$~~

~~$\cos(90^\circ - \beta) = \sin\beta = \frac{R-4,5}{R}$. По т. косинусов из Δ-ка AMO:~~

~~$9R = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \frac{R-4,5}{R} = 2R^2 - 2R^2 + 9R$~~

$\angle H_2AN = \gamma$, $\angle AH_2N = 90^\circ - \gamma$. $\cos(90^\circ - \gamma) = \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{R}}$

$\angle AMO = \varphi$ $\cos\varphi = \frac{1,5}{\sqrt{R}}$ Из т. косинусов Δ-ка AMO и AON:

$R^2 = 9R + R^2 - 2 \cdot 3\sqrt{R} \cdot R \cdot \frac{1,5}{\sqrt{R}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

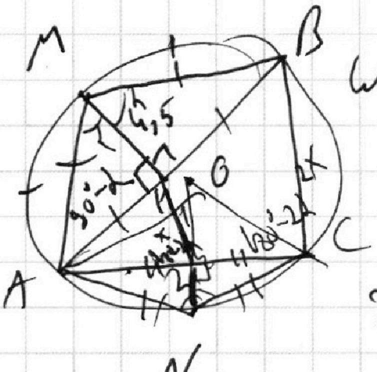
$\underbrace{\sqrt{2x^2-5x+3}}_{a}+\underbrace{\sqrt{2x^2+2x+1}}_{b}=1 \mid \uparrow 2.$ $\begin{cases} a^2+b^2=1 = (a-b)^2+2ab=1 \\ a-b=2-7x. \quad (2-7x)^2+2ab=1. \end{cases}$

$2x^2-5x+3=1-2\sqrt{2x^2+2x+1}+2x^2+2x+1$

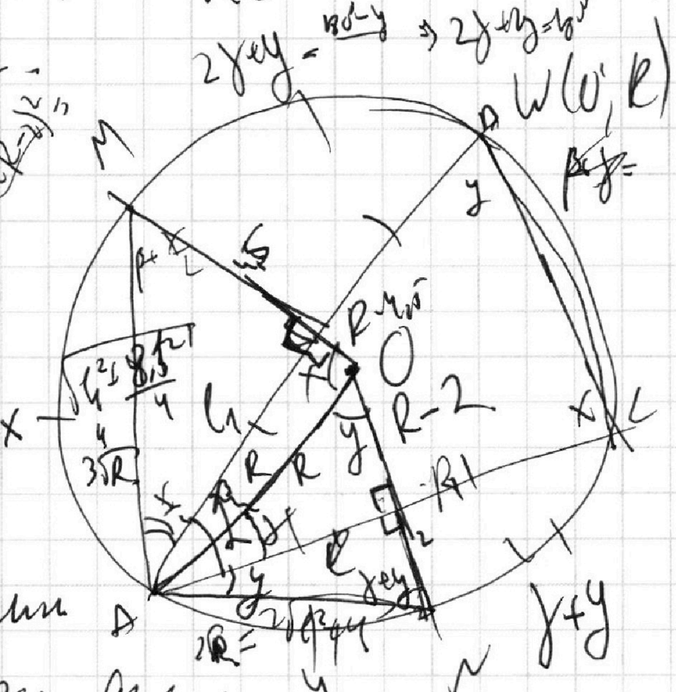
$2\sqrt{2x^2+2x+1}=-1+5x \mid\uparrow 2$ $\quad x\geq+\frac{1}{5}$ $\quad 4(2x^2+2x+1)=25x^2-10x+1$

$8x^2+8x+4=25x^2-10x+1$ ...

$2\gamma+y=180^\circ-y \Rightarrow 2\gamma+2y=180^\circ$



$l^2=4R-4$



Лемма. Если хорда перп. другой хорде и делит ее пополам то эта хорда — диаметр.

$\alpha=180^\circ-x-y$. $\quad \frac{x}{2}+\alpha+\frac{y}{2}=180^\circ-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)$, $\quad tg\frac{y}{2}=\frac{2}{l}$ $\quad tg\gamma=\frac{R-2}{l}$

$=\frac{\sqrt{R^2-l^2}}{l} \Rightarrow (R-2)^2=R^2-l^2$ $\quad R^2-4R+4=R^2-l^2 \Rightarrow l^2=4R-4.$

$tg x=\frac{4{,}5}{l_1}$, $\quad tg\beta=\frac{R-4{,}5}{l_1}=\frac{\sqrt{R^2-l_1^2}}{l_1}$ $\quad R^2-9R+\frac{81}{4}=R^2-l_1^2$

$l_1^2=9R-\frac{81}{4}$ $\quad \cos y=\frac{l}{\sqrt{l^2+4}}$ $\quad l^2+4=R^2-R^2-4R+4$

$\gamma+y=180^\circ-\gamma-y$ $\quad 2(\gamma+y)=\frac{180^\circ-y}{2}$ $\quad \gamma+y=90^\circ-\frac{y}{2}$ $\quad \gamma=\frac{\pi}{2}-\frac{3y}{2}$

$tg(\gamma)=ctg\left(\frac{3y}{2}\right)=\frac{1}{tg\left(\frac{3y}{2}\right)}=\frac{1+\cos 3y}{}$ $\quad tg\left(90^\circ-\frac{y}{2}\right)=\frac{1}{tg\left(\frac{y}{2}\right)}=\frac{\sin y}{1-\cos y}$

$\cos\left(90^\circ-\frac{y}{2}\right)=\sin\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos y}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{l}{\sqrt{l^2+4}}}{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик $a, b, c \in N$, $ab \vdots 2^{14}7^{16}$, $bc \vdots 2^{17}7^{17}$, $ac \vdots 2^{20}7^{37}$.

abc $\quad \frac{ab^2c}{ac}$ $\quad a = 2^{k_1}7^{n_1}$, $b = 2^{k_2}7^{n_2}$, $c = 2^{k_3}7^{n_3}$.

$ab = 2^{k_1+k_2}7^{n_1+n_2}$, $bc = 2^{k_2+k_3}7^{n_2+n_3}$, $ac = 2^{k_1+k_3}7^{n_1+n_3}$

$abc = 2^{k_1+k_2+k_3}7^{n_1+n_2+n_3}$

$\begin{cases} k_1+k_2 \geq 14 \\ k_2+k_3 \geq 17 \\ k_1+k_3 \geq 20 \end{cases}$ $+$ $2(k_1+k_2+k_3) \geq 51 \Rightarrow k_1+k_2+k_3 \geq 25{,}5$, т.е

наим $k_1+k_2+k_3 = 26$, аналогично с

$n_1+n_2+n_3$: $2(n_1+n_2+n_3) \geq 64 \Rightarrow n_1+n_2+n_3 \geq 32$, $\min = 32$

Ответ $abc_{\min} = 2^{26}7^{32}$

$\frac{a}{b}$ - несократима, $a \in N$, $b \in N$ (т.е $\text{НОД}(a,b) = 1$)

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$. $\quad$ т.е $(a+b)^2 = k^2m^2$. $\quad a+b = m$, $8ab = km$. $\quad$ на что дробь можно сократить на m? $\quad k(a+b) = 8ab$. $\quad ka+kb = 8ab$.

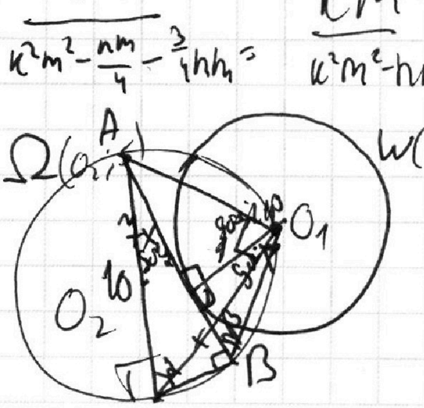
$\frac{a+b}{m} \in N$ и $\frac{8ab}{m} \in N$. $\quad a+b = km$, $8ab = nm$, $k, n \in N$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = k^2m^2$ $\quad k^2m^2 \geq 4\frac{nm}{2}$ $\quad 2ab = \frac{nm}{4}$ $\quad 6ab = \frac{3}{4}nm$

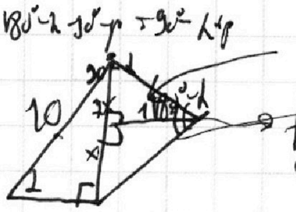
$a^2+b^2 = k^2m^2 - \frac{nm}{4} = m(k^2m - \frac{n}{4})$ $\quad m(km - \frac{n}{2}) \geq 0$

$\frac{km}{k^2m^2 - \frac{nm}{4} - \frac{3}{4}nm} = \frac{km}{k^2m^2 - nm} = \left(\frac{k}{k^2m-n}\right)$ $\quad \frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{(a+b)^2}{m} - \frac{8ab}{m}}$ $\quad tg\,\alpha = \frac{8x}{\sqrt{100-64x^2}}$ $\quad tg(\alpha) = \frac{8x}{7x^2-1}$

$\Omega(O_2, r)$ $\quad \omega(O_1, 1)$ $\quad A\,O_1BT$ вписанный



$180°-\alpha-90°-\beta = 90°-\alpha+\beta$



$tg\,\gamma = 7x$, $tg\,\beta = x$.

$tg(\beta+\gamma) = \frac{tg\beta + tg\gamma}{1 - tg\beta\, tg\gamma} = \frac{8x}{1-7x^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{100-64x^2} = 7x^2-1$ $100-64x^2 = 49x^4-14x^2+1$ $t=x^2$ $t\geq 0$

$49x^4+50x^2-99=0$ $t_1=1, t_2=-\frac{99}{49}$ $\Rightarrow AB=8$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \mid \cdot (\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1})$

$(2x^2-5x+3-2x^2-2x-1) = (2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1})$

$(2-7x)(1-\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1})$

проверить О.Д.З.

1. $x=\frac{2}{7}$, 2 $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$ → мин: $x_0=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

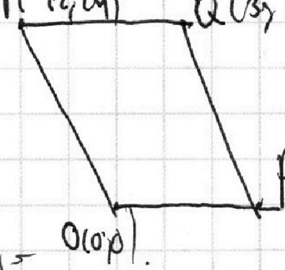
$\frac{25}{8}-\frac{25\cdot 2}{4}+3$ $-\frac{25}{8}+3$ $\frac{5}{4}$ $\frac{\sqrt{5}}{2}>1$ $\frac{25}{2}+\frac{25}{9}+3$ $\frac{1}{4}-1+1$

$\frac{a+b}{2} \geq 2\sqrt{ab}$

$a^2-b^2=2-7x$

$P(-12;24)$ $Q(3;24)$ $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$. $AB(x_2-x_1, y_2-y_1)$

$x_2 \cdot 2x_2 \Rightarrow x_1+y_2-y_1=12$



$R(15;0)$ $2(x_2-x_1)+y_2-y_1=12$

$O(0;0)$

$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2+y^2\leq 1 \\ x^2+y^2\geq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2\geq 1 \\ x^2+y^2\leq 4 \end{cases} \end{array}\right.$ $\rightarrow (x+8)^2+y^2\leq 1$ $\rightarrow x^2+y^2\leq 4$

$\frac{a+b}{8ab}=\frac{a}{8b}+\frac{b}{8a}$ неважно

$ax-y+10b=0$

$ax=y-10b$. $x=0$; $y=10b$

$a=\frac{y-10b}{x}$ $x\neq 0$ един. точка

$y=ax+10b$ x,y - уд. точке

2 прямые, чтобы система имела 1 решение:

$tg\alpha = \frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{63}+x} \Rightarrow \sqrt{63}+x=2x \Rightarrow x=\sqrt{63}$

$tg\alpha=\frac{1}{\sqrt{63}}$. $10b=\pm 2$.