



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Задача 1

Оценка: Пусть a, b, c - степени вхождения двойки в a, b, c соответственно ($a: 2^a, a \times 2^{a+1}; b: 2^b, b \times 2^{b+1}; c: 2^c, c \times 2^{c+1}$). Так как $ab: 2^{19} 7^{10}, a+b \geq 19$. Аналогично $bc: 2^{13} 7^{17} \Rightarrow b+c \geq 17, ac: 2^{20} 7^{37} \Rightarrow a+c \geq 20$. Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получим: $a+b+c \geq 25,5$. Заметим, что $a, b, c \in \mathbb{N}$, а значит $a+b+c \geq 26$. Теперь отметим, что $a+b+c$ - степень вхождения двойки в abc , откуда $abc: 2^{26}$, а значит $abc \geq 2^{26}$. Также заметим, что $ac: 7^{37}, b \in \mathbb{N} \Rightarrow abc: 7^{37}$. Так как 2^{26} и 7^{37} взаимно просты, $abc: 2^{26} \cdot 7^{37}$, а значит $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$.

Пример: Пусть $a = 2^8 7^{17}, b = 2^6, c = 2^{12} 7^{20}$. Тогда $ab = 2^{14} 7^{17} \Rightarrow ab: 2^{14} 7^{10}, bc = 2^{18} 7^{20} \Rightarrow bc: 2^{17} 7^{17}, ac = 2^{20} 7^{37} \Rightarrow ac: 2^{20} 7^{37}$, и $abc = 2^{26} 7^{37}$. Значит, пример удовлетворяет условию.

Таким образом, abc не меньше $2^{26} 7^{37}$, и таким образом может быть равно этому числу.

Ответ: $2^{26} 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

1, 2, 3, 9, 6, 12
-1, -2, -3, -4, -6, -12

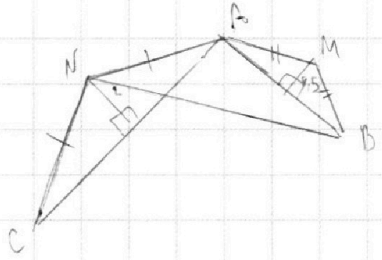
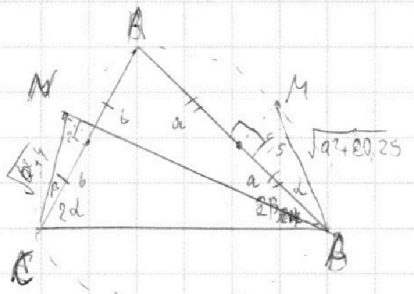
$$x_2 - x_1 = a$$
$$y_2 - y_1 = a \cdot k + a(10 - a)$$

$$x_2 - x_1 = 1 \Rightarrow k + 2 = 12 \Rightarrow k = 10$$

$$y_2 - y_1 = 10$$

80000

$$S_{\triangle 2} = \frac{9,5}{\sqrt{a^2 + 20,25}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Задача 2

Оценка: Так как дробь $\frac{a}{b}$ несократима, а взаимно просто с b . Тогда заметим, что $a+b$ взаимно просто с a (так как у них есть общий делитель k , и тогда $a:k$ и $a+b:k \Rightarrow b:k$, и тогда k - общий делитель a и b , противоречие). Аналогично $a+b$ взаимно просто с b , откуда $a+b$ взаимно просто с ab .

$$\text{Заметим, что } \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}.$$

Тогда если дробь можно сократить на m , то $a+b:m$ и $(a+b)^2-8ab:m$, откуда $8ab:m$. Но $a+b$ и ab не имеют общих множителей, поэтому ab взаимно просто с m . Значит $8:m$, откуда $m \leq 8$.

Пример: Пусть $a=3, b=5$. Тогда дробь $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ несократима,
$$a \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{9-30+25} = \frac{8}{56} = \frac{8 \cdot 1}{8 \cdot 7},$$
 откуда несомненно заме-

тим, что дробь сократима на 8. Значит, пример удовл. условием

Таким образом, m не больше 8, и пример может быть равно 8.

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



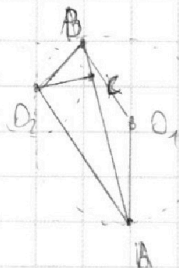
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Задача 3



Пусть O_1 и O_2 - центры Ω и ω соответственно, K - точка касания ω и AB . Пусть $BC = x$. Тогда $AC = 7x$. Замечаем, что в треугольнике ABO_2 O_2C - высота ($O_2 \in O_2C$, $O_2C \perp AB$ (касательная и радиус)), а Ω - его описанная окружность. По теореме Пифагора:

$$\Delta AO_2C: AO_2^2 = 1 + 49x^2 \Rightarrow AO_2 = \sqrt{49x^2 + 1}$$

$$\Delta BO_2C: BO_2^2 = 1 + x^2 \Rightarrow BO_2 = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{Тогда } \sin \angle O_2BC = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (\text{из прямоу. } \Delta O_2BC)$$
$$= \frac{\sqrt{49x^2 + 1}}{2R} = \frac{\sqrt{49x^2 + 1}}{10} \quad (\text{теор. синусов } \Delta O_2BA)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{49x^2 + 1}}{10} \Leftrightarrow \sqrt{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)} = 10 \Leftrightarrow 49x^4 + 50x^2 + 1 = 100 \Leftrightarrow$$

(x > 0)

$$\Leftrightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(49x^2 + 99) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Тем как $x > 0$, $x = 1$. Тогда $AB = BC + CA = 8x = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Вызошим и разделим левую часть на Задача 4

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \quad (\text{оба корня } \geq 0, \text{ а правое подкоренное выражение всегда } > 0 \text{ (} D = 4-8 = -4 \text{)})$$
$$\frac{(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1})(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$$

Заметим, что в числителе разности квадратов, расписав подробно,

$$\text{получим } \frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x. \quad \text{Тогда либо } -7x+2 = 0 \text{ (вытаемше$$

определяет на $(-\infty, 1] \cup [2; +\infty)$, значит определят при $x=3, 5$) \Rightarrow

$\Rightarrow x=3, 5$, либо $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$. Во втором случае

$$|9x^2-3x+3 + 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 0$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Заметим, что $9x^2-3x+3 > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$ ($D = 9-36 = -27$), и

корень ≥ 0 , а значит левая часть равенства > 0 для всех $x \in \mathbb{R}$.

Значит во втором случае решений нет, и подходят только

$$x = 3, 5.$$

Ответ: $\{3, 5\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение. Заметим, что левая часть неравенства - Задача 6
- две окружности, одна с центром в точке $(-8, 0)$ и $r=1$, а вторая -
с центром в точке $(0, 0)$ и $r=2$. Тогда решениями неравенства
будут все точки внутри и на границах окружностей (вне обеих
обе стороны > 0 , внутри одной из них одна < 0 , другая > 0 , а на
границе окружностей одна из сторон $= 0$). График равенства -
прямая $y = ax + b$. Тогда если прямая имеет больше, чем одну
точку пересечения с одной из r окружностей, в решении систе-
мы будет промежутки, в которых прямая внутри окружностей,
и решение будет > 2 . Тогда прямая должна иметь по одной
точке пересечения с каждой из окружностей, а значит она -
их общая касательная. Для пересекającychся окружностей
таких 4 (две внешние и две внутренние), а значит таких
значений $a \leq 4$. Уравнения r общей касательной: $y = \frac{\sqrt{15}}{30}x + \frac{4\sqrt{15}}{75}$;
 $y = -\frac{\sqrt{15}}{30}x - \frac{4\sqrt{15}}{75}$; $y = \frac{\sqrt{551}}{37}x + \frac{8\sqrt{551}}{555}$; $y = -\frac{\sqrt{551}}{37}x - \frac{8\sqrt{551}}{555}$. Ответ-
да получаем все 4 возможных значения a
Ответ: $\left\{ \pm \frac{\sqrt{15}}{30}; \pm \frac{\sqrt{551}}{37} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

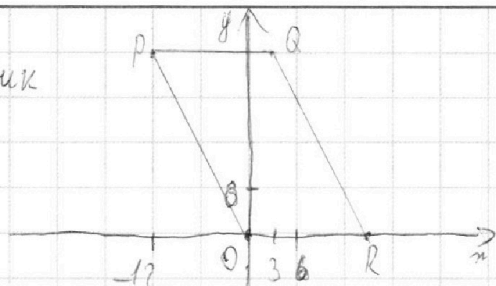
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик



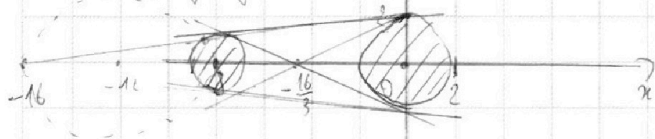
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = b(x_2 - x_1)$$



$$y = ax + 10b$$

$$(-16, 0), (-8, 5, \frac{\sqrt{37}}{4})$$

$$-16a + 10b = 0$$

$$-8,5a + 10b = \frac{\sqrt{37}}{4}$$

$$7,5a = \frac{\sqrt{37}}{4}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{37}}{30}$$

$$y = ax + 10b$$

$$(-\frac{16}{3}, 0), (-\frac{10}{12}, \frac{\sqrt{551}}{12})$$

$$\frac{37}{12} a = \frac{\sqrt{551}}{12}$$

$$\frac{10\sqrt{15}}{30} = 10b$$

$$b = \frac{9\sqrt{15}}{75}$$

$$y = ax + 10b$$

$$(x+12)^2 + y^2 = 16$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 4$$

$$(x+12)^2 - (x+8)^2 = 12$$

$$4(2x+20) = 12$$

$$x = -8,5$$

$$y^2 + 0,25 = 4$$

$$y = \sqrt{3,75}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 4$$

$$(x + \frac{16}{3})^2 + y^2 = 9$$

$$(x-12)^2 - (x + \frac{16}{3})^2 = \frac{80}{3} - \frac{28}{3}$$

$$20(2x + \frac{52}{3}) = \frac{52}{3}$$

$$\frac{20}{3}(2x + \frac{52}{3}) = -\frac{7}{3} - \frac{7}{2}$$

$$12x + 80 = -21 \quad x = -\frac{101}{12}$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 24$$

$$-12 \leq x_1, x_2 \leq 12$$

$$0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 15$$

$$0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 15$$

$$y = -2x$$

$$y = -2x + 15$$

AB

$$y = kx + b$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 =$$

$$\frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{y_2(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$



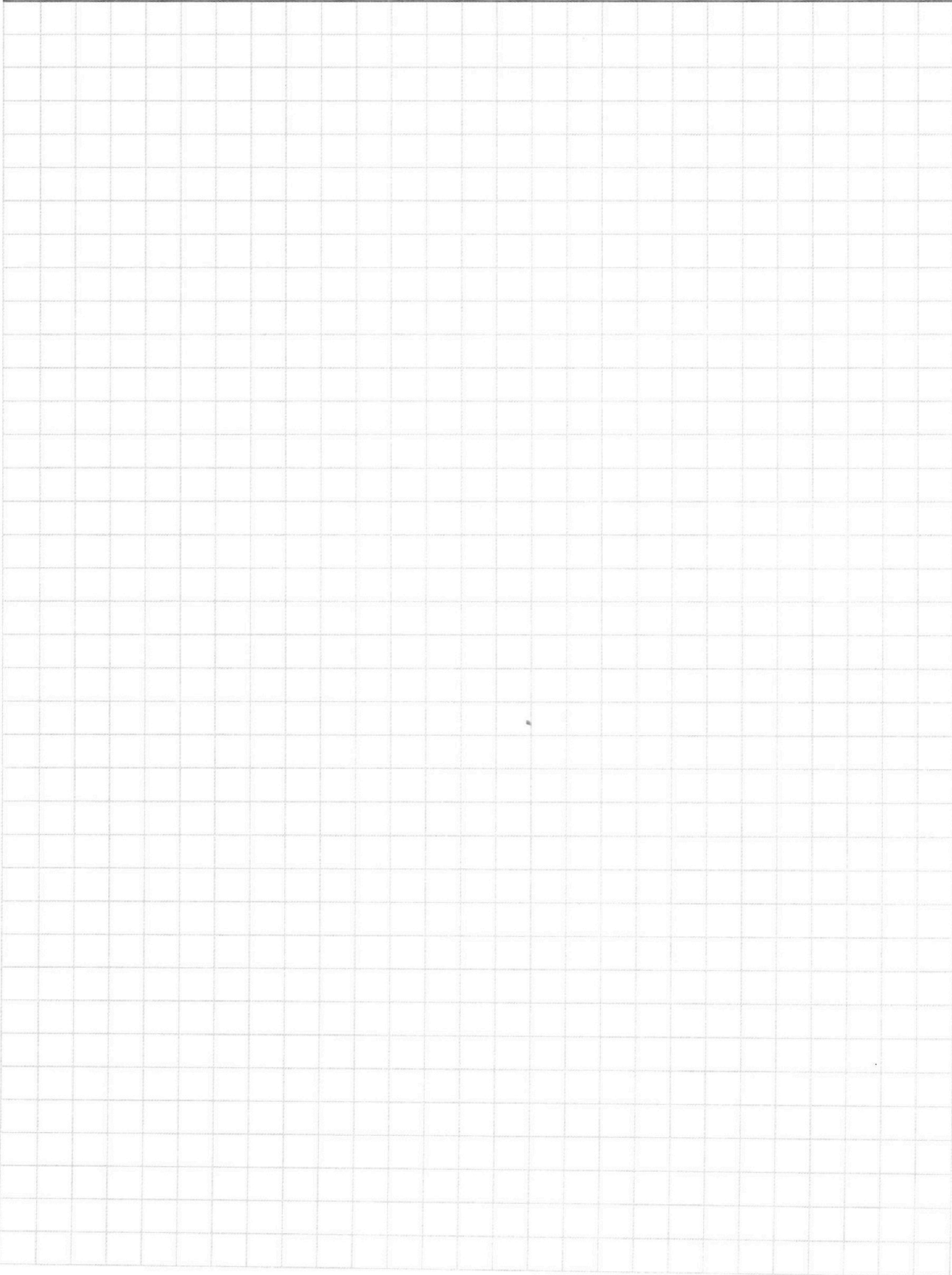
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





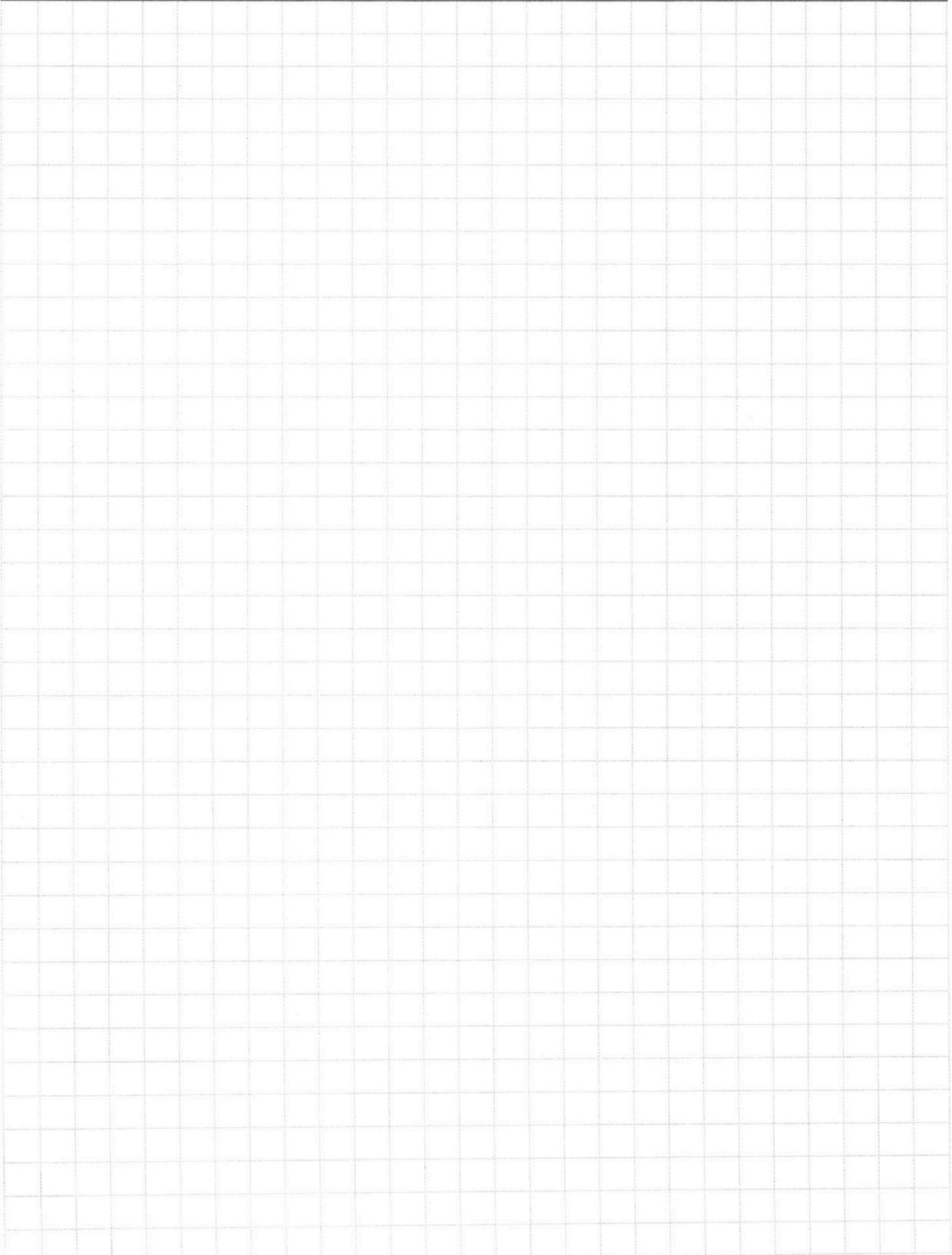
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Условия

$$ab = 2^{10} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 7^{12}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$a = 2^{a_1} \cdot 7^{b_1}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 7^{c_1}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$$

$$a = 2^8 \cdot 7^{17}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^{17}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{10}$$

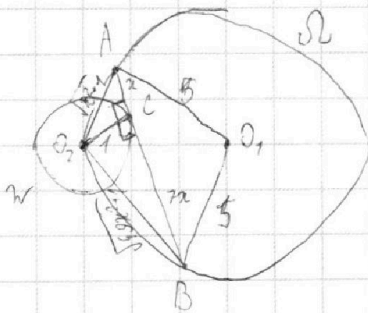
$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 14 \\ a_2 + b_2 \geq 10 \\ a_1 + c_1 \geq 20 \\ a_2 + c_2 \geq 37 \\ b_1 + c_1 \geq 17 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq 25,5 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 32 \\ abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32} \end{cases}$$

$$\frac{3+5}{(3+5)^2 - 8 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{8-15}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$\frac{8}{64-120} = -\frac{8}{56} = -\frac{1}{7}$$



$$2R = \frac{AO_2 \cdot BO_2}{\sin \angle AOB}$$

$$AO_2 \cdot BO_2 = 10$$

$$S_{AO_2B} = \frac{AO_2 \cdot BO_2 \cdot \sin \angle AOB}{2} = 5$$

$$\sin \angle AOB = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{49x^2+1}}{10}$$

$$\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)} = 10$$

$$\sqrt{49x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$49x^4 + 50x^2 - 29 = 0$$

$$\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$$

$$49x^2 = 49x$$

$$(x-1)(49x+99) = 0$$

$$x=1$$

$$\begin{cases} x=3,5 \\ \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \end{cases}$$

$$2\sqrt{25} -$$

$$\frac{49}{2} - \frac{35}{2} + 3$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b} \quad a-b$$

$$\frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 3$$

$$2\sqrt{49} - 2\sqrt{35} + 3 + \dots$$