МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Задача 1

Оценка: Пусть a_1, b_1, c_1 – степени вхождения двойки в a, b, c соответственно ($a \vdots 2^{a_1}$, $a \not\vdots 2^{a_1+1}$; $b \vdots 2^{b_1}$, $b \not\vdots 2^{b_1+1}$; $c \vdots 2^{c_1}$, $c \not\vdots 2^{c_1+1}$). Так как $ab \vdots 2^{14}7^{10}$, $a_1+b_1 \geq 14$. Аналогично $bc \vdots 2^{17}7^{17} \Rightarrow b_1+c_1 \geq 17$, $ac \vdots 2^{20}7^{37} \Rightarrow a_1+c_1 \geq 20$. Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получим: $a_1+b_1+c_1 \geq 25{,}5$. Заметим, что $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{N}$, а значит $a_1+b_1+c_1 \geq 26$. Теперь отметим, что $a_1+b_1+c_1$ – степень вхождения двойки в abc, откуда $abc \vdots 2^{26}$, а значит $abc \geq 2^{26}$. Также заметим, что $ac \vdots 7^{37}$, $b \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \vdots 7^{37}$. Так как 2^{26} и 7^{37} взаимно просты, $abc \vdots 2^{26} \cdot 7^{37}$, а значит $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример: Пусть $a = 2^8 7^{17}$, $b = 2^6$, $c = 2^{12}7^{20}$. Тогда $ab = 2^{14}7^{17} \Rightarrow ab \vdots 2^{14}7^{10}$, $bc = 2^{18}7^{20} \Rightarrow bc \vdots 2^{17}7^{17}$, $ac = 2^{20}7^{37} \Rightarrow ac \vdots 2^{20}7^{37}$, и $abc = 2^{26}7^{37}$. Значит, пример удовлетворяет условию

Таким образом, abc не меньше $2^{26}7^{37}$, и притом может быть равно этому числу

Ответ: $2^{26}7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
x	x	x	x	x	x	x

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

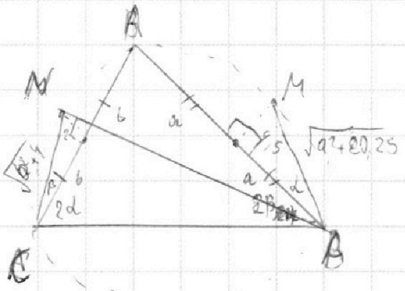
1, 2, 3, 4, 6, 12
-1, -2, -3, -4, -6, -12

$x_2 - x_1 = a$

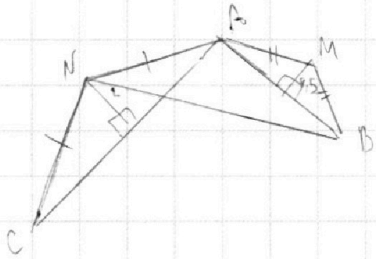
$y_2 - y_1 = a(10-a)$

$x_2 - x_1 = 1 \Rightarrow k + 2 = 12 \Rightarrow k = 10$

$y_2 - y_1 = 10$



$\sin\alpha = \frac{4{,}5}{\sqrt{a^2+20{,}25}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Задача 2

Оценка: Так как дробь $\frac{a}{b}$ несократима, а взаимно просто с b. Тогда заметим, что $a+b$ взаимно просто с a (иначе у них есть общий делитель k, и тогда $a \vdots k$ и $a+b \vdots k \Rightarrow b \vdots k$, и тогда k - общий делитель a и b, противоречие). Аналогично $a+b$ взаимно просто с b, откуда $a+b$ взаимно просто с ab.

Заметим, что $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$.

Тогда если дробь можно сократить на m, то $a+b \vdots m$ и $(a+b)^2-8ab \vdots m$, откуда $8ab \vdots m$. Но $a+b$ и ab не имеют общих множителей, поэтому ab взаимно просто с m. Значит $8 \vdots m$, откуда $m \leq 8$

Пример: Пусть $a=3$, $b=5$. Тогда дробь $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ несократима, а $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{9-90+25} = -\frac{8}{56} = -\frac{8 \cdot 1}{8 \cdot 7}$, откуда несложно заметить, что дробь сократима на 8. Значит, пример удовл. условию

Таким образом, m не больше 8, и притом может быть равно 8.

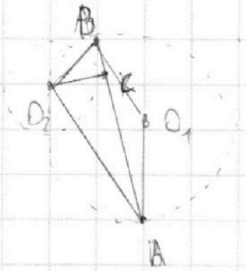
Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Задача 3



Пусть O_1 и O_2 - центры Ω и ω соответственно, C - точка касания ω и AB. Пусть $BC=x$. Тогда $AC=7x$. Заметим, что в треугольнике ABO_2 O_2C - высота ($O_2 \in O_2C$, $O_2C \perp AB$ (касательная и радиус)), а Ω - его описанная окружность. По теореме Пифагора:

$\triangle AO_2C: AO_2^2 = 1+49x^2 \Rightarrow AO_2 = \sqrt{49x^2+1}$

$\triangle BO_2C: BO_2^2 = 1+x^2 \Rightarrow BO_2 = \sqrt{x^2+1}$

Тогда $\sin\angle O_2BC = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (из прямоуг. $\triangle O_2BC$)

$= \frac{\sqrt{49x^2+1}}{2R} = \frac{\sqrt{49x^2+1}}{10}$ (теор. синусов $\triangle O_2BA$)

$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{49x^2+1}}{10} \Leftrightarrow \sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)} = 10 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} 49x^4+50x^2+1=100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49x^4+50x^2-99=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(\cancel{x}\,49x^2+99)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Так как $x>0$, $x=1$. Тогда $AB = BC+CA = 8x = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 [X] 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Решение: Домножим и разделим левую часть на Задача 4
$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}$ (оба корня ≥ 0, а правое подкоренное выражение всегда >0 ($D = 4-8=-4$)). $\frac{(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1})(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1})}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$

Заметим, что в числителе разность квадратов, расписав которую, получим $\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$. Тогда либо $-2x+7=0$ (выражение определено на $(-\infty;1]\cup[?;+\infty)$, значит определено при $x=3,5$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow x=3,5$, либо $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$. Во втором случае

$$\begin{cases} 4x^2-3x+3+2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=0 \\ \left[\begin{array}{l} x\leq 1 \\ x\geq ? \end{array}\right. \end{cases}$$

Заметим, что $4x^2-3x+3>0$ для любого $x\in\mathbb{R}$ ($D=9-48=-39$), и корень ≥ 0, а значит левая часть равенства >0 для всех $x\in\mathbb{R}$. Значит во втором случае решений нет, и подходит только $x=3,5$.

Ответ: $\{3,5\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение: Заметим, что левая часть неравенства - Задача 6
- две окружности, одна с центром в точке $(-8, 0)$ и $r = 1$, а вторая - с центром в точке $(0; 0)$ и $r = 2$. Тогда решениями неравенства будут все точки внутри и на границах окружностей (вне обеих обе скобки > 0, внутри одной из них одна < 0, другая > 0, а на границе окружности одна из скобок $= 0$). График равенства - прямая $y = ax + 10b$. Тогда если прямая имеет больше, чем одну точку пересечения с одной из окружностей, в решениях системы будет промежуток, на котором прямая внутри окружности, и решений будет > 2. Тогда прямая должна иметь по одной точке пересечения с каждой из окружностей, а значит она - их общая касательная. Для непересекающихся окружностей таких 4 (две внешние и две внутренние), а значит таких значений $a \leq 4$. Уравнения общих касательных: $y = \frac{\sqrt{15}}{30}x + \frac{4\sqrt{15}}{75}$; $y = -\frac{\sqrt{15}}{30}x - \frac{4\sqrt{15}}{75}$; $y = \frac{\sqrt{551}}{37}x + \frac{8\sqrt{551}}{555}$; $y = -\frac{\sqrt{551}}{37}x - \frac{8\sqrt{551}}{555}$. Отсюда получаем все 4 возможных значения a

Ответ: $\left\{\pm\frac{\sqrt{15}}{30}; \pm\frac{\sqrt{551}}{37}\right\}$

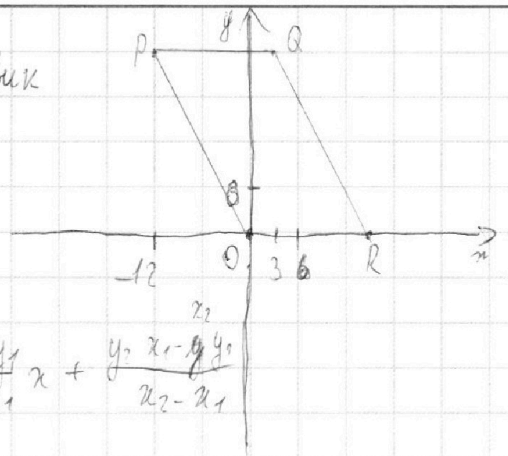
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик



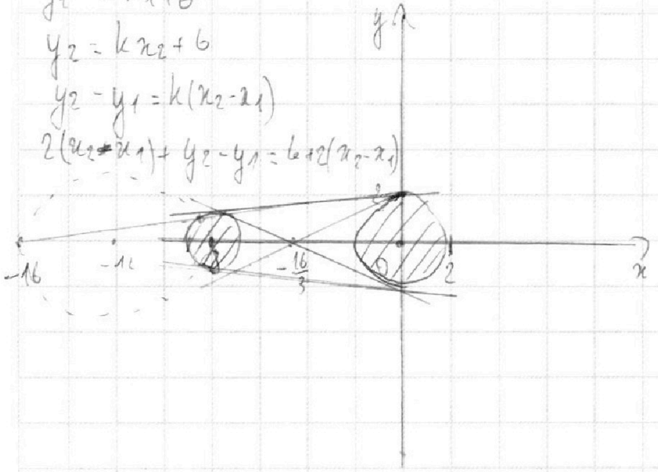
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{x_2 - x_1}$$

$y_1 = kx_1 + b$

$y_2 = kx_2 + b$

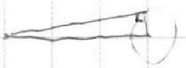
$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$

$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = b + 2(x_2 - x_1)$



$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$

$0 \le y_1, y_2 \le 24$



$$\begin{cases} 0 \le y_1 + 2x_1 \le 15 \\ 0 \le y_2 + 2x_2 \le 15 \end{cases}$$

$y = -2x$

$y = -2x + 15$

$y = ax + 10b$

$$\begin{cases} (x+12)^2 + y^2 = 16 \\ (x+8)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$(x+12)^2 - (x+8)^2 = 12$

$4(2x + 20) = 12$

$x = -8,5$

$y = kx + b$

$y_1 = kx_1 + b$

$y_2 = kx_2 + b$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_1 = \frac{y_1(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2}$$

$y = ax + 10b$

$(-16; 0), (-8,5; \frac{\sqrt{15}}{4})$

$-16a + 10b = 0$

$-8,5a + 10b = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$7,5a = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$a = \pm\frac{\sqrt{15}}{30}$

$$\frac{16\sqrt{15}}{30} = 10b$$

$$b = \frac{4\sqrt{15}}{75}$$

$y^2 + 0,25 = 4$

$y = \sqrt{3,75}$

$(x+8)^2 + y^2 = 4$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 4 \\ (x + \frac{16}{3})^2 + y^2 = \frac{64}{9} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{5}{12}\right)^2 + y^2 = 4$$

$$y^2 = 4 - \frac{25}{144} = \frac{551}{144}$$

$$(x+8)^2 - \left(x + \frac{16}{3}\right)^2 = \frac{36}{9} - \frac{28}{3}$$

$$\frac{8}{3}\left(2x + \frac{40}{3}\right) = -\frac{28}{3} \cdot \frac{7}{2}$$

$18x + 80 = -21$

$$x = -\frac{101}{12}$$

$y = ax + 10b$

$(-\frac{16}{3}; 0)$

$$\left(-\frac{101}{12}; \frac{\sqrt{551}}{12}\right)$$

$$\frac{37}{12}a = \frac{\sqrt{551}}{12}$$

$$a = \pm\frac{\sqrt{551}}{37}$$

$$\frac{16\sqrt{551}}{3 \cdot 37} = 10b$$

$$b = \frac{8\sqrt{551}}{555}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$ab: 2^{14}7^{10}$
$bc: 2^{17}7^{17}$
$ac: 2^{20}7^{37}$

$a = 2^{a_1}7^{a_2}$
$b = 2^{b_1}7^{b_2}$
$c = 2^{c_1}7^{c_2}$

$a = 2^{8}7^{17}$
$b = 2^{6}$
$c = 2^{12}7^{20}$

$$\begin{cases} a_1+b_1 \geq 14 \\ a_2+b_2 \geq 10 \\ a_1+c_1 \geq 20 \\ a_2+c_2 \geq 37 \\ b_1+c_1 \geq 17 \\ b_2+c_2 \geq 17 \end{cases}$$

$a_1+b_1+c_1 \geq 25,5$

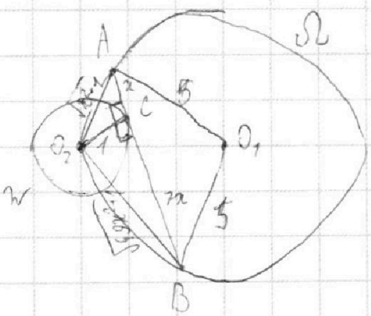
$a_2+b_2+c_2 \geq 32$

$abc \geq 2^{26}7^{37}$

$$\frac{3+5}{(3+5)^2-8\cdot3\cdot5} = \frac{1}{8-15}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$$\frac{8}{64-120} = -\frac{8}{56} = -\frac{1}{7}$$



$2R = AO_2 \cdot BO_2$

$AO_2 \cdot BO_2 = 10$

$$S_{AO_2B} = \frac{AB\cdot10}{20}$$

$$\sin 2\, O_2AB = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{49x^2+1}}{10}$$

$$\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)} = 10$$

$$49x^4+50x^2-99=0$$

$(x-1)(49x+99)=0$

$x=1$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$$

$$\left[\begin{array}{l} x=3,5 \\ \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \end{array}\right.$$

$$\frac{49}{2}-\frac{35}{2}+3$$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=$ $a-b$