



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



√1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

√2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

√3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

√4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Из условия:

$$ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Тогда, перемножив полученные неравенства,  
получим:  $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64}$ . С другой стороны,

$a^2 b^2 c^2 = (abc)^2$ . Поэтому любое простое число должно вхо-  
дить в разложение данного числа в четной степени.

Значит, если  $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64}$ , то и  $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{52} \cdot 7^{64}$ . Поэтому

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{52} \cdot 7^{64} \quad \text{Тогда} \quad \sqrt{a^2 b^2 c^2} \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

То есть  $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$ . Пример, для которого

неравенство превращается в равенство: также,

из пункта ~~условия~~ условия  $ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$ . Показав,

что  $abc \geq 7^{37}$ . То есть  $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$ . Пример,

когда  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ :  $b = 2^6$ ;  $a = 2^9 \cdot 7^{17}$ ;  $c = 2^{11} \cdot 7^{20}$ .

Для данного набора условия выполняются.

Ответ: ~~abc~~  $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{\cancel{a+b}}{(a+b)^2-8ab} \quad \sqrt{0_2} \quad \text{Т.к. по условию } \frac{a}{b} - \text{ несок-}$$

ратима, то  $(a, b) = 1$ . Пусть числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ . Тогда:

$$\begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2 - 8ab : m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b : m \\ -8ab : m \end{cases}$$

Пусть  $a$  или  $b : m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ . И пусть  $a$  или  $b : p_i^{\alpha_i - k}$  ( $k < \alpha_i$ ). Тогда заметим, что  $a+b \not\vdots p_i^{\alpha_i - k}$ . Т.к. из-за  $(a, b) = 1$ , если  $a : p_i^{\alpha_i - k}$ , то  $b \not\vdots p_i^{\alpha_i - k}$ , и наоборот. А значит,  $(a+b) \not\vdots m$ , т.к.  $p_i^{\alpha_i - k}$  ~~не делится на~~  $m$ . Из этого  $(ab, m) = 1$ .

Поэтому  $8 : m$ , из этого  $m \leq 8$ . При  $m = 8$ , пример:  $a = 1, b = 7$ .

Ответ: при  $m = 8$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{04}$$
$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

дажножи левую и правую часть на  $(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$

Мы можем это сделать, т.к. ~~корректности~~ ~~были бы~~ ~~цел~~ ~~следует~~

не потеряем условие на то, что корни должны быть  $\geq 0$ .

$$2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1 = (2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$$

$$(2-7x) = (2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$$

$$a) 2-7x = 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

~~f(x) = \sqrt{2x^2-5x+3}~~ определен, когда  $2x^2-5x+3 \geq 0$ .

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1.$$

$$x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-1}{4} = 1.$$

$$\text{Решению } D(f) = (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$g(x) = \sqrt{2x^2+2x+1}$  определен, когда  $2x^2+2x+1 \geq 0$ .

$$D = 4 - 4 \cdot 2 = -4.$$

$$\text{т.е. } D(g) = (-\infty; +\infty).$$

Значит,  $x = \frac{2}{7}$  подходит.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\delta) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1. \quad (1)$$

Из пред. пункта  ~~$x_{\text{верш. } g(x)} =$~~

~~$2x^2 + 2x + 1 \geq k$ , где  $k$~~

$$g(x) = 2x^2 + 2x + 1 = \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}. \quad \text{т.е. } g(x) \geq \frac{1}{2}.$$

Также заметим, что нам подходят только  $g(x) = \frac{1}{2}$  при  ~~$x =$~~

$x \in [-1; 0]$ . т.к. иначе  $g(x) > 1$ , а значит и (1) не  
будет выполняться.

Козаметим, что на данном промежутке

$f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} > 1$ . ведь вершина у  $f(x)$  находится

в  $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$  из ~~предыдущ.~~ пункта (а), т.е. правее ~~(0)~~

А  $f(0) = \sqrt{3} > 1$ . ~~Тогда~~

Тогда в пункте (б) корней нет.

Ответ:  $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{06}$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0. \text{ При}$$

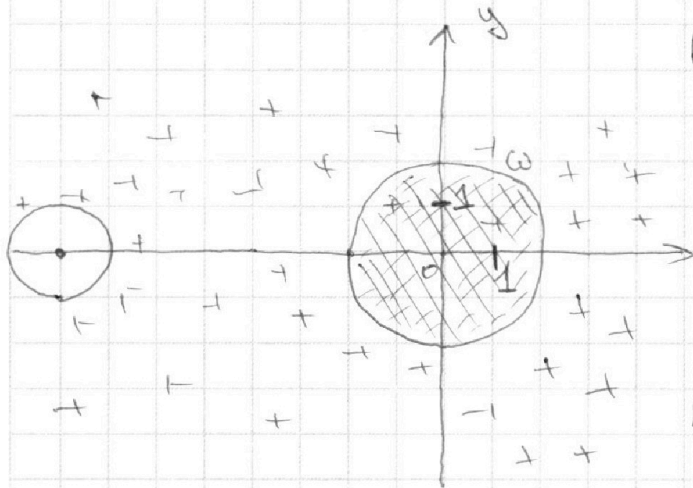
$$\text{а) } \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0. \end{cases}$$

На коорд. плоскости это будет

иметь след. вид:

Т.к. у нас система, то нам

необходимо пересечение  
данной "+" и "|||". Т.е.



область "|||" Но за-  
круг радиуса 2 с центром в (0,0)  
метим, что для данного

пересечения нам надо, чтобы

у нас было два решения для системы. Т.е. прямая

$ax - y + 10b = 0$  - секущая для круга  $\omega$ . Но тогда у нас

найдется хотя бы одно решение внутри круга. ~~Противо-~~

~~решение~~. Тогда будет  $> 2$  решений. Противоречие.

$$\text{б) } \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0. \end{cases}$$

На коорд. плоскости это будет иметь след. вид:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

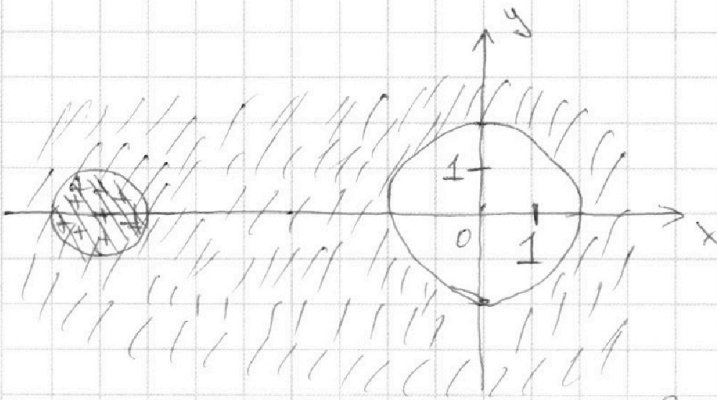
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. у нас система, то возм. решения это пересечение "||||" и "++". т.е. "||||". Дальнейшее рассуждения аналогичны точке (a)  $\uparrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{круге радиуса } 1 \text{ с центром} \\ \text{в } (-8; 0) \end{array} \right.$

Таким образом, решений не будет. ~~684~~

Ответ: таких  $a$  не существует





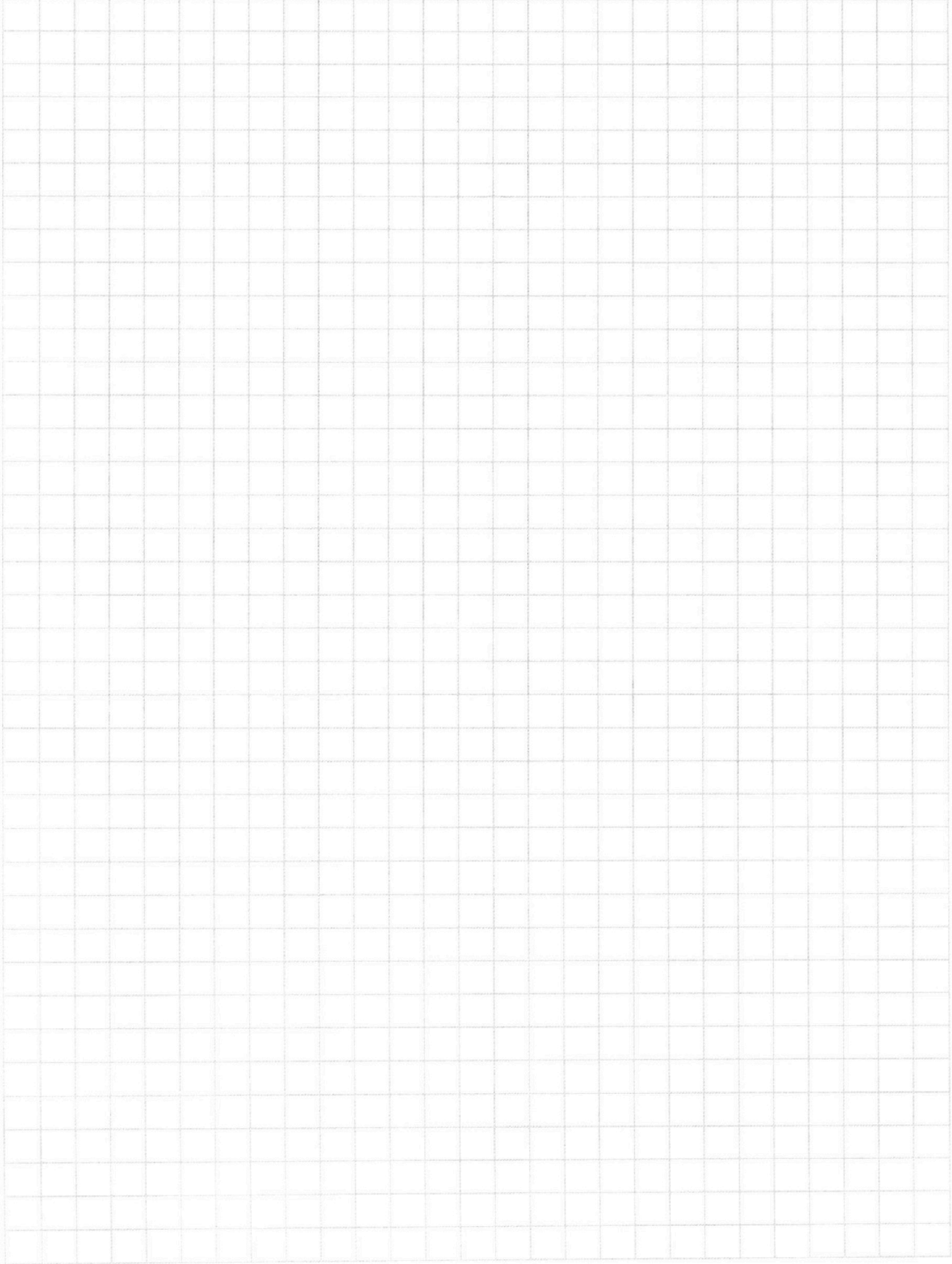
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2) Из условия  $(a, b) = 1$ .

$$a^2 - 8ab + b^2 = (a-b)^2 - 4ab$$

$$((a+b) \frac{2}{m}; (a-b)^2 - 4ab) = m$$

$$a_{i+1} + (a_{i+1} + b_{i+1})(a_{i+2} - b_{i+2})$$

$$((a-b); (a-b)^2 - 8ab) = m$$

||  
↓

$$\frac{(a-b) \equiv 0}{m}$$

$$\frac{(a-b)^2 - 8ab \equiv -8ab \equiv 0}{m}$$

Если  $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ . Тогда  $\forall a_i^{\alpha_i} : p_i^{\alpha_i}$ , то

$$(a+b) \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}; \text{т.к. } a \not\equiv b \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

$$m = 8$$

$$a = 2, m = 6, a = 1; b = 7$$

2)  $ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac \geq 2^{30} \cdot 7^{37}$

$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64}$

пусть  $(abc)^2$  все простые входят

в степенях, поэтому  $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{52} \cdot 7^{64}$ .

$$abc \geq \sqrt{2^{52} \cdot 7^{64}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.8)

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 7x) \left( \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$(-7x + 2) = (2 - 7x) \left( \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$25 - 4 \cdot 23 = \sqrt{25 - 2 \cdot 29} \Rightarrow 1$$

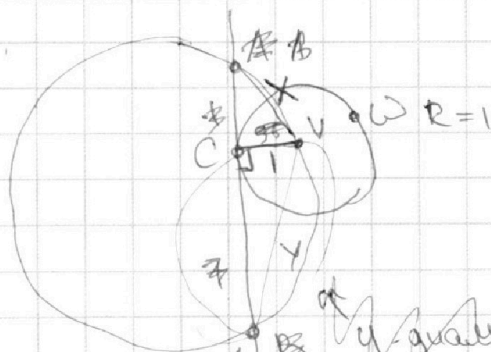
$$u = 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \in [-4, 0]$$

а)  $-7x + 2 = 0 \Rightarrow$  проверить, что  $\sqrt{\quad}$  будут  $> 0$ , тогда ок.

б)  $-1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

↑ неверно, т.к.  $\sqrt{x} \geq 0$ .

3)



$$\frac{y^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{y^2 - 1}{x^2 - 1}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$$

$$\frac{1 + y^2}{1 + x^2} = \frac{49}{1}$$

$$1 + y^2 = 49 + 49x^2$$

$$y^2 = 49x^2 + 48$$

$R = 5$ .

$$\frac{y^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{49}{1}$$

$$y^2 - 1 = 49x^2 - 49$$

$$y^2 = 49x^2 - 48$$

$\omega \triangle OVA$  :  
 $y$  - диаметр.  
 $x$  - диаметр.

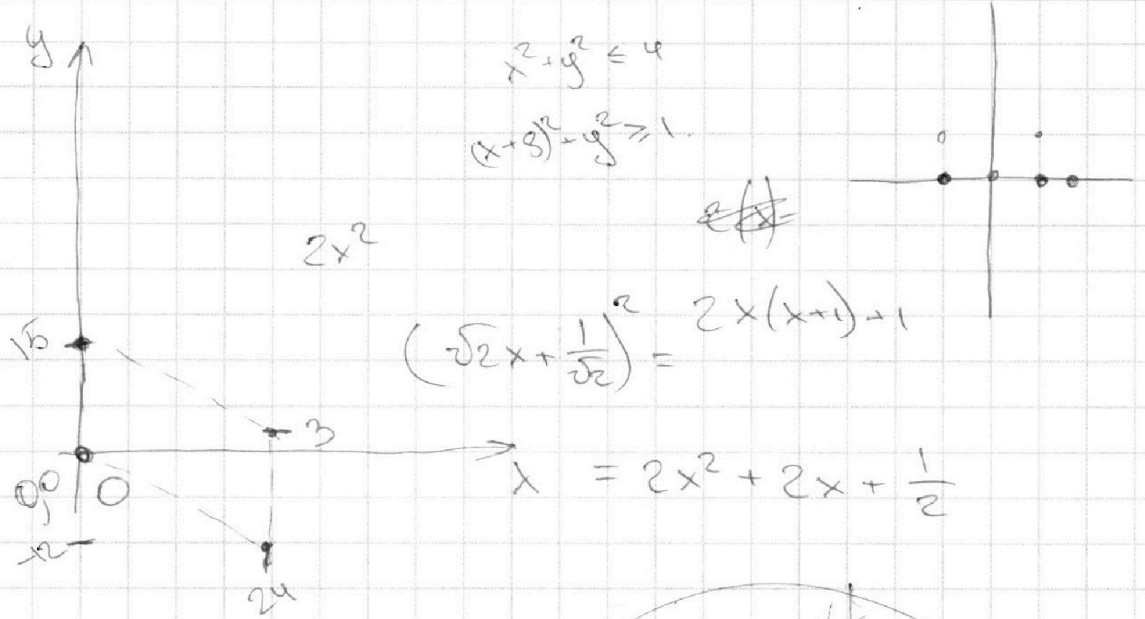
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

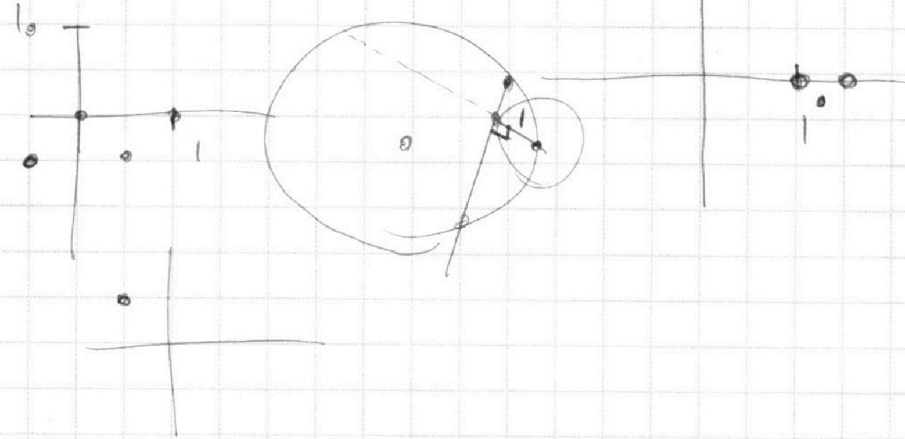
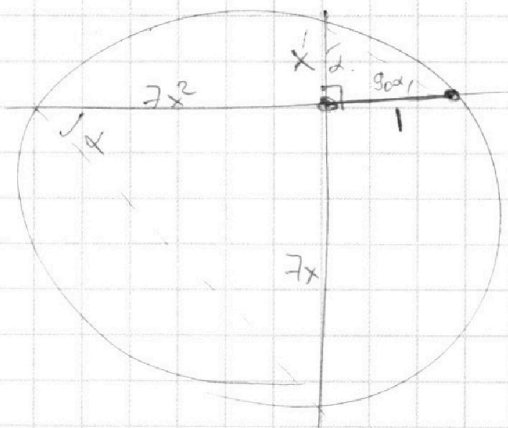


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2(\Delta x) + \Delta y = 12$   
 $|\Delta x|_{\max} = 24$   
 $|\Delta y|_{\max} = 15$

$\Delta y = 2(6 - \Delta x)$   
 Будем рассматривать параллельно



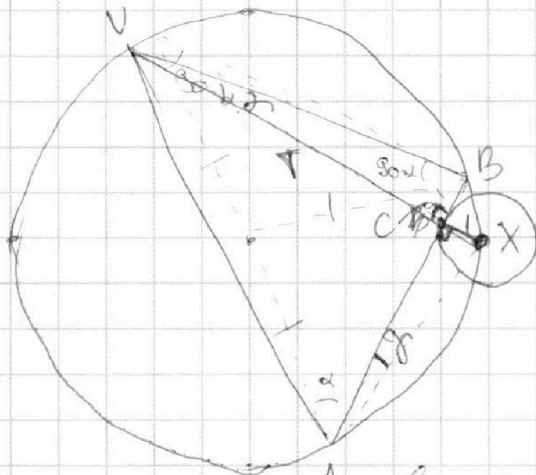
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CA}{CA^2} = \frac{7}{CA}$$

$$\frac{AC}{CB} = 7$$

$$AC^2 + 1 + BC^2 + 1 =$$

$$= 49BC^2 + 1 + BC^2 + 1 =$$

$$= 50BC^2 + 2$$

$$\frac{1}{CA} = \frac{1}{7} \frac{CA}{1}$$

$$CA^2 = 7T$$

$$\frac{CA^2}{7} = T$$

$$T^2 + AC^2 =$$

$$\frac{1}{AC} = \frac{BC}{T}$$

$$T = BC \cdot AC$$

~~$$BC^2 = AC^2$$~~

$$T = 7AC^2$$

$$49AC^4 + AC^2 =$$

$$\frac{22}{10} = \frac{10}{10}$$

$$c > a > b$$

$$A < B < C$$

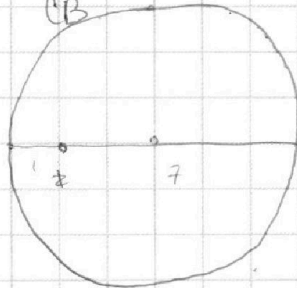
$$c > b$$

$$\frac{AC}{CV} = \frac{CX}{CB}$$

~~$$\frac{CV}{CB} = \frac{CA}{CX}$$~~

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

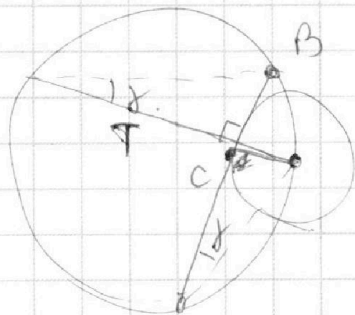
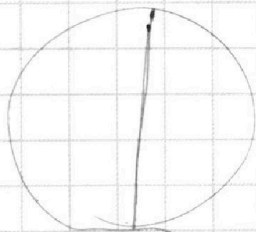
$$\frac{11}{9} = \frac{10}{6}$$



$$\frac{9}{9} = \frac{8}{8}$$

$$\frac{1}{7}$$

$$9 \cdot 3 = 27$$



$$16 + 9 = 25$$

$$26 \cdot \frac{9}{9} = 7$$

$$c = 2^3$$

$$b = 2^{\cancel{1}}$$

$$26/3 =$$

$$52 =$$

$$9 \cdot 3 = 27$$

$$\frac{18}{18} = 17$$