



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

\* 5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

\* 7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$a, b, c \in \mathbb{N}, \quad ab := 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc := 2^{14} \cdot 7^{18}, \quad ac := 2^{23} \cdot 7^{39}.$$

$$\min(abc) = ?$$

Решение. Через  $\nu_p(m)$  будем обозначать степень вхождения простого числа  $p$  в каноническое число  $m$  (например,  $\nu_3(18) = 2$ ).

Заметим, что т.к.  $ac := 2^{23} \cdot 7^{39}$ , то

$$abc := 2^{39} \cdot 7^{39} \Leftrightarrow \nu_7(abc) \geq 39. \quad \text{Заметим,}$$

$$\text{что из условия: } \begin{cases} \nu_2(a) + \nu_2(c) = \nu_2(ac) \geq 23 \\ \nu_2(b) + \nu_2(c) = \nu_2(bc) \geq 14 \\ \nu_2(a) + \nu_2(b) = \nu_2(ab) \geq 15 \end{cases}$$

(даже, что  $\nu_p(m) + \nu_p(n) = \nu_p(mn)$ )

Сложив эти нерав-ва, получим:

$$2(\nu_2(a) + \nu_2(b) + \nu_2(c)) = 2\nu_2(abc) \geq 55.$$

Число слева - четное, а справа - нечетное,

$$\text{откуда (очевидно) } 2\nu_2(abc) \geq 56 \Leftrightarrow$$

$$\nu_2(abc) \geq 28, \text{ и раз } \nu_7(abc) \geq 39, \text{ получим}$$

$$abc := 2^{28} \cdot 7^{39} \text{ и, откуда } \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}.$$

Покажем, что минимум достигается. Даю, что

$$\text{подходят числа } a = 2^{11} \cdot 7^{21}, \quad b = 2^4 \text{ и } c = 7^{18} \cdot 2^{13}.$$

Даю, что при таких  $a, b, c$  все условия задачи выполняются и  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ .

$$\text{Ответ. } \boxed{2^{28} \cdot 7^{39}} \rightarrow = abc$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2

$$a, b \in \mathbb{N}, \frac{a}{b} - \text{клетка}; \quad m \in \mathbb{N}, \frac{a+b}{d^2 - 4ab + b^2}$$

Сокр. на  $m$ .  $\max(m) = ?$

Деление. Ясно, что  $\frac{a}{b} - \text{клетка}$ .

$\Leftrightarrow a$  и  $b$  взаимно-просты ~~клетка~~  $\Leftrightarrow$

$$\text{НОД}(a; b) = 1. \text{ Заметим, что}$$

$$a + b \equiv m \quad \text{и} \quad d^2 - 4ab + b^2 \equiv m, \text{ откуда}$$

$$d^2 - 4ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab \equiv m, \text{ и так}$$

$$a+b \equiv m, \text{ то } 9ab \equiv m. \text{ Докажем,}$$

~~клетка~~ ~~клетка~~ что  $\text{НОД}(a; m) = \text{НОД}(b; m) = 1$ .

Пусть это не так, ~~клетка~~ ~~клетка~~ и  $\text{НОД}(b; m) =$

$$= n \in \mathbb{N}, n > 1. \text{ Так } a+b \equiv m \text{ и}$$

$$m \equiv n, \text{ то } a+b \equiv n, \text{ и так } b \equiv n, \text{ то}$$

~~клетка~~ ~~клетка~~  $a \equiv n$ , откуда  $\text{НОД}(a; b) \geq n > 1$ . Но

$\text{НОД}(a; b) = 1$ , и мы пришли к противоречию. Значит,  $\text{НОД}(b; m) = 1$ . Аналогично

$$\text{НОД}(a; m) = 1. \text{ Но ведь тогда}$$

~~клетка~~  $9ab \equiv m$  и  $\text{НОД}(a; m) = \text{НОД}(b; m) = 1$ ,  
(обратно)  $\Rightarrow$  (тогда и только тогда)  
что возможно лишь когда  $9 \equiv m$ .  $\rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Предположение. Отсюда,  $m=1$ ,  $m=3$  или

$m=9$ . Знаем,  $\max(m) = 9$ .

Покажем, что максимум достигается.

Возьмем  $a=1$  и  $b=17$ . Ясно, что  $\frac{a}{b} = \frac{1}{17}$  -

- некр. - больше того,  $a+b = 18:9 = m$  и

$$a^2 - 4ab + b^2 = 289 - 4 \cdot 17 + 1 = 290 - 119 =$$

$$= 171 : 9 = m. \text{ Знаем, и числитель,}$$

и знаменатель ~~являются~~ дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 4ab + b^2}$$

деляется на  $m=9$ , и

максимум  $m=9$  достигается.

Ответ.

$$\boxed{m=9}$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



отсюда  $AQ = \sqrt{49 + 289x^2}$  и  
 $BQ = \sqrt{49 + 49x^2}$ . Это расстояние  
смыслов  $\triangle AQB$ :

$$\frac{AB}{\sin \angle AQB} = \frac{24x}{\sin \angle AQB} = 2 \cdot 13 = 26,$$

отсюда  $\sin \angle AQB = \frac{12}{13} x \leq 1$ ,  
и  $0 < x \leq \frac{13}{12}$ . Заметим.

$QC = 4$ ,  $QC \perp AB$  как радиус

в точку касания, отсюда:

$$S_{\triangle AQB} = \frac{QC \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 \cdot x =$$
$$= \frac{AQ \cdot QB \cdot \sin \angle AQB}{2} =$$

$$= \frac{\frac{12}{13} x \sqrt{49 + 49x^2} \sqrt{49 + 289x^2}}{2}$$

Значит,

$$\sqrt{49 + 49x^2} \sqrt{49 + 289x^2} = 182.$$

Очевидно, что  $\sqrt{49 + 49x^2}$  имеет  
только 1 значение, т.е. наше уравнение

имеет  $0 < x \leq \frac{13}{12}$  в наших условиях

только 1 значение.

Значит, при наших  $x$  наше уравнение  $\rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Предложение.

имеет ~~только одно~~

~~только одно~~ равно 1 решение.

Заметим, что подходит

$0 < x = 1 \leq \frac{13}{12}$ . Действительно, при

$$x=1: \sqrt{49 + 49x^2} \sqrt{49 + 289x^2} = \sqrt{98} \sqrt{338} = \\ = \sqrt{33124} = 182, \text{ т.е. } x=1 - \text{корень.}$$

Значит, единственное решение

нашего уравнения это  $x=1$ .

Когда,  $AB = 24x = 24$ .

Ответ.  $AB = 24$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 2x.$$

Решение. ~~итерация~~

Заметим.  $1 - 2x = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1 + 1).$

Замена:  $a := 3x^2 - 6x + 2$ ,  $b := 3x^2 + 3x + 1$ .  
Тогда  $1 - 2x = a - b$ .

Отсюда:  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$ ,  $a, b \geq 0$ .

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0.$$

2 случая:

①  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$ .  $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$ .

$\Leftrightarrow a = b$ ,  $a, b \geq 0$ .  $\Leftrightarrow$

$a = b$ ,  $b \geq 0$ .  $\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$ ,  
 $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$ . Рассмотрим

уравнение  $3x^2 + 3x + 1 = 0$ .

Его дискриминант  $D$  равен

$D = 9 - 3 \cdot 4 = -3 < 0$ , значит,

$3x^2 + 3x + 1 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ .  $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение.

отсюда  $3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 2$ ,

и отсюда  $\forall x \in \mathbb{R}$  не нужно, ибо  $\forall x \in \mathbb{R}$

$3x^2 + 3x + 1 > 0$ . Значит,  $9x = 1$ ,

откуда  $x = \frac{1}{9}$

②  $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 = 0$ , т.е.

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ ,  $a, b \geq 0$ .  $\Leftrightarrow$

$a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = 1$ ,  $a, b \geq 0$ .  $\Leftrightarrow$

$3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}\sqrt{3x^2 + 3x + 1} +$

$+ 3x^2 + 3x + 1 = 6x^2 - 3x + 3 +$

$+ 2\sqrt{a}\sqrt{b} = 1$ ,  $a, b \geq 0$ .

отсюда  $2\sqrt{a}\sqrt{b} = 1 - 6x^2 + 3x - 3 \geq 0$ .

Таким образом уравнение  $6x^2 - 3x + 3 = 1$ .

$\Leftrightarrow 6x^2 - 3x + 2 = 0$ . Его дискриминант

равен  $D = 9 - 6 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 48 = -39 < 0$ ,

значит,  $6x^2 - 3x + 3 > 1$  при всех

$x \in \mathbb{R}$ . Это значит (ваше решение)  $\rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

что  $1 - 6x^2 + 3x - 3 = -2\sqrt{9} \sqrt{9} \geq 0,$

откуда  $1 - 6x^2 + 3x + 3 > 1.$  Но

это невозможно  $\Leftrightarrow x \in \emptyset.$

значит, в этом случае

нет решений.

Поэтому  $x = \frac{1}{9}.$

ответ.

$x = \frac{1}{9}$



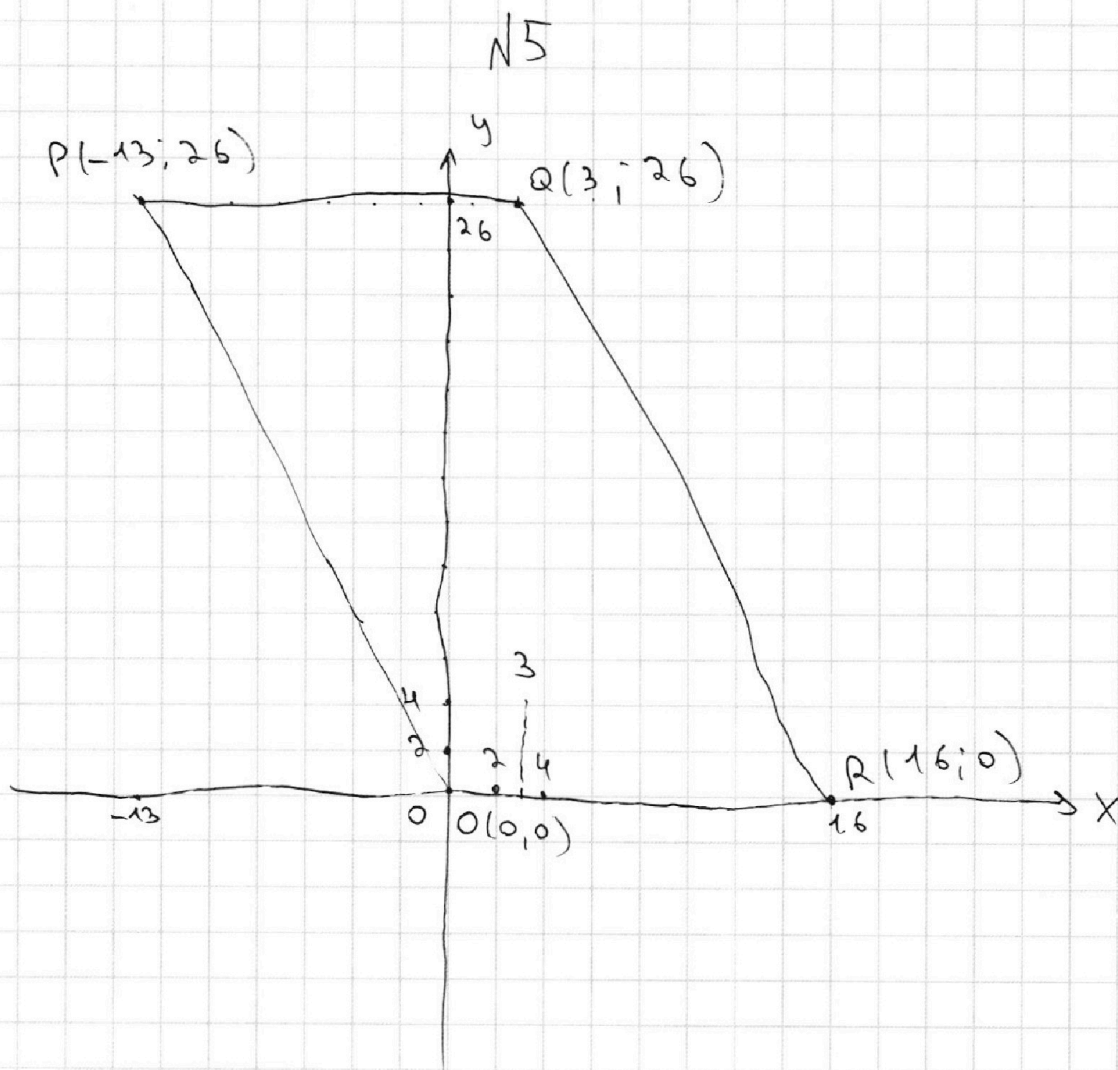
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение. ОР задается уравнением

~~или~~  $y=0$ ; PQ — уравнением  $y=26$ ,

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Найти все  $a$ , при которых  $\exists b$ : сист. имеет

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

ровно 2 рещ.

Решение. Первое уравнение:  $y = -ax + 8b$

~~прямая~~ - прямая ( вида  $y = kx + c$ ).

Второе нерав-во:

$x^2 + y^2 = 1$  - окр-ть  $w_1$  (центром  $O_1(0; 0)$ )

радиуса  $R_1 = 1$ ;  $x^2 + (y - 12)^2 = 16$  - окр-ть

$w_2$  (центром  $O_2(0; 12)$ ) радиуса  $R_2 = 4$ .

Ясно, что  $w_1$  и  $w_2$  не имеют общих

точек. Очевидно, что второе неравенство

~~выполняется~~ выполняется:

- на границах ~~окр-тей~~ <sup>окр-тей</sup>  $w_1$  и  $w_2$ .
- Внутри окр-тей  $w_1$  и  $w_2$ .

Нарисуем графики:  $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

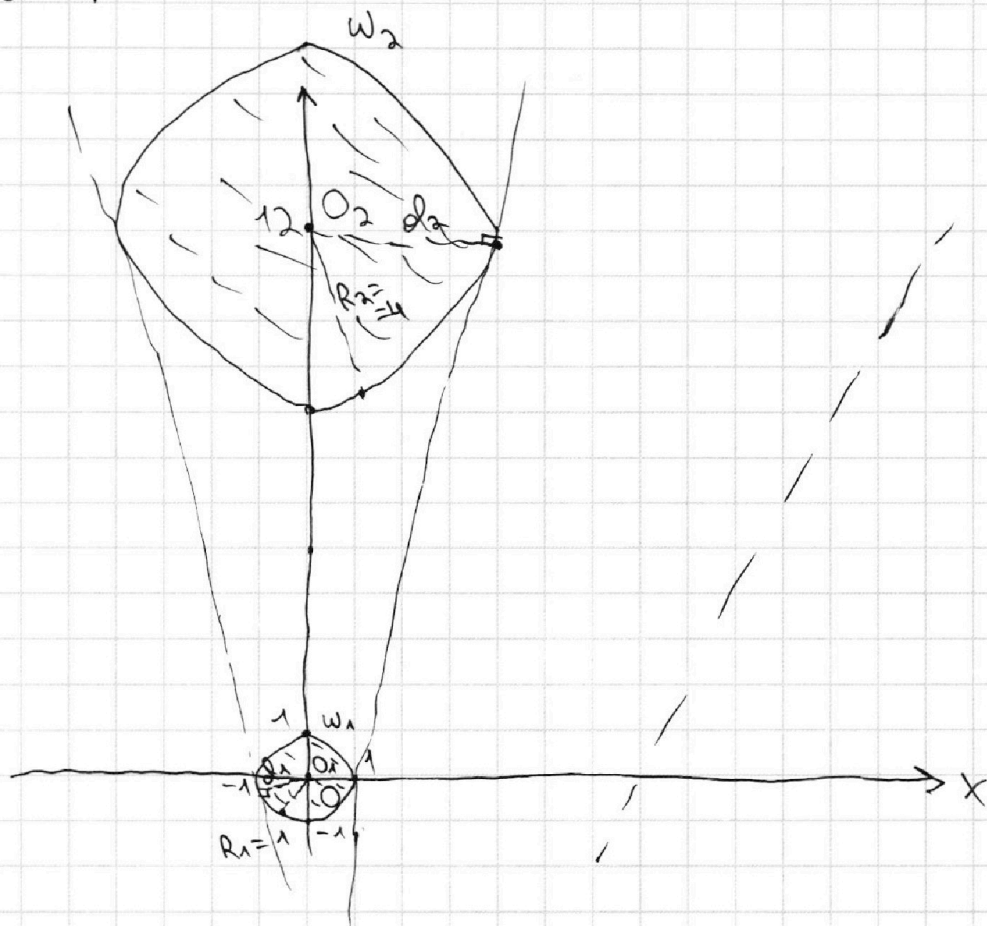
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.



Очевидно, что ~~од~~ равно два решения  
будет  $\Leftrightarrow$   $\rho$  касается  $w_1$  и  $w_2$ .

Почему? Если  $\rho$  внешне пересек. одну из  
окр-тей  $w_1$  и  $w_2$ , то ясно, что будет  $\infty$   
реш., значит, она может либо касаться,  
либо не иметь общих точек (касаний)  
из окр-тей  $w_1$  и  $w_2$ . По т.к. окр-ти  
два и решения два, то ясно, что  $\rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

прямая  $\ell$  касается искомых окружностей. Дано, что  $w_1$  и  $w_2$  искомые касательные  $\Rightarrow y$  кас (соев.)

$\ell$  задана  $a$ . Зная  $a$  найдем  $w_1$ .

Зная  $a$ . Расстояние  $d$  от точки  $(x_0, y_0)$

до прямой  $ax+by+c=0$  равно

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

т.к.  $\ell$  касается

$w_1$  и  $w_2$ , то если  $d_1$  и  $d_2$  - расстояния

- от  $O_1$  и  $O_2$  до  $\ell$  соответственно,

то  $d_1 = R_1$  и  $d_2 = R_2$ . Значит:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} = R_1 = 1 \\ d_2 = \frac{18b+12}{\sqrt{a^2+1}} = R_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18b = \sqrt{a^2+1} \\ 18b+12 = 4\sqrt{a^2+1} \end{cases}$$

~~Значит~~ Значит. 3 случая:

①  $b \geq 0$ . Тогда  $8b = \sqrt{a^2+1}$  и  $12+8b = 4\sqrt{a^2+1}$ , откуда  $12+8b = 12+\sqrt{a^2+1} = 4\sqrt{a^2+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} = 4 \Leftrightarrow a^2+1=16 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{15}$$

(и тогда  $b = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+1}$  ( $b = \frac{1}{2} \geq 0$ ))  $\rightarrow$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

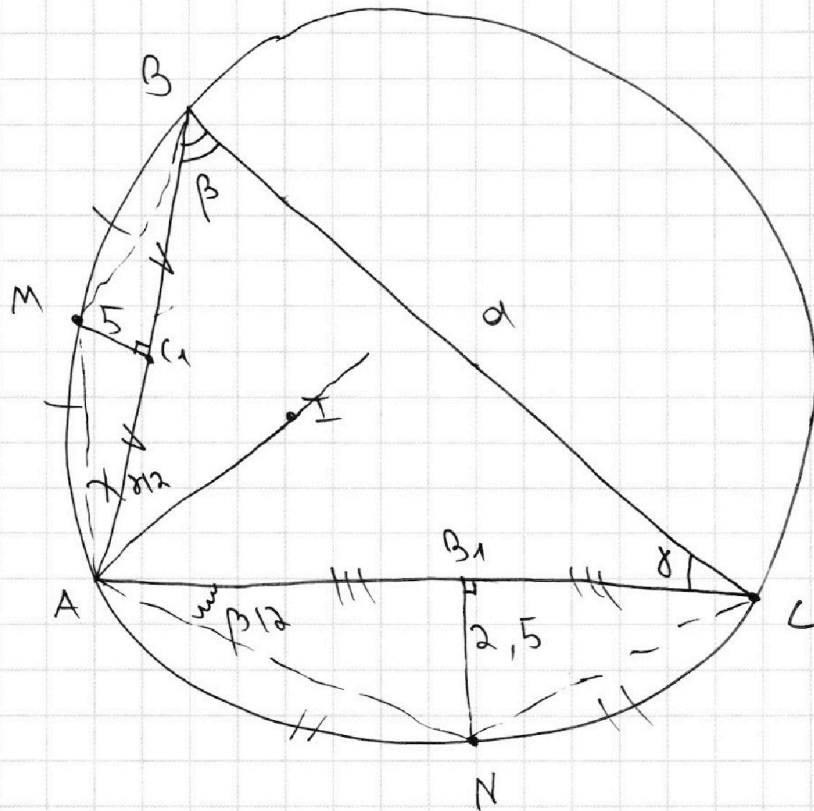


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

I - центр  $\triangle ABC$

$AI = ?$



Решение. Пусть  $B_1, C_1$  - середины  $AC, AB$

~~соответственно~~ соответственно; Пусть

$BC = a, AB = c, AC = b, \angle A = \alpha, \angle B = \beta,$

$\angle C = \gamma$ . дока, что  $\angle NAC = \frac{\beta}{2}$  и

$\angle MAB = \frac{\gamma}{2}$ . отсюда  $AC_1 = \frac{c}{2} =$

$= 5 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  и  $AB_1 = \frac{b}{2} = 2,5 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$

и  $c = 10 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, b = 5 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ .





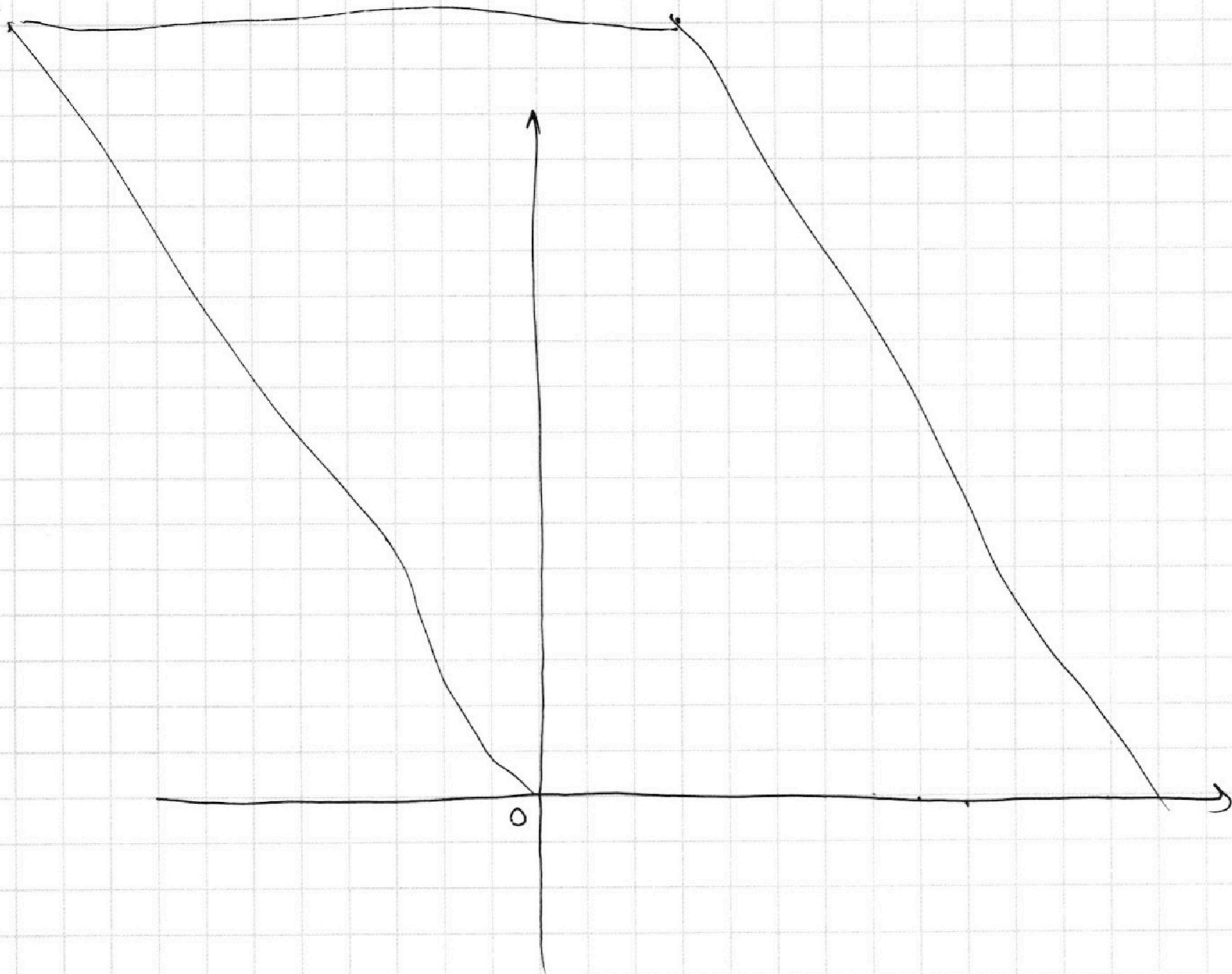
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



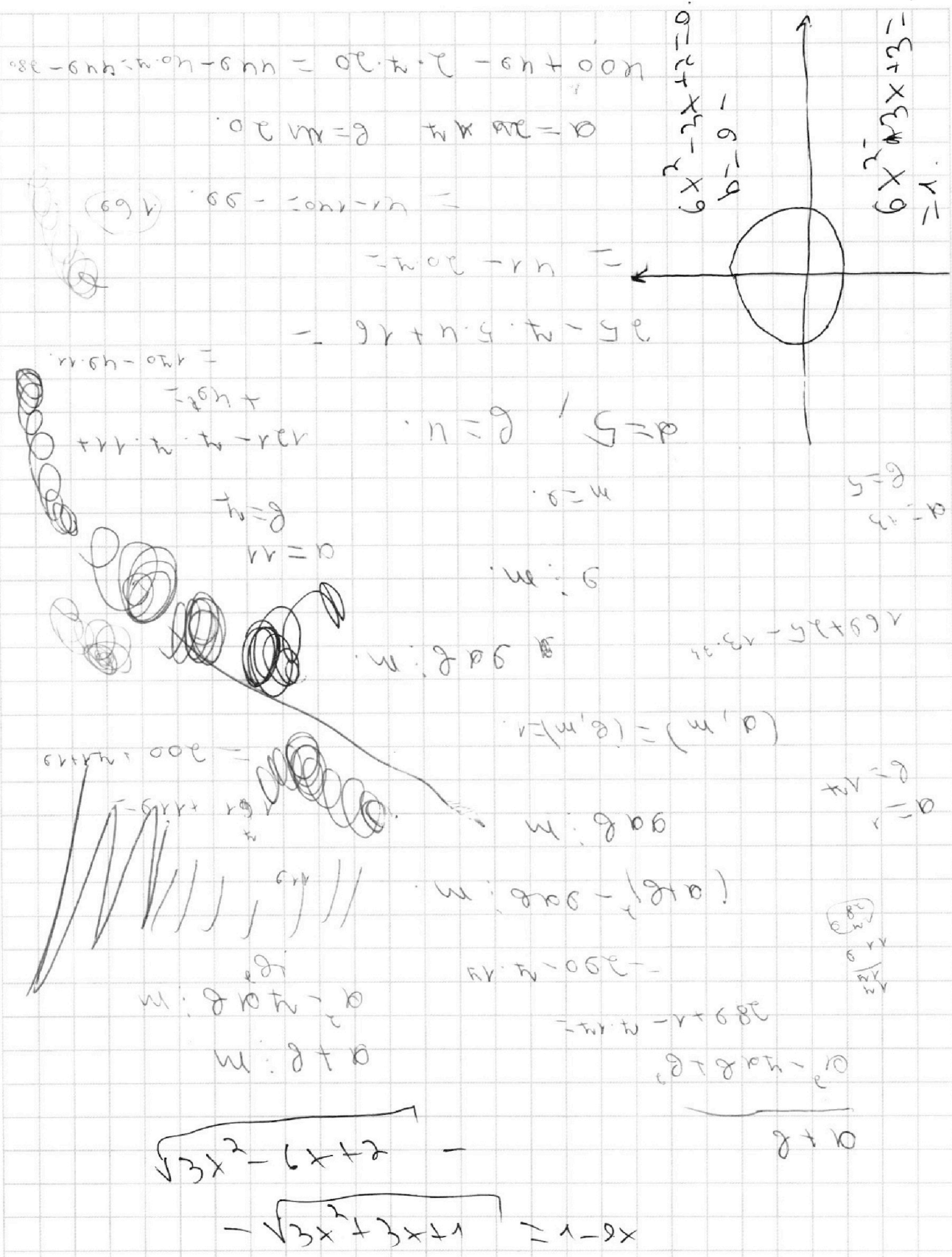
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a \cdot k \cdot x$

$$k \cdot -13 = 26$$

$$k = -2$$



На одной странице можно оформить только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,

страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода непустым!



На одной странице можно оформить **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,

страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода неопределен!



Черновик

$a + b$

$\frac{a^2 - y a b + b^2}{1}$

$a, b \in \mathbb{N}$

$a, b = 1$

$25x^2 - 15x - 2 = 1$

$25x^2 - 15x - 3 = 0$

$a = 2, b = 1$

$a = 1, b = 2$

$a = 2, b = 2$

$a = 1, b = 3$

$a = 3, b = 1$

$a = 2, b = 3$

$a = 3, b = 2$

$a = 1, b = 4$

$a = 4, b = 1$

$a = 2, b = 4$

$a = 4, b = 2$

$a = 3, b = 3$

$a = 1, b = 5$

$a = 5, b = 1$

$a = 2, b = 5$

$a = 5, b = 2$

$a = 3, b = 4$

$a = 4, b = 3$

$a = 4, b = 4$

$a = 1, b = 6$

$a = 6, b = 1$

$a = 2, b = 6$

$a = 6, b = 2$

$a = 3, b = 5$

$a = 5, b = 3$

$a = 4, b = 5$

$a = 5, b = 4$

$a = 1, b = 7$

$a = 7, b = 1$

$a = 2, b = 7$

$a = 7, b = 2$

$a = 3, b = 6$

$a = 6, b = 3$

$a = 4, b = 6$

$a = 6, b = 4$

$a = 5, b = 6$

$a = 6, b = 5$

$a = 1, b = 8$

$a = 8, b = 1$

$a = 2, b = 8$

$a = 8, b = 2$

$a = 3, b = 7$

$a = 7, b = 3$

$a = 4, b = 7$

$a = 7, b = 4$

$a = 5, b = 7$

$a = 7, b = 5$

$a = 6, b = 7$

$a = 7, b = 6$

$a = 1, b = 9$

$a = 9, b = 1$

$a = 2, b = 9$

$a = 9, b = 2$

$a = 3, b = 8$

$a = 8, b = 3$

$a = 4, b = 8$

$a = 8, b = 4$

$a = 5, b = 8$

$a = 8, b = 5$

$a = 6, b = 8$

$a = 8, b = 6$

$a = 7, b = 8$

$a = 8, b = 7$

$a = 1, b = 10$

$a = 10, b = 1$

$a = 2, b = 10$

$a = 10, b = 2$

$a = 3, b = 9$

$a = 9, b = 3$

$a = 4, b = 9$

$a = 9, b = 4$

$a = 5, b = 9$

$a = 9, b = 5$

$a = 6, b = 9$

$a = 9, b = 6$

$a = 7, b = 9$

$a = 9, b = 7$

$a = 8, b = 9$

$a = 9, b = 8$

$a = 1, b = 11$

$a = 11, b = 1$

$a = 2, b = 11$

$a = 11, b = 2$

$a = 3, b = 10$

$a = 10, b = 3$

$a = 4, b = 10$

$a = 10, b = 4$

$a = 5, b = 10$

$a = 10, b = 5$

$a = 6, b = 10$

$a = 10, b = 6$

$a = 7, b = 10$

$a = 10, b = 7$

$a = 8, b = 10$

$a = 10, b = 8$

$a = 9, b = 10$

$a = 10, b = 9$

$a = 1, b = 12$

$a = 12, b = 1$

$a = 2, b = 12$

$a = 12, b = 2$

$a = 3, b = 11$

$a = 11, b = 3$

$a = 4, b = 11$

$a = 11, b = 4$

$a = 5, b = 11$

$a = 11, b = 5$

$a = 6, b = 11$

$a = 11, b = 6$

$a = 7, b = 11$

$a = 11, b = 7$

$a = 8, b = 11$

$a = 11, b = 8$

$a = 9, b = 11$

$a = 11, b = 9$

$a = 10, b = 11$

$a = 11, b = 10$

$a = 1, b = 13$

$a = 13, b = 1$

$a = 2, b = 13$

$a = 13, b = 2$

$a = 3, b = 12$

$a = 12, b = 3$

$a = 4, b = 12$

$a = 12, b = 4$

$a = 5, b = 12$

$a = 12, b = 5$

$a = 6, b = 12$

$a = 12, b = 6$

$a = 7, b = 12$

$a = 12, b = 7$

$a = 8, b = 12$

$a = 12, b = 8$

$a = 9, b = 12$

$a = 12, b = 9$

$a = 10, b = 12$

$a = 12, b = 10$

$a = 11, b = 12$

$a = 12, b = 11$

$a = 1, b = 14$

$a = 14, b = 1$

$a = 2, b = 14$

$a = 14, b = 2$

$a = 3, b = 13$

$a = 13, b = 3$

$a = 4, b = 13$

$a = 13, b = 4$

$a = 5, b = 13$

$a = 13, b = 5$

$a = 6, b = 13$

$a = 13, b = 6$

$a = 7, b = 13$

$a = 13, b = 7$

$a = 8, b = 13$

$a = 13, b = 8$

$a = 9, b = 13$

$a = 13, b = 9$

$a = 10, b = 13$

$a = 13, b = 10$

$a = 11, b = 13$

$a = 13, b = 11$

$a = 12, b = 13$

$a = 13, b = 12$

$a = 1, b = 15$

$a = 15, b = 1$

$a = 2, b = 15$

$a = 15, b = 2$

$a = 3, b = 14$

$a = 14, b = 3$

$a = 4, b = 14$

$a = 14, b = 4$

$a = 5, b = 14$

$a = 14, b = 5$

$a = 6, b = 14$

$a = 14, b = 6$

$a = 7, b = 14$

$a = 14, b = 7$

$a = 8, b = 14$

$a = 14, b = 8$

$a = 9, b = 14$

$a = 14, b = 9$

$a = 10, b = 14$

$a = 14, b = 10$

$a = 11, b = 14$

$a = 14, b = 11$

$a = 12, b = 14$

$a = 14, b = 12$

$a = 13, b = 14$

$a = 14, b = 13$

$a = 1, b = 16$

$a = 16, b = 1$

$a = 2, b = 16$

$a = 16, b = 2$

$a = 3, b = 15$

$a = 15, b = 3$

$a = 4, b = 15$

$a = 15, b = 4$

$a = 5, b = 15$

$a = 15, b = 5$

$a = 6, b = 15$

$a = 15, b = 6$

$a = 7, b = 15$

$a = 15, b = 7$

$a = 8, b = 15$

$a = 15, b = 8$

$a = 9, b = 15$

$a = 15, b = 9$

$a = 10, b = 15$

$a = 15, b = 10$

$a = 11, b = 15$

$a = 15, b = 11$

$a = 12, b = 15$

$a = 15, b = 12$

$a = 13, b = 15$

$a = 15, b = 13$

$a = 14, b = 15$

$a = 15, b = 14$

$a = 1, b = 17$

$a = 17, b = 1$

$a = 2, b = 17$

$a = 17, b = 2$

$a = 3, b = 16$

$a = 16, b = 3$

$a = 4, b = 16$

$a = 16, b = 4$

$a = 5, b = 16$

$a = 16, b = 5$

$a = 6, b = 16$

$a = 16, b = 6$

$a = 7, b = 16$

$a = 16, b = 7$

$a = 8, b = 16$

$a = 16, b = 8$

$a = 9, b = 16$

$a = 16, b = 9$

$a = 10, b = 16$

$a = 16, b = 10$

$a = 11, b = 16$

$a = 16, b = 11$

$a = 12, b = 16$

$a = 16, b = 12$

$a = 13, b = 16$

$a = 16, b = 13$

$a = 14, b = 16$

$a = 16, b = 14$

$a = 15, b = 16$

$a = 16, b = 15$

$a = 1, b = 18$

$a = 18, b = 1$

$a = 2, b = 18$

$a = 18, b = 2$

$a = 3, b = 17$

$a = 17, b = 3$

$a = 4, b = 17$

$a = 17, b = 4$

$a = 5, b = 17$

$a = 17, b = 5$

$a = 6, b = 17$

$a = 17, b = 6$

$a = 7, b = 17$

$a = 17, b = 7$

$a = 8, b = 17$

$a = 17, b = 8$

$a = 9, b = 17$

$a = 17, b = 9$

$a = 10, b = 17$

$a = 17, b = 10$

$a = 11, b = 17$

$a = 17, b = 11$

$a = 12, b = 17$

$a = 17, b = 12$

$a = 13, b = 17$

$a = 17, b = 13$

$a = 14, b = 17$

$a = 17, b = 14$

$a = 15, b = 17$

$a = 17, b = 15$

$a = 16, b = 17$

$a = 17, b = 16$

$a = 1, b = 19$

$a = 19, b = 1$

$a = 2, b = 19$

$a = 19, b = 2$

$a = 3, b = 18$

$a = 18, b = 3$

$a = 4, b = 18$

$a = 18, b = 4$

$a = 5, b = 18$

$a = 18, b = 5$

$a = 6, b = 18$

$a = 18, b = 6$

$a = 7, b = 18$

$a = 18, b = 7$

$a = 8, b = 18$

$a = 18, b = 8$

$a = 9, b = 18$

$a = 18, b = 9$

$a = 10, b = 18$

$a = 18, b = 10$

$a = 11, b = 18$

$a = 18, b = 11$

$a = 12, b = 18$

$a = 18, b = 12$

$a = 13, b = 18$

$a = 18, b = 13$

$a = 14, b = 18$

$a = 18, b = 14$

$a = 15, b = 18$

$a = 18, b = 15$

$a = 16, b = 18$

$a = 18, b = 16$

$a = 17, b = 18$

$a = 18, b = 17$

$a = 1, b = 20$

$a = 20, b = 1$

$a = 2, b = 20$

$a = 20, b = 2$

$a = 3, b = 19$

$a = 19, b = 3$

$a = 4, b = 19$

$a = 19, b = 4$

$a = 5, b = 19$

$a = 19, b = 5$

$a = 6, b = 19$

$a = 19, b = 6$

$a = 7, b = 19$

$a = 19, b = 7$

$a = 8, b = 19$

$a = 19, b = 8$

$a = 9, b = 19$

$a = 19, b = 9$

$a = 10, b = 19$

$a = 19, b = 10$

$a = 11, b = 19$

$a = 19, b = 11$

$a = 12, b = 19$

$a = 19, b = 12$

$a = 13, b = 19$

$a = 19, b = 13$

$a = 14, b = 19$

$a = 19, b = 14$

$a = 15, b = 19$

$a = 19, b = 15$

$a = 16, b = 19$

$a = 19, b = 16$

$a = 17, b = 19$

$a = 19, b = 17$

$a = 18, b = 19$

$a = 19, b = 18$

$a = 1, b = 21$

$a = 21, b = 1$

$a = 2, b = 21$

$a = 21, b = 2$

$a = 3, b = 20$

$a = 20, b = 3$

$a = 4, b = 20$

$a = 20, b = 4$

$a = 5, b = 20$

$a = 20, b = 5$

$a = 6, b = 20$

$a = 20, b = 6$

$a = 7, b = 20$

$a = 20, b = 7$

$a = 8, b = 20$

$a = 20, b = 8$

$a = 9, b = 20$

$a = 20, b = 9$

$a = 10, b = 20$

$a = 20, b = 10$

$a = 11, b = 20$

$a = 20, b = 11$

$a = 12, b = 20$

$a = 20, b = 12$

$a = 13, b = 20$

$a = 20, b = 13$

$a = 14, b = 20$

$a = 20, b = 14$

$a = 15, b = 20$

$a = 20, b = 15$

$a = 16, b = 20$

$a = 20, b = 16$

$a = 17, b = 20$

$a = 20, b = 17$

$a = 18, b = 20$

$a = 20, b = 18$

$a = 19, b = 20$

$a = 20, b = 19$

$a = 1, b = 22$

$a = 22, b = 1$

$a = 2, b = 22$

$a = 22, b = 2$

$a = 3, b = 21$

$a = 21, b = 3$

$a = 4, b = 21$

$a = 21, b = 4$

$a = 5, b = 21$

$a = 21, b = 5$

$a = 6, b = 21$

$a = 21, b = 6$

$a = 7, b = 21$

$a = 21, b = 7$

$a = 8, b = 21$

$a = 21, b = 8$

$a = 9, b = 21$

$a = 21, b = 9$

$a = 10, b = 21$

$a = 21, b = 10$

$a = 11, b = 21$

$a = 21, b = 11$

$a = 12, b = 21$

$a = 21, b = 12$

$a = 13, b = 21$

$a = 21, b = 13$

$a = 14, b = 21$

$a = 21, b = 14$

$a = 15, b = 21$

$a = 21, b = 15$

$a = 16, b = 21$

$a = 21, b = 16$

$a = 17, b = 21$

$a = 21, b = 17$

$a = 18, b = 21$

$a = 21, b = 18$

$a = 19, b = 21$

$a = 21, b = 19$

$a = 20, b = 21$

$a = 21, b = 20$

$a = 1, b = 23$

$a = 23, b = 1$

$a = 2, b = 23$

$a = 23, b = 2$

$a = 3, b = 22$

$a = 22, b = 3$

$a = 4, b = 22$

$a = 22, b = 4$

$a = 5, b = 22$

$a = 22, b = 5$

$a = 6, b = 22$

$a = 22, b = 6$

$a = 7, b = 22$

$a = 22, b = 7$

$a = 8, b = 22$

$a = 22, b = 8$

$a = 9, b = 22$

$a = 22, b = 9$

$a = 10, b = 22$

$a = 22, b = 10$

$a = 11, b = 22$

$a = 22, b = 11$

$a = 12, b = 22$

$a = 22, b = 12$

$a = 13, b = 22$

$a = 22, b = 13$

$a = 14, b = 22$

$a = 22, b = 14$

$a = 15, b = 22$

$a = 22, b = 15$

$a = 16, b = 22$

$a = 22, b = 16$

$a = 17, b = 22$

$a = 22, b = 17$

$a = 18, b = 22$

$a = 22, b = 18$

$a = 19, b = 22$

$a = 22, b$



На одной странице можно оформить **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Лепка QR-кода невозможна!

МФТИ

Handwritten mathematical work on grid paper. At the top, a triangle is drawn with sides labeled  $a$ ,  $b$ , and  $c$ , and an angle  $\alpha$ . Below it, various algebraic derivations are shown, including the quadratic formula  $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2c}$  and the discriminant  $D = a^2 - 4bc$ . The work includes several boxed equations and a central diagram with two circles and arrows indicating a process or flow.

Key equations and expressions include:

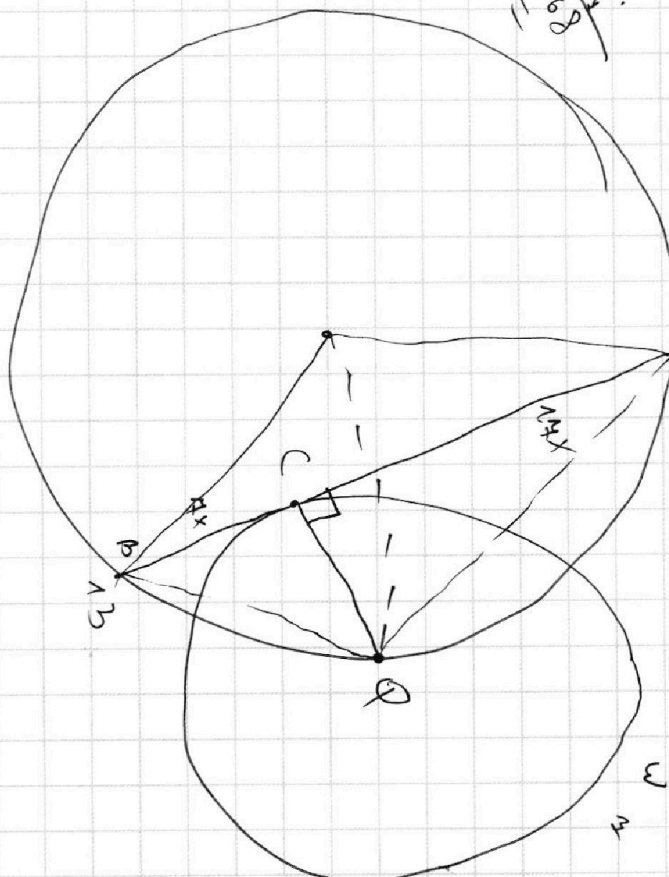
- $ax^2 + bx + c = 0$
- $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2c}$
- $D = a^2 - 4bc$
- $x_1 = \frac{-a + \sqrt{D}}{2c}$
- $x_2 = \frac{-a - \sqrt{D}}{2c}$





На одной странице можно оформить **только одну** задачу.  
 Отметьте крестиком номер задачи,  
 решение которой представлено на странице:  
 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачей или не отмечено ни одной задачи,  
 страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода неопустима!



$$\sin \angle AQB = \frac{2R}{x} = \frac{26}{x}$$

$$\sin \angle AQB = x \cdot \frac{12}{26}$$

$$A \cdot \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$A \cdot \sqrt{49 + 49x^2}$$

$$x \cdot \frac{12}{26}$$

$$2 \cdot M \cdot 13$$

$$\frac{14 \cdot 13}{13}$$

$$\frac{18}{13}$$

$$\frac{14}{13}$$

$$\sqrt{3338}$$

$$f(x) = 546x^2$$

$$-49 + 49x^2 + 289x^2 + 49 =$$

$$-2$$

$$\frac{168}{89} \cdot$$

$$\frac{1344}{1008}$$

$$\frac{168}{28224}$$

$$\cos \angle AQB =$$

$$\frac{5}{13} \cdot x$$

$$\frac{182}{282}$$

$$\frac{26}{13}$$

$$\frac{14}{13}$$

$$\frac{18}{13}$$

$$\frac{14}{13}$$

$$\frac{14}{13}$$

$$\frac{33 \cdot 12 \cdot 14}{20 \cdot 14}$$

$$\frac{33 \cdot 12}{20}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$ ,  $ab: 2 \begin{matrix} 15 \\ 7 \end{matrix} \begin{matrix} 11 \\ 4 \end{matrix}$ ,  $bc: 2 \begin{matrix} 17 \\ 7 \end{matrix} \begin{matrix} 18 \\ 4 \end{matrix}$ ,  $ac: 2 \begin{matrix} 23 \\ 7 \end{matrix} \begin{matrix} 39 \\ 4 \end{matrix}$ .

$\min(abc) = ?$

Решение. Пусть  $t := abc$ . Перемножим  
 числа  $ab$ ,  $bc$  и  $ac$ . Получим

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 = t^2$ . Из

условия,  $ab: 2 \begin{matrix} 15 \\ 7 \end{matrix} \begin{matrix} 11 \\ 4 \end{matrix}$ ,  $bc: 2 \begin{matrix} 17 \\ 7 \end{matrix} \begin{matrix} 18 \\ 4 \end{matrix}$ ,  $ac: 2 \begin{matrix} 23 \\ 7 \end{matrix} \begin{matrix} 39 \\ 4 \end{matrix}$ ,

откуда  $t: 2 \begin{matrix} 45 \\ 7 \end{matrix} \begin{matrix} 68 \\ 4 \end{matrix}$ . Заметим,

что раз  $t^2$  - квадрат натур. числа  $t \in \mathbb{N}$ ,

$t^2: 2 \begin{matrix} 45 \\ 7 \end{matrix}$  и  $45$  - нечетное, то  $t^2: 2 \begin{matrix} 46 \\ 7 \end{matrix}$ , так

как простые числа могут входить в

квадраты натур. чисел только в четных

степенях. Значит,  $t^2: 2 \begin{matrix} 46 \\ 7 \end{matrix}$ .

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$        $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9}}{6}$

$12 = -3 \sqrt{12} + 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 2(1-2x) \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$12 + 3\sqrt{12} = 3x^2 - 6x + 2 + 2(1-2x)\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$12 + 8\sqrt{3} = -4\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$\frac{12 + 8\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{10} = -\frac{3x^2 + 5x + 1}{10}$

