



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

$$\begin{aligned} a \cdot b &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ b \cdot c &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ a \cdot c &: 2^{30} \cdot 7^{31} \end{aligned}$$

$a \cdot b \cdot c - \min - ?$

Числа a, b, c можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \\ b &= 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \\ c &= 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3} \end{aligned}$$

т.к. мы хотим, чтобы $a \cdot b \cdot c - \min$,
то в разложении чисел a, b, c
должны отсутствовать другие

простые делители, кроме 2, 7

Заметим, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ - натуральные и
неотрицательные.

Тогда $a \cdot b = 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2}$, аналогично составим
т.о. можно составить следующие неравенства

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &\geq 14 \quad (1) \\ \beta_1 + \beta_2 &\geq 10 \quad (2) \\ \alpha_2 + \alpha_3 &\geq 17 \quad (3) \\ \beta_2 + \beta_3 &\geq 17 \quad (4) \\ \alpha_1 + \alpha_3 &\geq 30 \quad (5) \\ \beta_1 + \beta_3 &\geq 31 \quad (6) \end{aligned}$$

т.к. произв. делится, то
сумма степеней показателей
должна быть не меньше
показателей простого числа,
на которое делится

$$a \cdot b \cdot c = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \cdot 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3} = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$$

1. Сложим (1), (3), (5) неравенства:

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 61$$

чтобы $a \cdot b \cdot c \rightarrow \min$, нужно, чтобы $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \rightarrow \min$

т.к. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ - целое, то

$$\min(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{61}{2} = 31$$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \rightarrow \min$

2. сложим (2), (4), (6) неравенства:

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 64, \text{ т.к. } \min(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 32$$

$$\text{т.о. } \min(a \cdot b \cdot c) = 2^{31} \cdot 7^{32}$$

Ответ: $2^{31} \cdot 7^{32}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

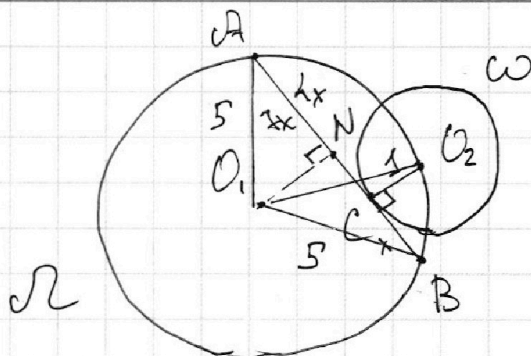
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

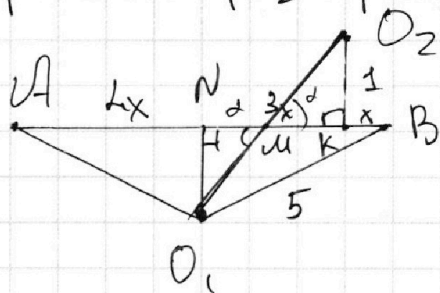
$\omega: r=1$
 $\Omega: R=5$
 $AC:CB=7$
 $AB=?$



2 - радиус ω , R - радиус Ω

Пусть $CB=x$, тогда $AC=7x$

1. Центр окружности O_1, Ω находится на серединном \perp к AB , тогда $AN=4x, BN=4x$. Пусть O_1 задано на серед \perp к AB , $NC=3x, BC=x$
2. O_1A, O_1B - радиусы R
3. Проведши O_1O_2 - радиус R



1) по т. Пифагора для $\triangle AO_1N$:

$$25 = 16x^2 + O_1N^2$$

$$\sin \alpha = \frac{O_1N}{O_1M} \quad \left| \begin{array}{l} \angle NMO_1 = \angle O_2MK = \alpha \\ \Rightarrow O_1M = \frac{O_1N}{\sin \alpha} \\ O_2M = \frac{1}{\sin \alpha} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow O_1M + O_2M = 5 = \frac{1}{\sin \alpha} (O_1N + 1) \quad (1)$$

$$3) \quad \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{O_1N}{NM} \\ \tan \alpha = \frac{1}{MK} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} NM = \frac{O_1N}{\tan \alpha} \\ MK = \frac{1}{\tan \alpha} \end{array} \Rightarrow NM + MK = 3x = \frac{1}{\tan \alpha} (O_1N + 1) \quad (2)$$

(1) : (2):

$$\frac{5}{3x} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\tan \alpha}{1} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9x^2}{25} \quad (**)$$

$$\text{из (1): } \sin \alpha = \frac{O_1N + 1}{5} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{(O_1N + 1)^2}{25} \quad (***)$$

$$(**) + (***) : 1 = \frac{9x^2}{25} + \frac{(O_1N + 1)^2}{25} \Rightarrow 25 = 9x^2 + (O_1N + 1)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Прозвошение.

$$(O, N+1)^2 = 25 - 9x^2 \Rightarrow O, N+1 = \sqrt{25 - 9x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O, N = \sqrt{25 - 9x^2} - 1; \quad O, N^2 = (\sqrt{25 - 9x^2} - 1)^2$$

при $25 \geq 9x^2$

подстави. в 1) + Пирсагорс:

$$25 = 16x^2 + 25 - 9x^2 - 2\sqrt{25 - 9x^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{25 - 9x^2} = 7x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - 36x^2 = 49x^4 + 14x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{99}{49} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1$$

пер-во $25 - 9x^2 \geq 0$ выполн.
все рассужд. справедливы.

$$\text{т.о. } x = 1, \text{ а } AB = 7x + x = 8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 8$$

Ответ: $AB = 8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{a}{b}$ - несократима

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$
 $m \rightarrow \max$

Решение $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$

Используем

если $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь, то
и a и b взаимно простые или a и b взаимно простые
остались простые числа, которых
нет либо вверху, либо внизу

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$\frac{a+b}{ab} \quad \text{если} \quad a+b = ab, \text{ то } (a+b)^2 = ab$$

$$\frac{(a+b)^2 - 8ab}{ab}$$

в дроби $\frac{a}{b}$ находится a и b , которые
взаимно просты по отношению друг к другу
 $a+b = ab$

~~Далее $\frac{a}{b}$ не сократим, поэтому так не можно~~

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a(1 + \frac{b}{a})}{a(a - 6b + \frac{b^2}{a})} = \frac{ab(\frac{1}{b} + \frac{1}{a})}{ab(\frac{a}{b} - 6 + \frac{b}{a})}$$

т.о. можно сократить

Остат. b

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Замена:

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a, a \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b, b \geq 0$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = a^2 & (1) \\ 2x^2 + 2x + 1 = b^2 & (2) \end{cases} \quad \text{Вычтем из (1) (2), т.е.}$$

$$-7x + 2 = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a - b = a^2 - b^2 &\Leftrightarrow (a - b)(a + b) - (a - b) = 0 \Leftrightarrow \\ \Rightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{т.о.} \quad \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} & (1) \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 & (2) \end{cases}$$

Реш (1):

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} &\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 7x = 2 &\Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Реш (2):

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 & (3) \end{aligned}$$

1. рассмотрим $4x^2 - 3x + 3$ - оно всегда больше 0, т.к. $D = 9 - 3 \cdot 4 \cdot 4 < 0$, т.е. $4x^2 - 3x + 3 > 0$

2. произведем корни всегда неотрицательно, т.е.

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

Дуем левую и правую части выражения (3)

Прав. 2: 0

$$\text{Лев. 2: } 2 \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 4x^2 - 3x + 3 > 0$$

Как видно, равенство не достигается

т.о. остаётся только один корень из (1) $x = \frac{2}{7}$

Ответ: $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

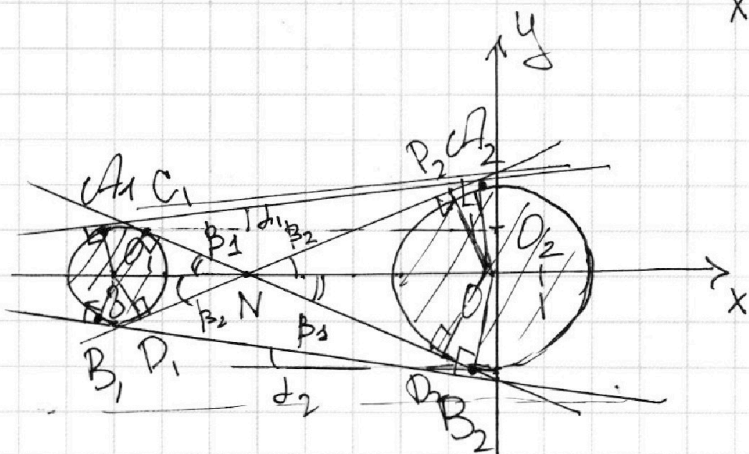
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



NB.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Изобразим на плоскости $(x+8)^2 + y^2 \leq 1$ - круг, радиус 1
 $x^2 + y^2 \leq 4$ - круг, радиус 2



Подставим некоторые значения (iy) в (2) кер-во, можно показать, что (2) кер-во задает 2 круга, радиус 1 и радиус 2

Закрасим область, которую задает (2) кер-во

/// - точкой и стриховкой

(1) ур-ие задает прямую $y = ax + 10b$, где

a - задает угловой коэффициент наклона прямой a
 $10b$ - точка на оси oy при $x=0$, т.е. существование прямой y вдоль oy .

Проведем 2 касательные в двух оир. радиус 1 и радиус 2 (к закрасим фигурам)

2 общие касательные в т. A_1, A_2 и в т. B_1, B_2 , (т. A_1 и B_1 и A_2 и B_2 - симметр. отн. осей)

Проведем радиусы в точки касания
 в (радиус, проведенный в т. касания \perp касательной в т. касание)

Получимось, что A_1, A_2, O_1, O_2 и B_1, O_1, O_2, B_2 - трапеции

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

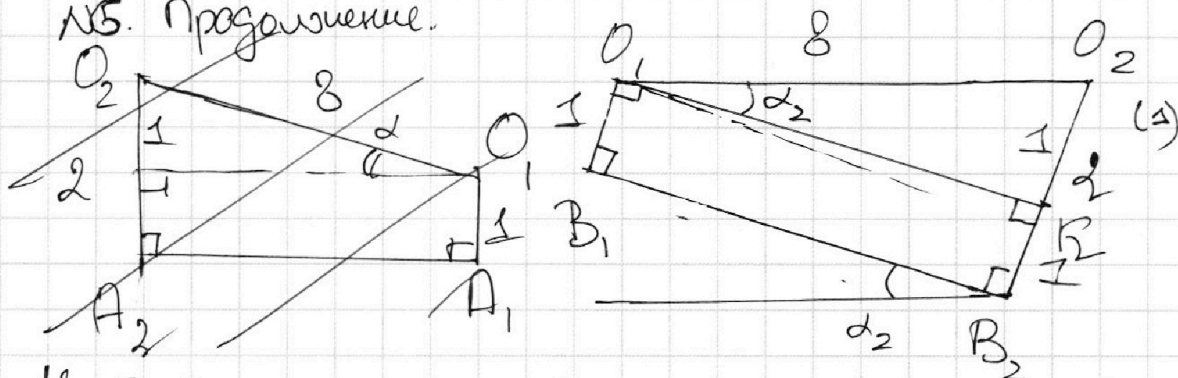
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5. Продолжение.



Необходимо найти угловый наклон прямых A_1A_2 и B_1B_2 .

~~$\sin \alpha = \frac{1}{8}$~~
 Необходимо, чтобы наша прямая касалась двух окружностей, $r_1=1$ и $r_2=2$. Углы, кон-во которых будут не 2 (или углов пересечения) будет не 2.
 Необходимо рассмотреть все общие касательные к двум окружностям на плоскости.
 Общие касательные будут $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$. Необходимо найти $\tan \alpha$ угла наклона общей касательной к оси Ox и будет искомым α .

Две окружности (1):

$O_1O_2 \parallel O_1O_2 \angle (B_1B_2; O_1O_2)$.

Проведем $O_1K \perp O_2B_2 \Rightarrow O_1B_1B_2K$ - прямоугольник (все углы по 90°), т.о. $O_1B_1=1=KB_2 \Rightarrow O_2K=1$.

т.о. $\sin \alpha_2 = \frac{1}{8}$, O_1K по т. Пиф. для ΔO_1O_2K :

$$O_1K = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}, \text{ т.о. } \tan \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 7}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

Мы найдем один из возможных а две окружности с касательной B_1B_2 , такое же α по модулю получим две аналогичные касательные A_1A_2 , но со знаком "-" (график удобен)

т.е. $\alpha_1 = \frac{\sqrt{7}}{21}$
 $\alpha_2 = -\frac{\sqrt{7}}{21}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№. Продолжение.
Рассмотрим теперь окружности $O_1 C_1 N$, $O_2 D_2 N$,
 $O_1 D_1 N$, $O_2 D_2 N$

Возьмем, к примеру, $\triangle O_1 D_1 N$ и $\triangle O_2 D_2 N$
(они подобны), но 2-м углом ($\angle O_1 D_1 N = \angle O_2 D_2 N = 90^\circ$
(радиусы в т. касание)) и $\angle O_1 N D_1 = \angle O_2 N D_2 = \beta_2$

т.о. $\frac{O_1 D_1}{O_2 D_2} = \frac{O_1 N}{O_2 N} \Rightarrow \frac{O_1 N}{O_2 N} = \frac{1}{2} \rightarrow 2O_1 N = O_2 N$

$O_1 N + O_2 N = O_1 O_2 = 8 \Rightarrow 3O_1 N = 8 \Rightarrow O_1 N = \frac{8}{3}$

Найдем $\tan \beta_2$ (или a_3)

по т. Пифагора для

$\triangle O_1 C_1 N$:

$C_1 N = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \sqrt{\frac{64-9}{9}} = \sqrt{\frac{55}{9}} = \frac{\sqrt{55}}{3}$

т.о. $\tan \beta_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{55}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{55}}$

$\tan \beta_1 = \tan \beta_2$, $\beta_1 = \beta_2$ но для β , график убывает,
поэтому $a_4 = -\frac{3}{\sqrt{55}}$

т.о.

$a_3 = \frac{3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$
 $a_4 = -\frac{3}{\sqrt{55}} = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$

При других a кроме a_1, a_2, a_3, a_4 не будет
2-х точек пересечения прямой
и двух кругов

Ответ: ~~$\pm \frac{3}{\sqrt{55}}$~~ ; ~~$\pm \frac{\sqrt{7}}{21}$~~
 $\pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$; $\pm \frac{\sqrt{7}}{21}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

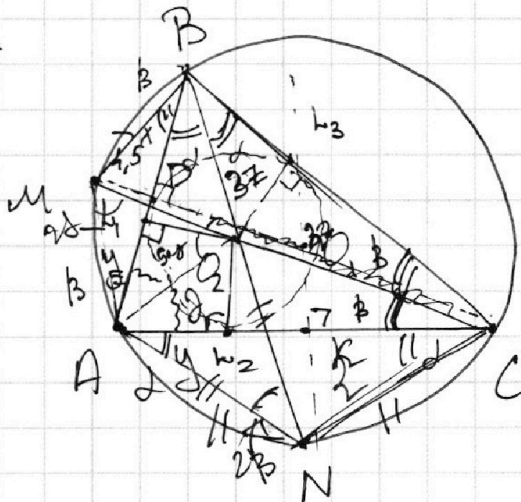
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4



$$\begin{aligned} \sin D &= 4,5 \\ \sin K &= 2 \\ S(A; O_2) &? \end{aligned}$$

- 1) Серединами перпендикуляр к AC и AB проходят соответственно через точки N и M.
- 2) Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис. O_2 - центр вписанной окружности. BO_2 - биссектриса $\angle B$ на сфере. BO_2N - на одной прямой (на равных дугах отрезок равен углу).
- 3) O_1 - центр описанной окружности.
 - 4) аналогично CM - биссектр. $\angle C$
 - 5) Пусть $Bh_1 = x$, то $Bh_3 = x$ а $Ah_1 = y$, то $Ah_2 = y$
 - 6) $\angle CAN = \angle CBN = \angle ABN = \alpha$ (вписанные)
 - 7) $\triangle ANC$ - р(с), то $AN = NC$ (отсекает равные дуги)
 - 8) по th. sin: $\frac{AN}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow AN = 2R \sin \alpha$
 - 9) $MA = MB$ (отсекает равные дуги)
 - 10) $\angle MAB = \angle ABM = \angle ACM = \angle MCB = \beta$
 - 11) по th. sin $\frac{MA}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow MA = 2R \sin \beta$

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7. Продолжение.

12) по т. Пифагора для $\triangle ARN$ и $\triangle AO_1K$:

$$\begin{aligned} AK^2 + KN^2 &= AN^2 \\ AK^2 + O_1K^2 &= AO_1^2 \end{aligned} \Rightarrow O_1K^2 - 4 = AO_1^2 - AN^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R-2)^2 - 4 = R^2 - 4R^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 - 2R + 4 - 4 = R^2 - 4R^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \quad (1)$$

13) по т. Пифагора для $\triangle AMP$ и $\triangle AO_1D$

$$AD^2 + 4.5^2 = AM^2$$

$$AD^2 + (R - 4.5)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 - 9R + 4.5^2 - 4.5^2 = R^2 - 4R^2 \sin^2 \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 = 4R \sin^2 \beta \quad (2)$$

Делим (1) на (2): $\frac{1}{9} = \frac{R \sin^2 \alpha}{4R \sin^2 \beta} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{4}{9}}$

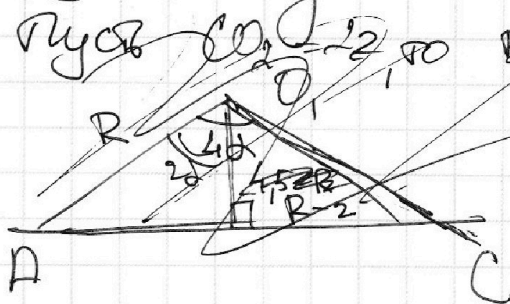
$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2}{3}$$

14) по т. синусов для $\triangle AOB$ и $\triangle AOC$:

$$1. \frac{AO_2}{\sin \beta} = \frac{CO_2}{\sin \angle CAO_2} = \frac{CO_2}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CO_2}{BO_2} = \frac{2}{3}$$

$$2. \frac{AO_2}{\sin \gamma} = \frac{BO_2}{\sin \beta}$$

Пуск $CO_2 = 2, BO_2 = 3$
 $\sin \alpha = \frac{R-2}{R}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. Продолжиме.

$$\left. \begin{aligned} 13) \quad Bh_3 &= 3Z \cdot \cos \beta = Bh_1 \\ 14) \quad Ch_3 &= 2Z \cdot \cos \beta = Ch_2 \end{aligned} \right\} \text{т.к. вышена окружность}$$

$$14) \quad 2R = \frac{Z(3\cos \alpha + 2\cos \beta)}{\sin 2\gamma}$$

$$18) \quad \sin \gamma = \frac{Z}{AO_2}$$

$$AC = 2AN \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 2R \sin \gamma \cdot \cos \alpha = 4R \sin \gamma \cos \alpha$$

$$Ah_2 = 2R \sin 2\alpha - 2Z \cos \beta$$

$$\text{из 14.1.} \quad \sin \gamma = \frac{BO_2}{AO_2} \cdot \sin \alpha = \frac{3Z}{AO_2} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \gamma}{AO_2} = \frac{3Z}{AO_2} \cdot \sin \alpha \Rightarrow Z = 3Z \sin \alpha$$

$$Z = \frac{Z}{3 \sin \alpha}$$

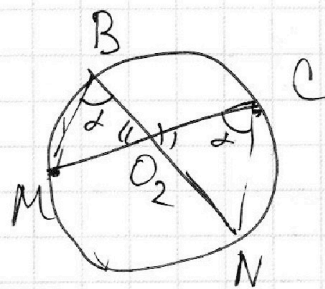
$$\cos \gamma = \frac{Ah_2}{AO_2}$$

$$4R \sin \gamma \cdot \cos \gamma = Z(3\cos \alpha + 2\cos \beta)$$

$$4R \cdot \frac{Z}{AO_2} \cdot \frac{Ah_2}{AO_2}$$

$$\frac{MO_2}{NO_2} = \frac{BO_2}{CO_2} =$$

$$= \frac{3}{2} = \frac{MB}{CN}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. Продолжение.

$$\angle ANO_2 = 2\beta \text{ (вписанный угол)}$$

$$\angle AO_2N = 180 - 90 + \alpha - 90 + \beta = \alpha + \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle AO_2N - \text{р/б}$$

$$\angle ANB = 2\beta \text{ (вписанный)}$$

$$\begin{aligned} \text{связанные} \quad \angle AO_2 &= 2AN \cdot \sin \beta \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \angle AO_2 &= 4 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \\ \angle AO_2 &= \frac{9 \sin \alpha}{\sin \beta} \end{aligned} \right. \Rightarrow \end{aligned}$$

$$AN = \frac{4.5}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow AO_2^2 = 36 \Rightarrow$$

$$AN = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{AO_2 = 6}$$

Ответ: $AO_2 = 6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\text{или } 2x^2 + 2x + 1 = y$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}$$

$$4x^2 - 3x + 4 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{8}$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} =$$

$$= 1 \quad \underbrace{4x^2 - 3x + 3}_{> 0} + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$$



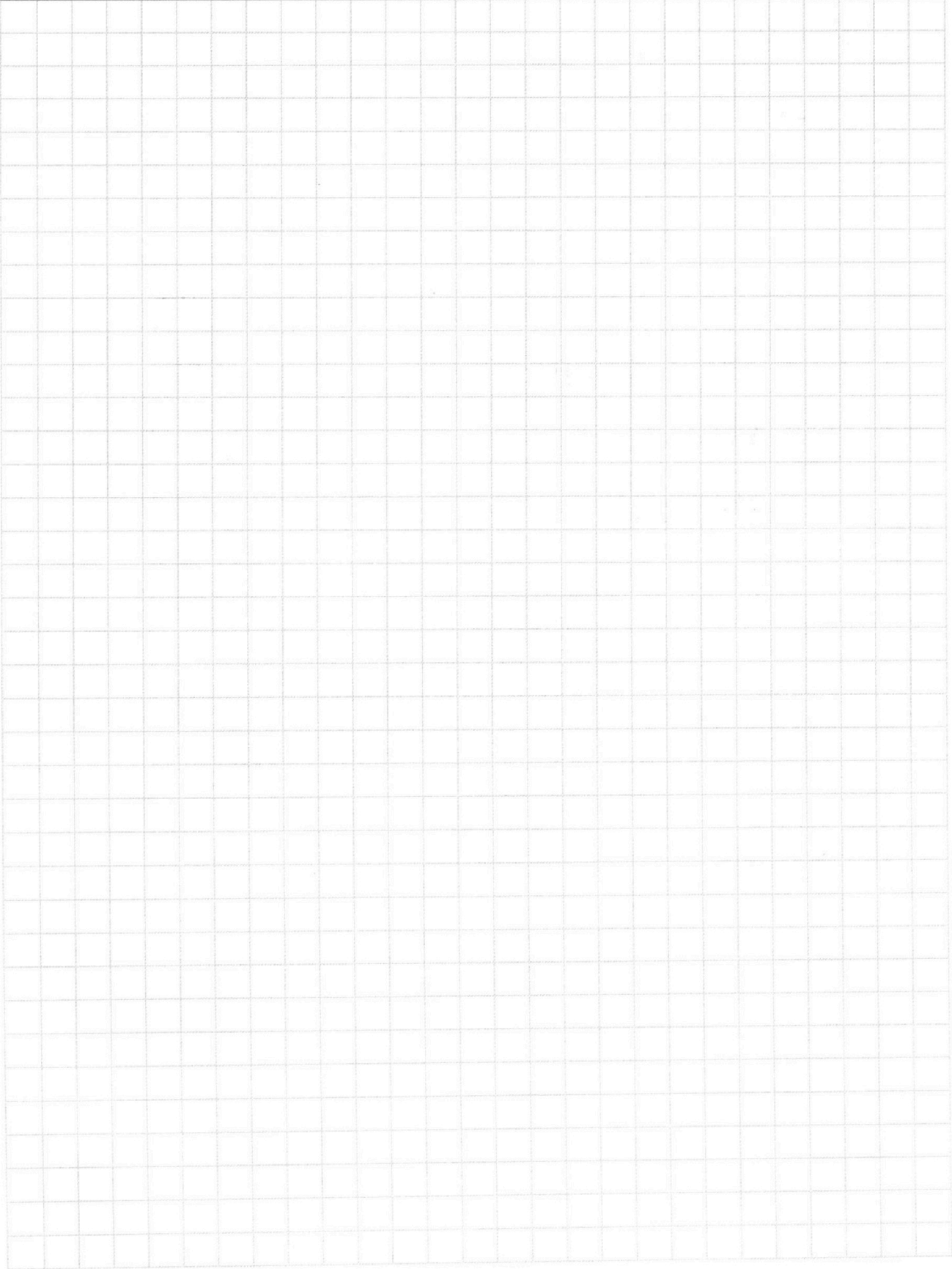
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чертежи

N1

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{11} \cdot 7^{12}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$c = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$abc \rightarrow \text{min} - ?$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 17 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 17 \end{cases} +$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 20 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 37 \end{cases}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_2}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \rightarrow \text{min}$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \beta_2 \rightarrow \text{min}$$

$$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\alpha_2 + 2\beta_2 + 2\beta_2 \geq$$

$$\geq$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_1 + \beta_2 \geq \overbrace{17+17}^{31} + 20$$

$$2(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2) \geq 51 \Rightarrow 2(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2) = 52, \text{ т.к.}$$

$$\alpha_1, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}$$

N2

$$\frac{a}{b}, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = m_{\max} - ?$$

$$= \frac{a+b}{a^2 + 2ab - 8ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 6ab} =$$

$$= \frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{(a+b)^2}{m} - \frac{6ab}{m}} = \frac{\frac{a+b}{m}}{b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 6\frac{a}{b} + 1 \right)}$$

можно сократить на b

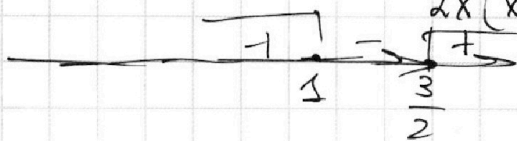
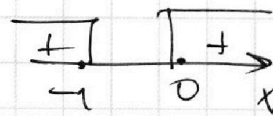
$$\overbrace{h+h+h}^{12} + \overbrace{5+5+5}^{15} + 6 = 18 + 15 = 33$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

при каких $x \geq 1$:

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 1$$

$$2x(x+1) \geq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4. Черновик

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2(x-1)(x-\frac{3}{2})} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Замечаем:

$$2 - 7x = t$$

Замечаем: $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a, a \geq 0$
 $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b, b \geq 0$

$$\begin{cases} a^2 = 2x^2 - 5x + 3 \\ b^2 = 2x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 2 - 7x$$

$$a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b) - (a - b)(a + b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(1 + a + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

т.к. $a \geq 0, b \geq 0$, то $a + b + 1 \geq 1$, т.о. не подходит (2)

$$a = b$$

$$\text{т.о. } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 7x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 - \text{всегда} \end{cases}$$

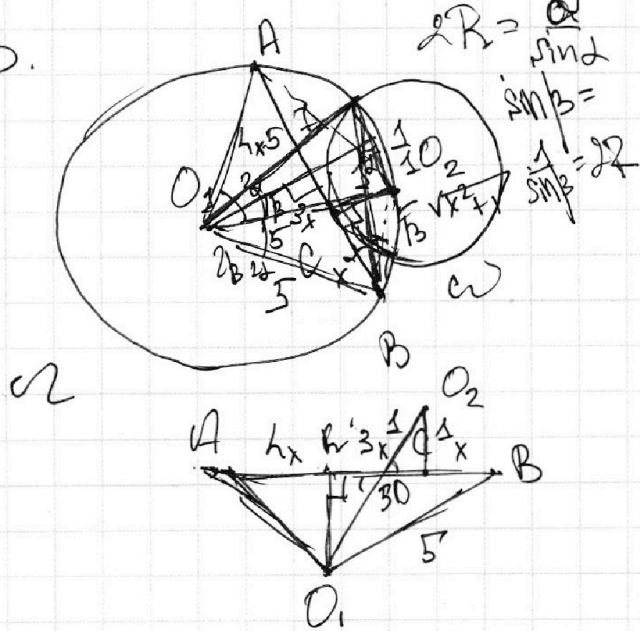
$$1 + x_1^2 = y_1^2$$

$$1 + x_2^2 = y_2^2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{x_2^2 + 1} + \sqrt{1 + x_1^2} = 5$$

N3.



AC: $CB = 7$

$$\begin{cases} \angle \omega = 1 \\ \angle \omega = 5 \end{cases} \quad 3x = \frac{O_1 K \cdot 1}{\text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta}$$

AB - ?

$$8x - ? \quad \text{tg} \alpha = \frac{O_1 K}{y_1}; \text{tg} \beta = \frac{1}{y_2}$$

x - ?

$$\sin \alpha = \frac{O_1 K}{O_1 P}; \sin \beta = \frac{1}{O_2 D}$$

$$5 = \frac{O_1 K}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta}$$

$$O_1 K^2 + H O_1^2 = 25$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

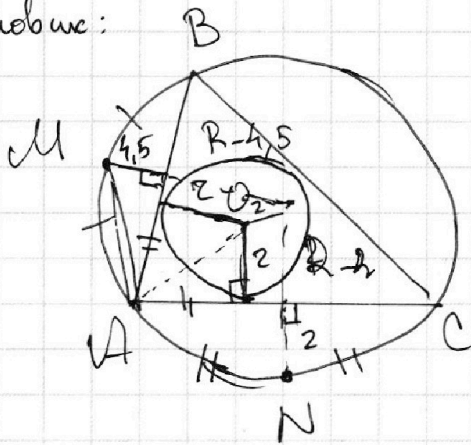
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

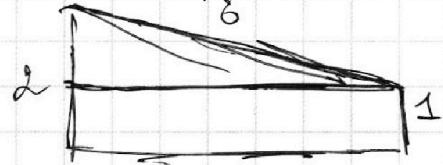


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:



$$\begin{aligned}
 &P(A; O_2) = 8 \\
 &P(M; AB) = 4,5 \\
 &P(N; AC) = 2
 \end{aligned}$$

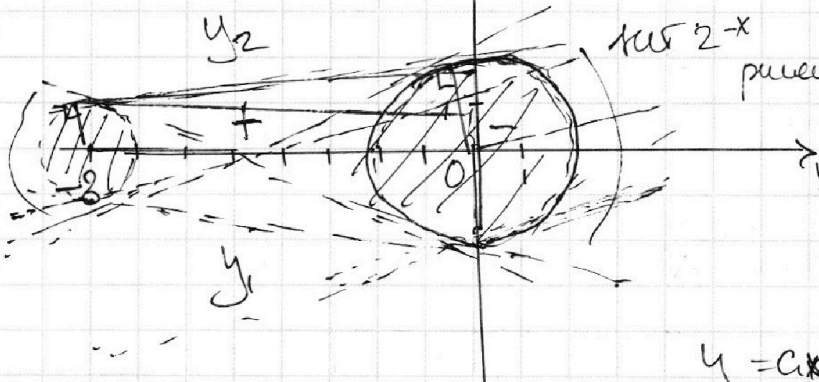


$$ax - y + 10b = 0$$

$$((x+8)^2 + (y^2-1)(x^2+y^2-4)) \leq 0$$

$$\Rightarrow y = ax + 10b$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$



$$\begin{aligned}
 &(x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\
 &x^2 + y^2 \geq 4 \\
 &(x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\
 &x^2 + y^2 \leq 4
 \end{aligned}$$

- исключаем:
- касающиеся
- решения
- $(-8; 0)$
- $(-7; 0)$
- $(-6; 0)$
- $(0; 1)$
- $(8+1-1)(0+1-4) \leq 0$
- $(3; 4)$

$$y = ax + 10b$$

а-угл. коэфф.

где минимум находится между двух решений:
 при $a=0$, не находится такой точки
 $x=0; y=10b$, - отвечает только за связь по оси y

$$\frac{1+1}{1-6+1} = \frac{2}{-4} = -0,5$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{25}{9} - 6 \cdot \frac{25}{9} + \frac{25}{9} = \frac{4 \cdot 25}{9} \\
 &= \frac{3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 100} = 3/10
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



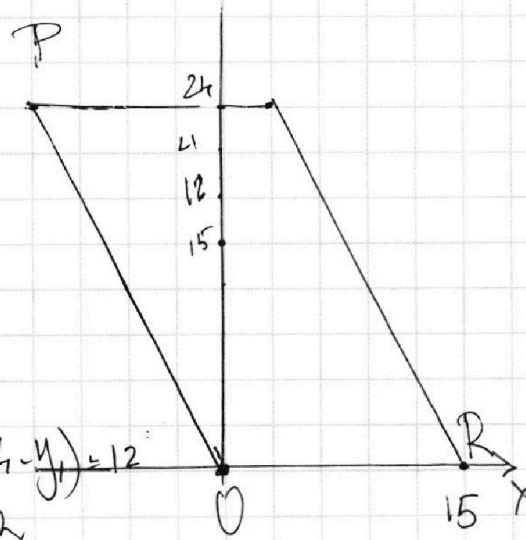
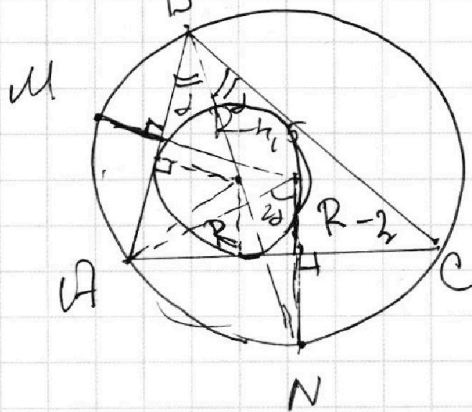
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 3x &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot (O_1K+1) \\
 5 &= \frac{1}{\sin \alpha} \cdot (O_1K+1) \\
 \frac{5}{3x} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \\
 \frac{5}{(O_1K+1)} &= \frac{1}{\cos \alpha} \\
 \frac{(O_1K+1)^2}{25} &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \\
 \frac{(O_1K+1)^2}{25} + \frac{9x^2}{25} &= 1 \\
 49x^4 + 50x^2 - 99 &= 0 \\
 x^2 = 1 &\rightarrow \boxed{x=1}, \quad AB = 8x \Rightarrow \boxed{AB=8}
 \end{aligned}$$

N2. $\frac{a+b}{a^2-b^2ab+b^2}$ составит из
 $\frac{a}{b}$ - число, т.о. a - простое число из
 b - составное из простых чисел

$$\begin{aligned}
 x_1 \cdot x_2 &= -\frac{99}{49} \\
 x_1 &= 1
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 &= 12 \\
 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) &= 12 \\
 (-15, 24), \quad 2(-12 - x_1) + (24 - y_1) &= 12 \\
 -2x_1 - y_1 &= 12
 \end{aligned}$$