



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



- √1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- √2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- √3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

- √4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Из условия:

$$ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Тогда, перемножив полученные неравенства,
получим: $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64}$. С другой стороны,

$a^2 b^2 c^2 = (abc)^2$. Поэтому любое простое число должно вхо-
дить в разложение данного числа в четной степени.

Значит, если $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64}$, то и $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{52} \cdot 7^{64}$. Поэтому

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{52} \cdot 7^{64} \quad \text{Тогда} \quad \sqrt{a^2 b^2 c^2} \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

То есть $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$. Пример, для которого

неравенство превращается в равенство: также,

из пункта ~~условия~~ условия $ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$. Показав,

что $abc \geq 7^{37}$. То есть $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$. Пример,

когда $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$: $b = 2^6$; $a = 2^9 \cdot 7^{17}$; $c = 2^{11} \cdot 7^{20}$.

Для данного набора условия выполняются.

Ответ: ~~abc~~ $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{\cancel{a+b}}{(a+b)^2-8ab} \quad \sqrt{2} \quad \text{Т.к. по условию } \frac{a}{b} - \text{конец}$$

ратна, то $(a, b) = 1$. Пусть числитель и знаменатель дроби можно сократить на m . Тогда:

$$\begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2 - 8ab : m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b : m \\ -8ab : m \end{cases}$$

Пусть a или $b : m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$. И пусть a или $b : p_i^{\alpha_i - k}$ ($k < \alpha_i$). Тогда заметим, что $a+b : p_i^{\alpha_i - k}$. Т.к. из-за $(a, b) = 1$, если $a : p_i^{\alpha_i - k}$, то $b : p_i^{\alpha_i - k}$, и наоборот. А значит, $(a+b) \not: m$, т.к. $p_i^{\alpha_i - k}$ ~~делит~~ делится на m . Из этого $(ab, m) = 1$.

Поэтому $8 : m$, из этого $m \leq 8$. При $m = 8$, пример: $a = 1, b = 7$

Ответ: при $m = 8$

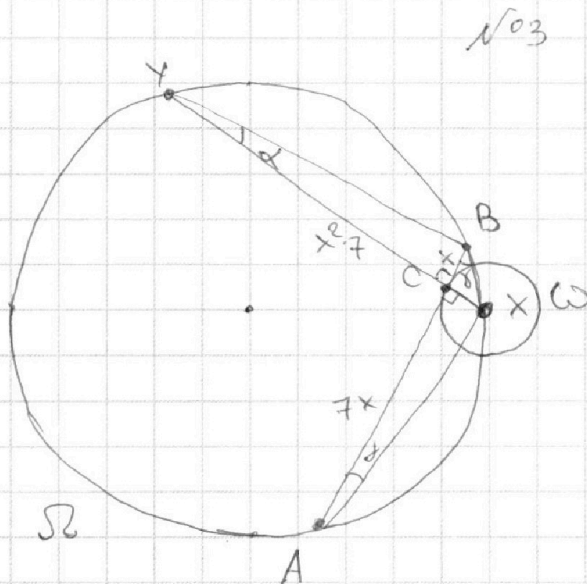
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



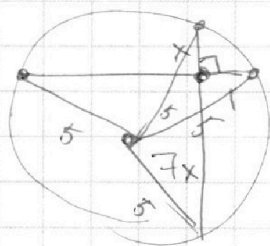
Заметим, что т.к. AB — касательная к ω , то $\angle XCA = 90^\circ$.

$XC = 1$. Продлим XC за C до пересечения с $\partial\Omega$, назовем точку X' . Заметим, что $\angle XCB \simeq \angle X'CB$.

Тогда $\frac{XC}{CA} = \frac{CB}{CX'}$. По условию: $CA = \sqrt{3}CB$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{3}CB} = \frac{CB}{CX'}. \quad CX' = CB^2 \sqrt{3}.$$

Также, $\triangle CX'A \simeq \triangle CBX$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{04}$$
$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

дажножи левую и правую часть на $(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$

Мы можем это сделать, т.к. ~~корректности~~ ~~были бы~~ ~~цел~~ ~~следует~~

не потеряем условие на то, что корни должны быть ≥ 0 .

$$2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1 = (2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$$

$$(2-7x) = (2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$$

$$a) 2-7x = 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

~~f(x) = \sqrt{2x^2-5x+3}~~ определен, когда $2x^2-5x+3 \geq 0$.

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1.$$

$$x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-1}{4} = 1.$$

$$\text{Решению } D(f) = (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$g(x) = \sqrt{2x^2+2x+1}$ определен, когда $2x^2+2x+1 \geq 0$.

$$D = 4 - 4 \cdot 2 = -4.$$

$$\text{т.е. } D(g) = (-\infty; +\infty).$$

Значит, $x = \frac{2}{7}$ подходит.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\delta) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1. \quad (1)$$

Из ~~пред.~~ пункта ~~$x_{\text{верш. } g(x)}$~~ =

~~$2x^2 + 2x + 1 \geq k$, где k~~

$$g(x) = 2x^2 + 2x + 1 = \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}. \quad \text{т.е. } g(x) \geq \frac{1}{2}.$$

Также заметим, что нам подходят только $\left. \begin{array}{l} g(x) = \frac{1}{2} \text{ при } \\ x = -\frac{1}{2} \end{array} \right\}$

$x \in [-1; 0]$. т.к. иначе $g(x) > 1$. а значит и (1) не
будет выполняться.

Козаметим, что на данном промежутке

$f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} > 1$. ведь вершина у $f(x)$ находится

в $\left(\frac{3}{2} + 1\right)$ из ~~предыдущ.~~ пункта (а), т.е. правее ~~(а)~~

А $f(0) = \sqrt{3} > 1$. ~~Тогда~~

Тогда в пункте (б) корней нет.

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{06}$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0. \text{ При}$$

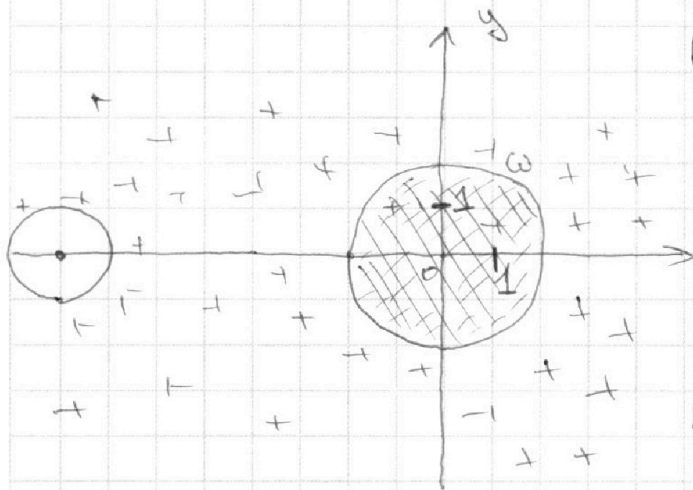
$$\text{а) } \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0. \end{cases}$$

На коорд. плоскости это будет

иметь след. вид:

Т.к. у нас система, то нам

необходимо пересечение
данной "+" и "|||". Т.е.



область "|||" Но за-
круг радиуса 2 с центром в (0,0)
метим, что для данного

пересечения нам надо, чтобы

у нас было два решения для системы. Т.е. прямая

$ax - y + 10b = 0$ - секущая для круга ω . Но тогда у нас

найдется хотя бы одно решение внутри круга. ~~Противо-~~

~~решение~~. Тогда будет > 2 решений. Противоречие.

$$\text{б) } \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0. \end{cases}$$

На коорд. плоскости это будет иметь след. вид:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

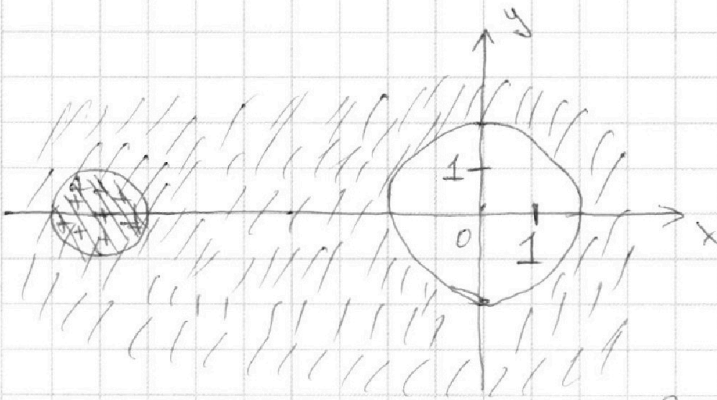
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. у нас система, то возм. решения это пересечение "||||" и "++". т.е. "||||". Дальнейшее рассуждения аналогичны ^{к окружности радиуса 1 с центром в (-8; 0)} пункту (а)

Таким образом, решений не будет. ~~684~~

Ответ: таких a не существует



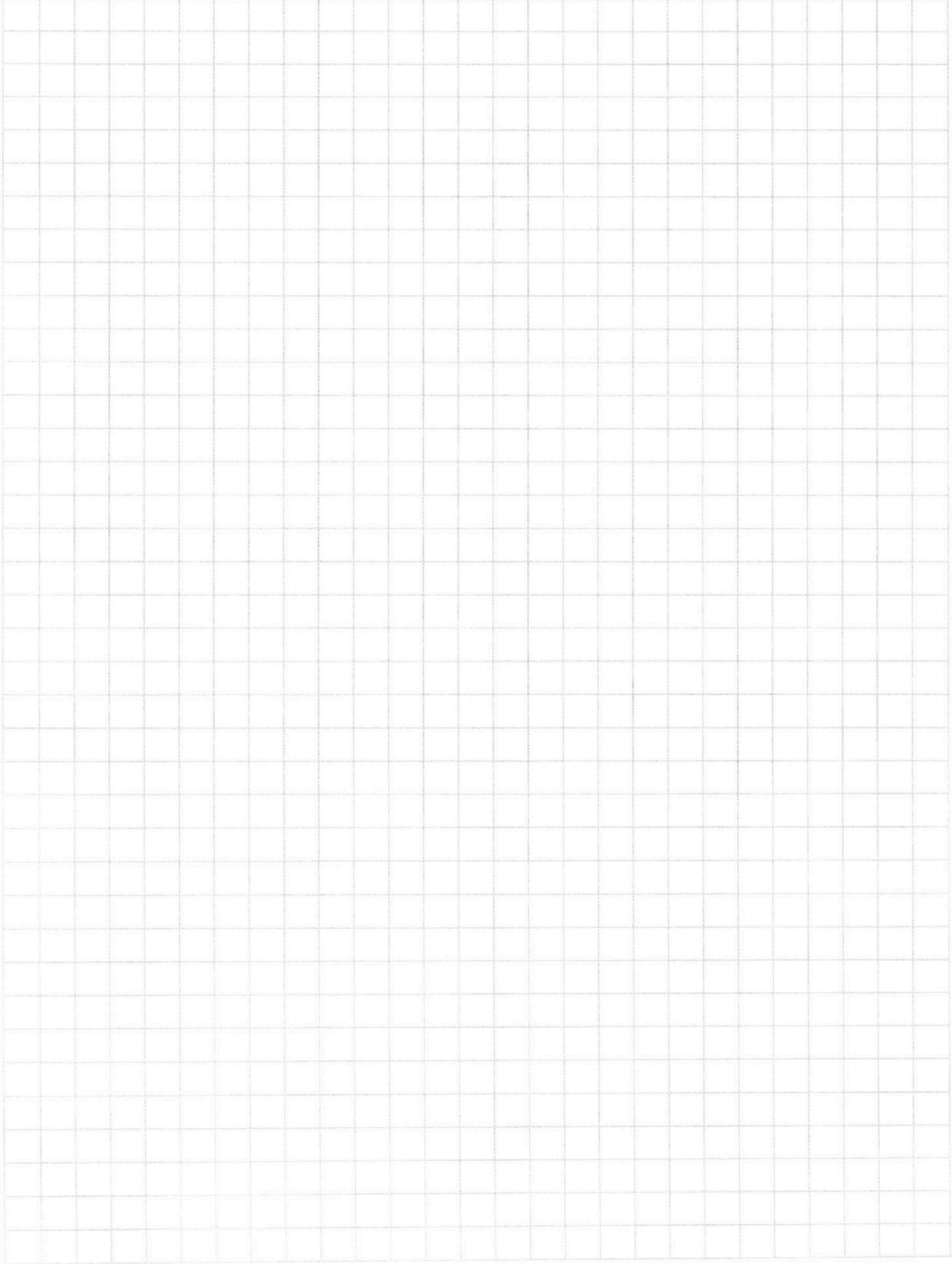
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2) Из условия $(a, b) = 1$.

$$a^2 - 8ab + b^2 = (a-b)^2 - 4ab$$

$$((a+b) \frac{2}{m}; (a-b)^2 - 4ab) = m$$

$$a_1 x + (a_1 x + b_1 y_1)(a_1 x_2 + b_1 y_2)$$

$$((a-b); (a-b)^2 - 8ab) = m$$

||
↓

$$\frac{(a-b) \equiv 0}{m}$$

$$\frac{(a-b)^2 - 8ab \equiv -8ab \equiv 0}{m}$$

Если $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$. Тогда $\forall a_i^{\alpha_i} : p_i^{\alpha_i}$, то

$$(a+b) \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}; \text{т.к. } a, b \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

$$m = 8$$

$$a = 2, m = 6, a = 1; b = 7$$

2) $ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac \geq 2^{30} \cdot 7^{37}$

$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64}$

пусть $(abc)^2$ все простые входят

в степенях, поэтому $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{52} \cdot 7^{64}$.

$$abc \geq \sqrt{2^{52} \cdot 7^{64}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.8)

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$(-7x + 2) = (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$25 - 4 \cdot 23 = \sqrt{25 - 2 \cdot 29} = 1$$

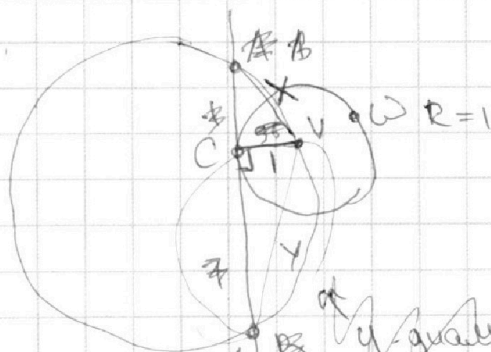
$$u = 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \in [-4, 0]$$

а) $-7x + 2 = 0 \Rightarrow$ проверить, что $\sqrt{\quad}$ будут > 0 , тогда ок.

б) $-1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

↑ неверно, т.к. $\sqrt{x} \geq 0$.

3)



$$\frac{y^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{49}{1}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$$

$$\frac{1 + y^2}{1 + x^2} = \frac{49}{1}$$

$$1 + y^2 = 49 + 49x^2$$

$$y^2 = 49x^2 + 48$$

$R = 5$.

$$\frac{y^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{49}{1}$$

$$y^2 - 1 = 49x^2 - 49$$

$$y^2 = 49x^2 - 48$$

из $\triangle CVA$:
 y - диаметр.
 x - диаметр.

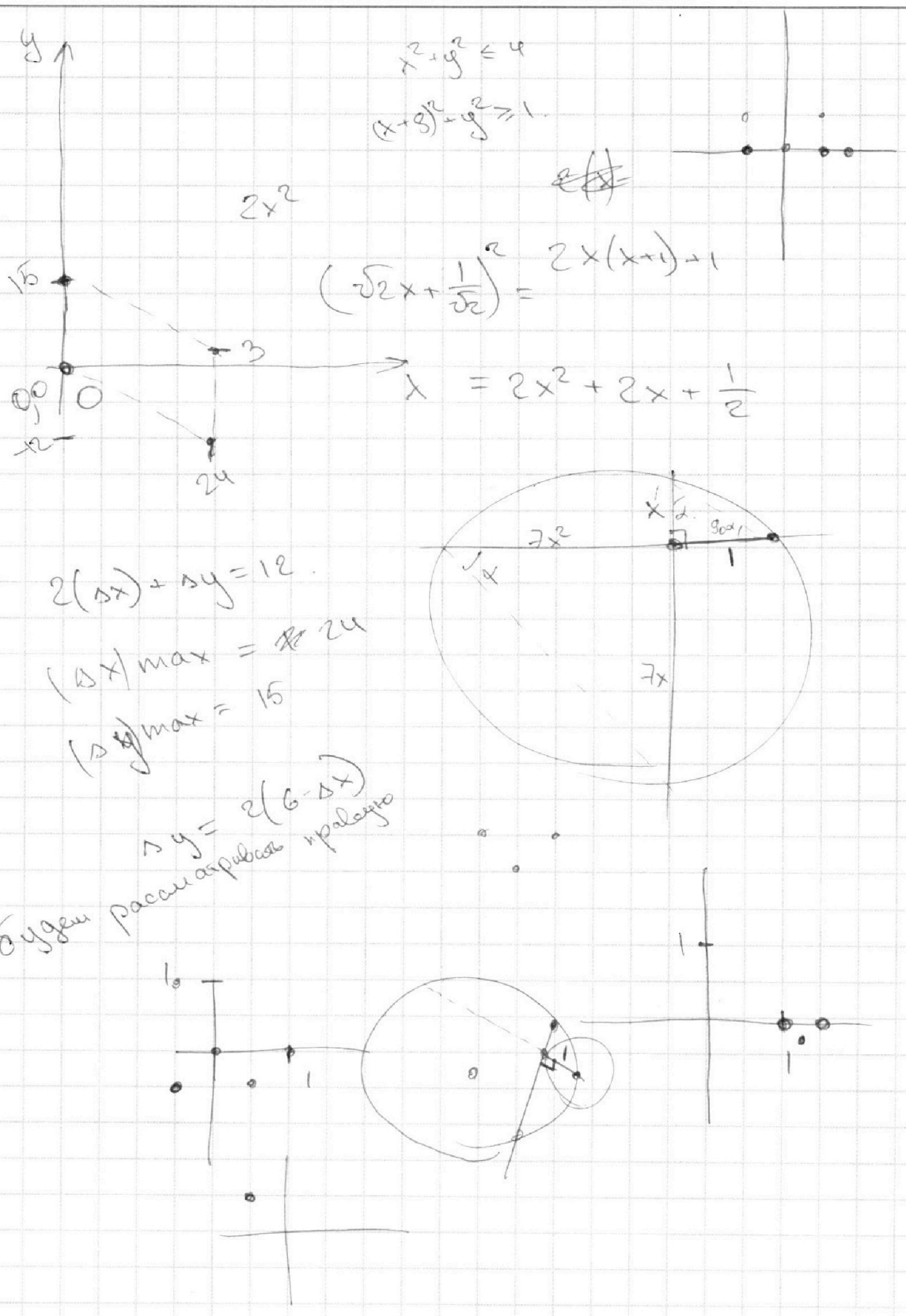
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



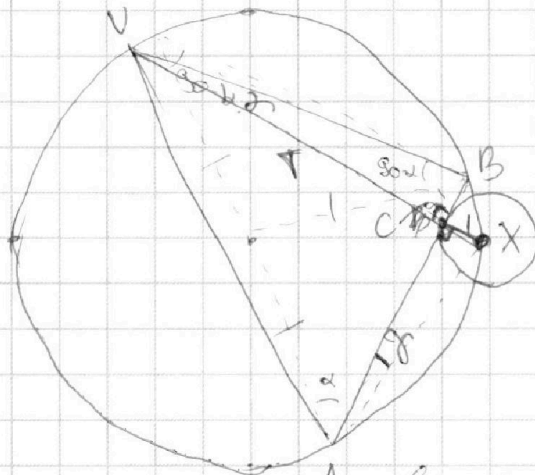
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CA}{CA^2} = \frac{7}{CA}$$

$$\frac{AC}{CB} = 7$$

$$\begin{aligned} AC^2 + 1 + BC^2 + 1 &= \\ &= 49BC^2 + 1 + BC^2 + 1 = \\ &= 50BC^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{CA} = \frac{1}{7} \frac{CA}{4}$$

$$CA^2 = 7T$$

$$\frac{CA^2}{7} = T$$

$$T^2 + AC^2 =$$

$$\frac{1}{AC} = \frac{BC}{T}$$

$$T = BC \cdot AC$$

$$\cancel{BC^2} \cancel{AC^2}$$

$$T = 7AC^2$$

$$49AC^4 + AC^2 =$$

$$\frac{22}{10} = \frac{10}{10}$$

$$c \rightarrow a > b$$

$$A_c \rightarrow b \rightarrow a$$

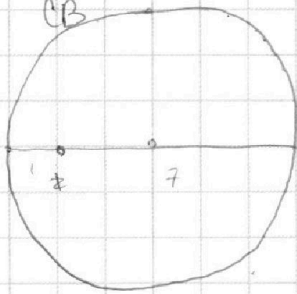
$$c \rightarrow b$$

$$\frac{AC}{CV} = \frac{CX}{CB}$$

$$\frac{CV}{CB} = \frac{CA}{CX}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

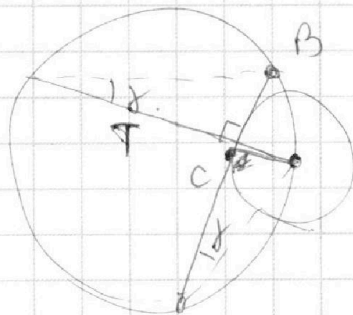
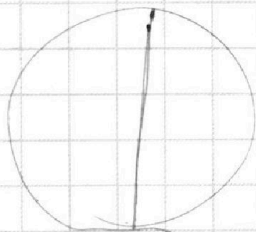
$$\frac{11}{9} = \frac{6}{6}$$



$$\frac{9}{9} = \frac{8}{8}$$

$$\frac{1}{7}$$

$$9 \cdot 3 = 27$$



$$16 \cdot 9 = 27 \cdot 5$$

$$\frac{26}{9} = \frac{9}{9} = \frac{7}{7}$$

$$c = 2^3$$

$$b = 2^{\cancel{3}}$$

$$\frac{26}{3} =$$

$$52 =$$

$$9 \cdot 3 = 27$$

$$\frac{18}{18} = \frac{17}{17}$$