



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



√1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

√2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

√3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

√4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть x_1 - максимальная степень двойки, на которую делится a , x_2 - максимальная степень двойки, на которую делится b , x_3 - максимальная степень двойки, на которую делится c .

$$x_1, x_2, x_3 \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 14 \\ x_2 + x_3 \geq 17 \\ x_1 + x_3 \geq 20 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Сложив все три системы} \\ \text{мы получим} \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{51}{2} \\ \text{т.к. } x_1, x_2, x_3 - \text{целые неотриц.;} \\ \text{то } x_1 + x_2 + x_3 \geq 26 \end{array}$$

Заметим, что $x_1 = 9, x_2 = 5, x_3 = 12$ нам подходит.

П.к нам необходимо минимизировать abc , то нам нужно сделать $x_1 + x_2 + x_3$ минимально возможными. П.к $9 + 5 + 12 = 26$, а по следствию из системы мы получим $x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$, то мы нашли минимум $x_1 + x_2 + x_3$.

~~Пусть x_1 - максимальная степень деления~~
Введем аналогичные обозначения y_1, y_2, y_3 , только для степени семи.

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 \geq 17 \\ y_3 + y_1 \geq 37 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Из третьего ур-я} \\ \text{системы следует} \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 37 \\ \text{Для } y_3 = 17; y_2 = 0; y_1 = 20 - \\ \text{решение системы} \\ y_1 + y_2 + y_3 = 17 + 20 + 0 = 37. \end{array}$$

$$\begin{cases} abc \geq 2^{26} \\ abc \geq 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

"=" достигается при $a = 2^9 \cdot 7^{20}$, $b = 2^5 \cdot 7^{17}$, $c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}$$

т.е. $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

Пусть мы можем сократить дробь на какое-то K , тогда

$$a+b \div K$$

$$(a+b)^2 - 8ab \div K$$

$$(a+b) \div K \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2 \div K \\ (a+b)^2 - 8ab \div K \end{cases} \Rightarrow 8ab \div K$$

Если $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь, то

$$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b, b) = 1$$

$$\text{НОД}(a, a+b) = 1$$

$$a+b \div K$$

$$8ab \div K$$

$$8 \div K$$

$$K \leq 8$$

Приведем пример, когда достигается $K=8$

$$a=3; b=5$$

$$\frac{3+5}{3^2 - 8 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{8}{9^2 - 815} = \frac{1}{1-15} = \frac{1}{14}$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

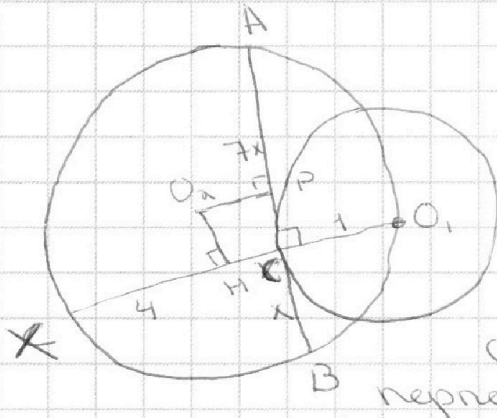
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3



Пусть X — точка касания AB и окруж ω

Продлим прямую O_1X за точку X до пересечения с Ω в точке C

Пусть O_1 — центр ω ,
 O_2 — центр Ω
 перпендикуляр

Опустим HN из O_2 на хорду XC ,
 и на хорду AB , обозначим основания перпендикуляров за H и P соответственно

~~AC~~ ~~BC~~ по св-ву пересекатся хорд AC
 ~~AB~~ ~~XC~~ $CB = O_1C$

$$XC = O_1C = 7$$

$$HX = HO_1 = \frac{O_1X}{2} = 4$$

$$HC = HO_1 - O_1C = 3$$

Заметим, что O_2HCP — прямоугольник
 $O_2P = HC = 3$

$O_2X = 5$, т.к. O_2X — радиус

$$O_2H = \sqrt{O_2X^2 - HX^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$PC = O_2H = 3$$

$$PA = \frac{AB}{2} = 4xy$$

Пусть $CB = y$

$$PC = 7y - 4y = 3y = 3$$

$$y = 1$$

$$8y = 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{ax^2 - 5x + 3} - \sqrt{ax^2 + ax + 1} = a - 7x$$

$$\frac{(\sqrt{ax^2 - 5x + 3} - \sqrt{ax^2 + ax + 1})(\sqrt{ax^2 - 5x + 3} + \sqrt{ax^2 + ax + 1})}{\sqrt{ax^2 - 5x + 3} + \sqrt{ax^2 + ax + 1}} = a - 7x$$

$$\sqrt{ax^2 - 5x + 3} + \sqrt{ax^2 + ax + 1} \geq 0$$

$$\frac{ax^2 - 5x + 3 - ax^2 - ax - 1}{\sqrt{ax^2 - 5x + 3} + \sqrt{ax^2 + ax + 1}} = a - 7x$$

$$\frac{a - 7x}{\sqrt{ax^2 - 5x + 3} + \sqrt{ax^2 + ax + 1}} = a - 7x$$

$$(a - 7x) \left(\frac{1}{\sqrt{ax^2 - 5x + 3} + \sqrt{ax^2 + ax + 1}} - 1 \right) = 0$$

$$\begin{cases} a - 7x = 0 \\ ax^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ ax^2 + ax + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{ax^2 - 5x + 3} + \sqrt{ax^2 + ax + 1} \Rightarrow = 1$$

$$x = \frac{7}{a}$$

$$\sqrt{ax^2 - 5x + 3} + \sqrt{ax^2 + ax + 1} = 1 \quad (1)$$

$$(1) \text{ При } x > 0 \quad \sqrt{ax^2 - 5x + 3} + \sqrt{ax^2 + ax + 1} \geq \sqrt{ax^2 + ax + 1} > 1$$

$$\text{При } x < 0 \quad \sqrt{ax^2 - 5x + 3} + \sqrt{ax^2 + ax + 1} \leq \sqrt{ax^2 - 5x + 3} \leq \sqrt{3}$$

При $x = 0$ — не подходит

Ответ: $\frac{7}{a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

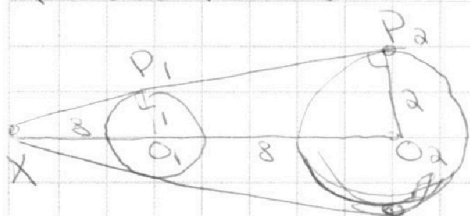
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (продолжение)

Рассмотрим 4 случая

касания



$$\triangle O_1XP_1 \sim \triangle O_2XP_2$$

$$\frac{O_1X}{O_2X} = \frac{P_1O_1}{P_2O_2} = \frac{1}{a}$$

$$a O_1X = O_2X$$

$$O_2X - O_1X = O_1O_2 = 8$$

$$O_2X - O_1X = O_1X = 8$$

X имеет координаты $(-16; 0)$

$$XP_1 = \sqrt{64 - 1} = \sqrt{63} \text{ по т. Пифагора для}$$

$$\triangle XP_1O_1$$

Пусть P_1 имеет координаты $(x; y)$

~~$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+16)^2 + y^2 = 63 \end{cases}$$~~

~~$$32x + 256 = 63 - 4$$~~

~~$$32x = -197$$~~

~~$$x = -\frac{197}{32}$$~~

~~$$y = \pm \sqrt{4 - \frac{197^2}{32^2}} = 2.32$$~~

~~$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ (x+16)^2 + y^2 = 63 \end{cases}$$~~

~~$$(x+16)^2 + y^2 = 63$$~~

$$\begin{array}{r} 10 \\ -256 \\ \hline 63 \\ +193 \\ \hline 4 \\ \hline 197 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (продолжение)

Вычтем из первого ур-я второе

$$\cancel{16x} + 256 - 64 = 62$$

$$16x = -130$$

$$x = -\frac{65}{8}$$

$$y = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \pm \sqrt{\frac{63}{64}} = \pm \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ -128 \\ \hline 65 \\ 65 \end{array}$$

~~тогда~~ тогда

тогда $\sqrt{63}$ напомним

$$a = \pm \frac{\sqrt{63}}{16 \cdot 8 - 65} =$$

$$= \pm \frac{\sqrt{63}}{63} = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\sqrt{63}}{95}; \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N6 (продолжение)

Пусть A имеет координаты $(x; y)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & (1) \\ (x + \frac{16}{3})^2 + y^2 = \frac{160}{9} & (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \quad 2 \cdot \frac{16}{3}x + \frac{256}{9} = \frac{160}{9} - 4$$

$$\frac{32}{3}x = \frac{160 - 36 - 256}{9}$$

$$\frac{32}{3}x = -\frac{132}{9}$$

$$32x = -132$$

$$x = -\frac{33}{24} = -\frac{11}{8}$$

$$y = \pm \sqrt{4 - \frac{33^2}{8^2}}$$

$$y = \pm \sqrt{4 - \frac{33^2}{24^2}} = \pm \sqrt{\frac{(2 \cdot 24 - 33)(2 \cdot 24 + 33)}{24^2}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{5 \cdot 15 \cdot 81}{24^2}} = \pm \sqrt{\frac{45}{64}} = \pm \frac{3}{8} \sqrt{15}$$

~~###~~ Коэффициент b в уравнении $y = ax - 10b$ отвечает за сдвиг прямой.

Получается, чтобы прямая касалась окружности угловой коэффициент ~~(a)~~

$$a = \pm \frac{\frac{3}{8}\sqrt{15}}{(\frac{16}{3} - \frac{11}{8})} = \pm \frac{9\sqrt{15}}{128 - 33} = \pm \frac{9\sqrt{15}}{95}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

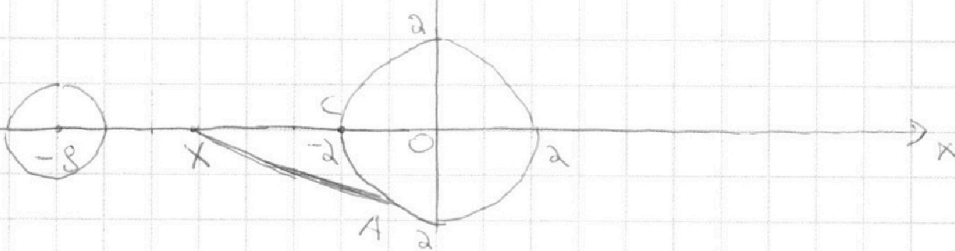
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Решением второго неравенства являются два круга с центрами в точках $(0,0)$ и $(-8;0)$ и радиусами a и 1 соответственно.



П.к. по условию должно быть **только** два решения, то прямая (1) должна касаться этих окружностей.

Прямая, может касаться окружностей двумя способами



В I случае $\triangle O_1 P_1 X \sim \triangle O_2 P_2 X$ по двум углам $\Rightarrow \frac{O_1 X}{X O_2} = \frac{O_1 P_1}{O_2 P_2}$

В II случае y, X будет координата $(-\frac{16}{3}; 0)$

Пусть XA касается отрезка $x^2 + y^2 = 4$

$$XC = \frac{16}{3} - a = \frac{10}{3} \quad XA^2 = XC \cdot XO = \frac{10}{3} \cdot \frac{16}{3} = \frac{160}{9}$$

$$XA = \frac{4}{3}\sqrt{10}$$



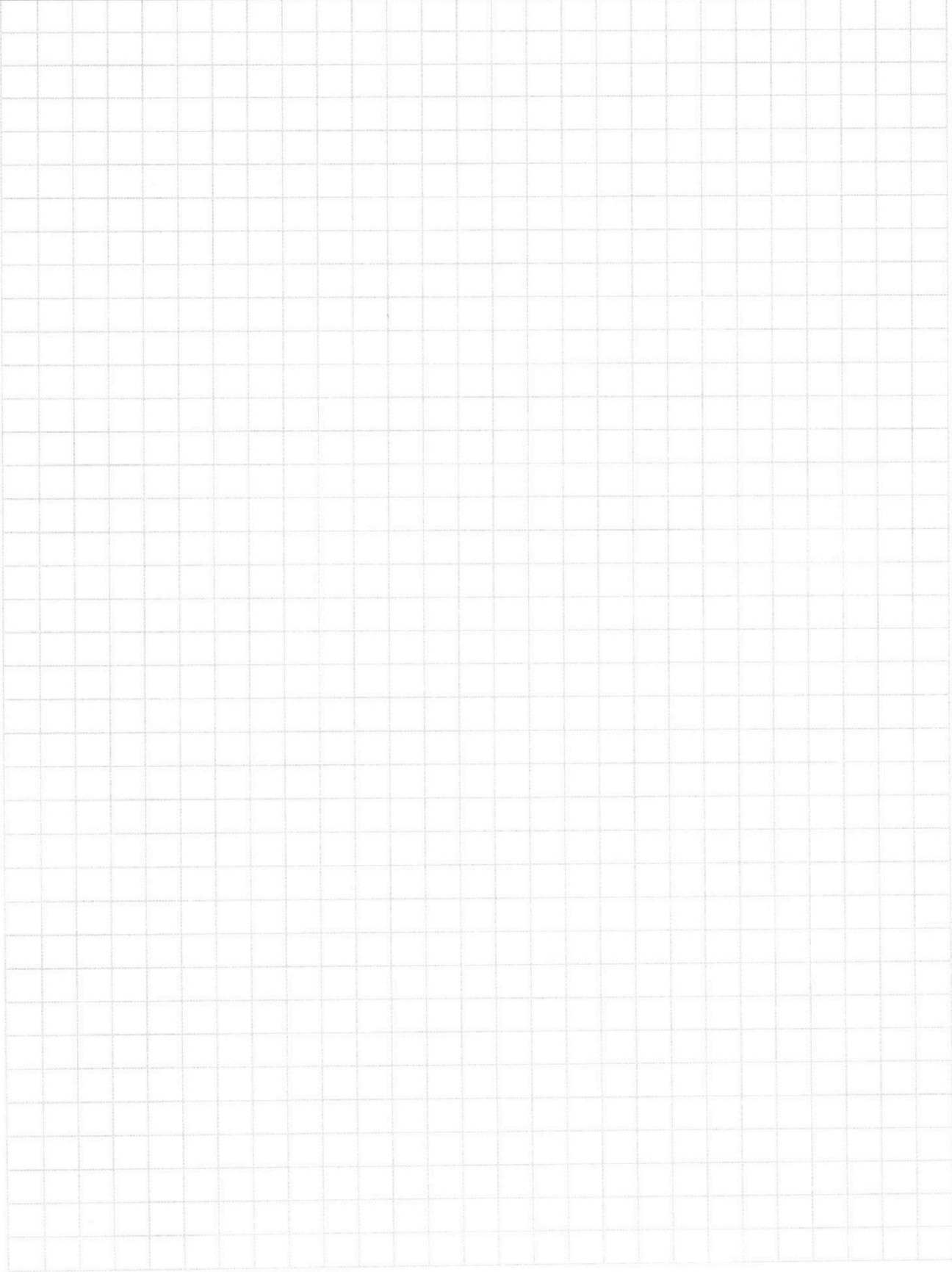
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10\beta = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = \emptyset$$

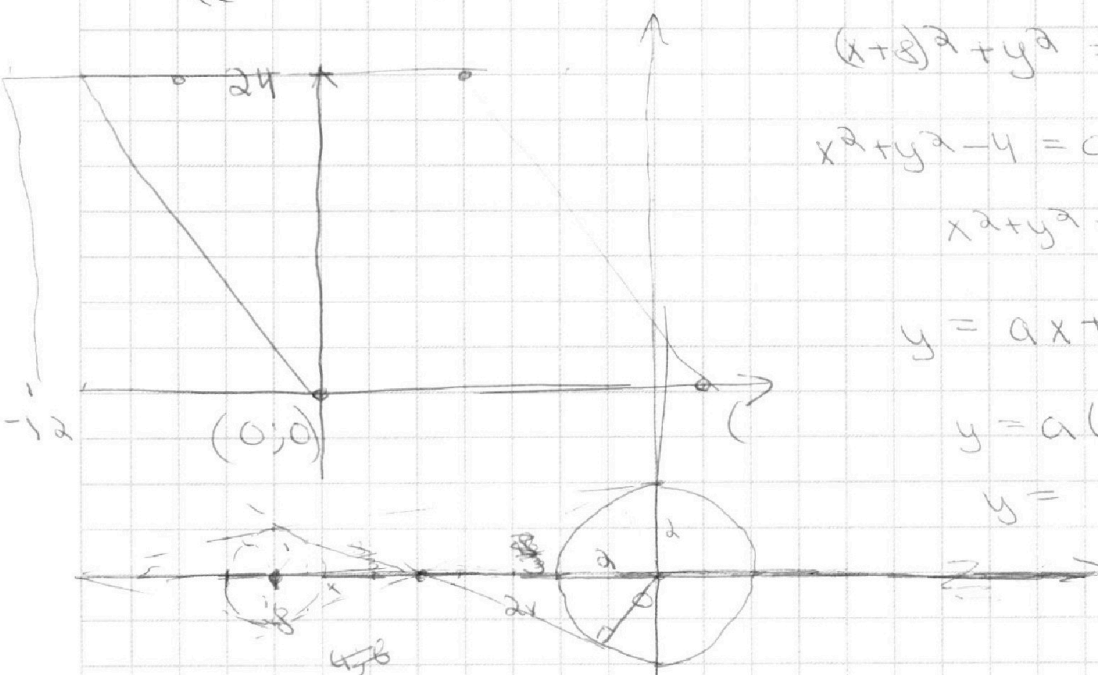
$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y = ax + 10\beta$$

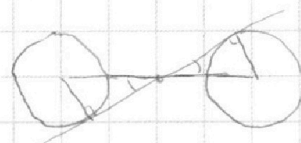
$$y = a(x-8) \perp$$

$$y =$$



$$\frac{16}{3} - a = \frac{16}{3} - \frac{10}{3}$$

$$\frac{64}{9} - 1 = \frac{55}{9} = \frac{1}{3}\sqrt{55}$$



$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$\left(x + \frac{16}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9} + \frac{55}{9}$$

$$16x + 64 - \frac{64}{3}x + \frac{456}{9} = \frac{52}{3}$$

$$-\frac{16x}{3} = 64 - \frac{200}{9} + \frac{52}{3}$$

$$a(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\sqrt{2(x-1)(x-\frac{3}{2})} + \sqrt{2(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}} = 1$$

$$t = x - 1$$

$$\sqrt{2 + (t - \frac{1}{2})} + \sqrt{2(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}$$

$$-(4x^2 + 3x + 3) = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$0 = 9 -$$

$$\sqrt{2(t + \frac{1}{4})(t - \frac{1}{4})}$$

$$2t^2 - \frac{1}{8}$$

$$\frac{45}{2}$$

$$\frac{128}{33} - \frac{95}{95}$$

$$2x^2 - 5x$$

$$a: 7^{P_1}$$

$$P_1 + P_2 \geq 10$$

$$b: 7^{P_2}$$

$$P_2 + P_3 \geq 17$$

$$c: 7^{P_3}$$

$$P_1 + P_3 \geq 37$$

$$P_1 + P_2 + P_3 \geq 37$$

$$P_1 + P_3 \geq 37$$

$$P_1 = 17$$

$$P_2 = 20 \quad c: 2^{d_3}$$

$$a: 2^{d_1}$$

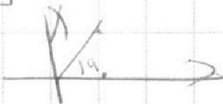
$$d_1 + d_2 \geq 14$$

$$b: 2^{d_2}$$

$$d_2 + d_3 \geq 17$$

$$d_1 + d_3 \geq 20$$

$$y = \frac{1}{a}x$$



$$2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$d_1 + d_2$$

$$d_1 + d_3 + 2d_2 \geq 21$$

$$d_1 + d_3 + d_2 \geq 51$$

$$d_1 + d_3 + d_2 \geq 26$$

$$2d_2 \geq 1$$

$$d_2 \geq 1$$

