



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

$$\begin{aligned} a \cdot b &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ b \cdot c &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ a \cdot c &: 2^{30} \cdot 7^{31} \end{aligned}$$

$a \cdot b \cdot c - \min - ?$

Числа  $a, b, c$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \\ b &= 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \\ c &= 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3} \end{aligned}$$

т.к. мы хотим, чтобы  $a \cdot b \cdot c - \min$ ,  
то в разложении чисел  $a, b, c$   
должны отсутствовать другие

простые делители, кроме 2, 7

Заметим, что  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  - натуральные и  
неотрицательные.

Тогда  $a \cdot b = 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2}$ , аналогично составим  
т.о. можно составить следующие неравенства

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &\geq 14 & (1) \\ \beta_1 + \beta_2 &\geq 10 & (2) \\ \alpha_2 + \alpha_3 &\geq 17 & (3) \\ \beta_2 + \beta_3 &\geq 17 & (4) \\ \alpha_1 + \alpha_3 &\geq 30 & (5) \\ \beta_1 + \beta_3 &\geq 31 & (6) \end{aligned}$$

т.к. произв. делится на  
сумму степеней показателя  
дальше надо не меньше  
показателей простого числа,  
на которое делится

$$a \cdot b \cdot c = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \cdot 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3} = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$$

1. Сложим (1), (3), (5) неравенства:

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 61$$

чтобы  $a \cdot b \cdot c \rightarrow \min$ , нужно, чтобы  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \rightarrow \min$

т.к.  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  - целое, то

$$\min(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{61}{2} = 31$$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \rightarrow \min$

2. Сложим (2), (4), (6) неравенства:

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 64, \text{ т.к. } \min(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 32$$

т.о.  $\min(a \cdot b \cdot c) = 2^{31} \cdot 7^{32}$

Ответ:  $2^{31} \cdot 7^{32}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

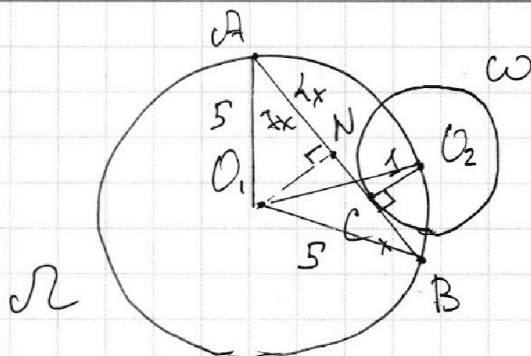
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

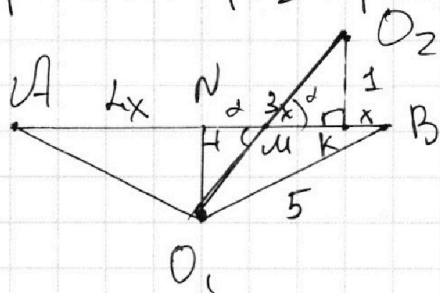
$\omega: r=1$   
 $\Omega: R=5$   
 $AC:CB=7$   
 $AB=?$



2 - радиус  $\omega$ ,  $R$  - радиус  $\Omega$

Пусть  $CB=x$ , тогда  $AC=7x$

1. Центр окружности  $O_1$   $\Omega$  находится на серединном  $\perp$  к  $AB$ , тогда  $AN=4x$ ,  $BN=x$ . Пусть  $O_1$  задано на серед  $\perp$  к  $AB$ ,  $NC=3x$ ,  $BC=x$
2.  $O_1A, O_1B$  - радиусы  $R$
3. Проведши  $O_1O_2$  - радиус  $R$



1) по т. Пифагора для  $\Delta O_1N$ :

$$25 = 16x^2 + O_1N^2$$

$$\sin \alpha = \frac{O_1N}{O_1M} \quad \left| \Rightarrow \quad O_1M = \frac{O_1N}{\sin \alpha} \right. =$$

$$\sin \beta = \frac{1}{O_2M} \quad \left. \quad O_2M = \frac{1}{\sin \beta} \right| =$$

$$\Rightarrow O_1M + O_2M = 5 = \frac{1}{\sin \alpha} (O_1N + 1) \quad (1)$$

$$3) \quad \begin{cases} \tan \alpha = \frac{O_1N}{NM} \\ \tan \beta = \frac{1}{MK} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NM = \frac{O_1N}{\tan \alpha} \\ MK = \frac{1}{\tan \beta} \end{cases} \Rightarrow NM + MK = 3x = \frac{1}{\tan \alpha} (O_1N + 1) \quad (2)$$

(1) : (2):

$$\frac{5}{3x} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\tan \alpha}{1} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9x^2}{25} \quad (**)$$

$$\text{из (1):} \quad \sin \alpha = \frac{O_1N + 1}{5} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{(O_1N + 1)^2}{25} \quad (***)$$

$$(**) + (***) : \quad 1 = \frac{9x^2}{25} + \frac{(O_1N + 1)^2}{25} \Rightarrow 25 = 9x^2 + (O_1N + 1)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Прозвоношение.

$$(O, N+1)^2 = 25 - 9x^2 \Rightarrow O, N+1 = \sqrt{25 - 9x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O, N = \sqrt{25 - 9x^2} - 1; \quad O, N^2 = (\sqrt{25 - 9x^2} - 1)^2$$

при  $25 \geq 9x^2$

подставл. в 1) + Пифагорс:

$$25 = 16x^2 + 25 - 9x^2 - 2\sqrt{25 - 9x^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{25 - 9x^2} = 7x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - 36x^2 = 49x^4 + 14x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{99}{49} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1$$

пер-во  $25 - 9x^2 \geq 0$  выполн.  
все рассужд. справедливы.

$$\text{т.о. } x = 1, \text{ а } AB = 7x + x = 8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 8$$

Ответ:  $AB = 8$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{a}{b}$  - несократима

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$   
 $m \rightarrow \max$

Решение  $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$  именованное

если  $\frac{a}{b}$  - несократимая дробь, то  
и в числителе и в знаменателе  
останутся простые числа, которых  
нет либо вверху, либо внизу

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$\frac{a+b}{ab} \quad \text{если} \quad a+b : ab, \text{ то и } (a+b)^2 : ab$$

в дроби  $\frac{a}{b}$  находится  $a$  и  $b$ , которые  
взаимно просты по отношению друг к другу  
 $a+b : ab$

~~Далее  $\frac{a}{b}$  не сократим, поэтому так не можно~~

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a(1+\frac{b}{a})}{a(a-6b+\frac{b^2}{a})} = \frac{ab(\frac{1}{b}+\frac{1}{a})}{ab(\frac{a}{b}-6+\frac{b}{a})}$$

т.о. можно сократить

Остат.  $b$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Замена:

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a, a \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b, b \geq 0$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = a^2 & (1) \\ 2x^2 + 2x + 1 = b^2 & (2) \end{cases} \quad \text{Вычтем из (1) (2), т.е.}$$

$$-7x + 2 = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a - b = a^2 - b^2 &\Leftrightarrow (a - b)(a + b) - (a - b) = 0 \Leftrightarrow \\ \Rightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{т.о.} \quad \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} & (1) \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 & (2) \end{cases}$$

Реш (1):

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} &\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 7x = 2 &\Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Реш (2):

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 & (3) \end{aligned}$$

1. рассмотрим  $4x^2 - 3x + 3$  - оно всегда больше 0,  
т.к.  $D = 9 - 3 \cdot 4 \cdot 4 < 0$ , т.е.  $4x^2 - 3x + 3 > 0$

2. произведем корни всегда неотрицательно, т.е.

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

Дуем левую и правую части выражения (3)

Прав. 2: 0

$$\text{Лев. 2: } 2 \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 4x^2 - 3x + 3 > 0$$

Как видно, равенство не достигается

т.о. остаётся только один корень из (1)  $x = \frac{2}{7}$

Ответ:  $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

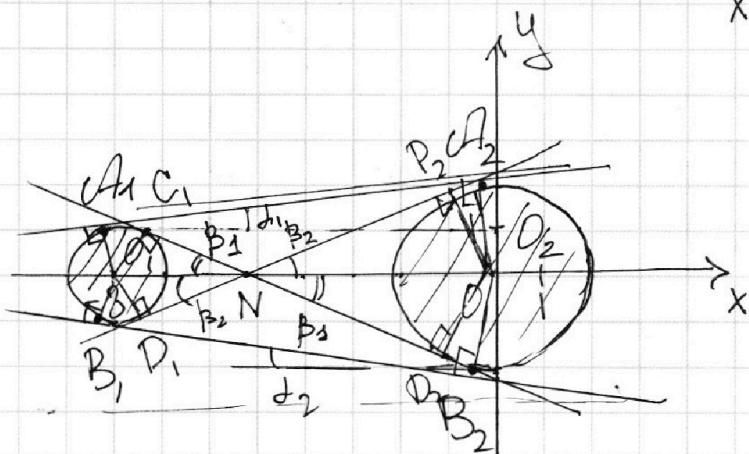
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



NB.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Изобразим на плоскости  $(x+8)^2 + y^2 \leq 1$  - круг, радиус 1  
 $x^2 + y^2 \leq 4$  - круг, радиус 2



Подставим некоторые значения  $(x, y)$  в (2) кер-во, можно показать, что (2) кер-во задает 2 круга, радиус 1 и радиус 2

Закрасим область, которую задает (2) кер-во

/// - точкой и стрелочкой

(1) ур-ие задает прямую  $y = ax + 10b$ , где

$a$  - задает угловой коэффициент наклона прямой  $a$   
 $10b$  - точка на оси  $oy$  при  $x=0$ , т.е. значение прямой  $y$  вдоль  $oy$ .

Проведем 2 касательные в двум окр., радиус 1 и радиус 2 (к закрасим фигурам)

2 общие касательные в т.  $A_1, A_2$  и в т.  $B_1, B_2$ , (т.  $A_1$  и  $B_1$  и  $A_2$  и  $B_2$  - симметр. отн. осей)

Проведем радиусы в точки касания  
 в (радиус, проведенный в т. касания  $\perp$  касательной в т. касания)

Получимось, что  $A_1, A_2, O_1, O_2$  и  $B_1, B_2, O_1, O_2$  - трапеции

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

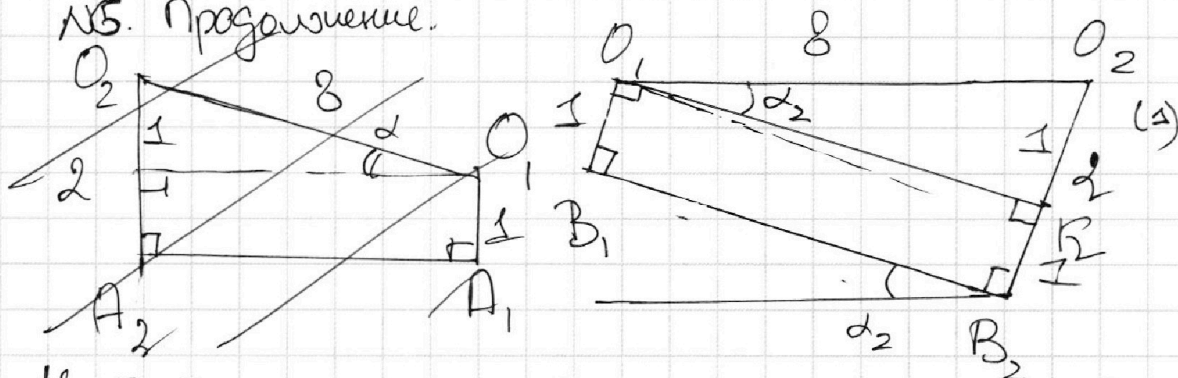
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5. Продолжение.



Необходимо найти угловый наклон прямых  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$ .

~~$\tan \alpha = \frac{1}{8}$~~

Необходимо, чтобы наша прямая касалась двух окружностей  $r_1=1$  и  $r_2=2$ . Иначе, кон-во общих точек (точек пересечения) будет не 2.

Необходимо рассмотреть все общие касательные к двум окружностям на плоскости.

Общие касательные будут  $A_1A_2, B_1B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ . Необходимо найти  $\tan$  угла наклона общей касательной к оси  $Ox$   $\alpha$  и будет искомым  $\alpha$ .

Две окружности (1):

$O_1O_2 \parallel O_1O_2 \quad \angle(B_1B_2; O_1O_2)$

Проведем  $O_1K \perp O_2B_2 \Rightarrow O_1B_1B_2K$  - прямоугольник (все углы по  $90^\circ$ ), т.о.  $O_1B_1=1=KB_2 \Rightarrow O_2K=1$ .

т.о.  $\sin \alpha_2 = \frac{1}{8}$ ,  $O_1K$  по т. Пиф. для  $\Delta O_1O_2K$ :

$O_1K = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$ , т.о.  $\tan \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 7}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$

Мы найдем один из возможных а две окружности с касательной  $B_1B_2$ , такое же  $\alpha$  по модулю получим две аналогичные касательные  $A_1A_2$ , но со знаком "-" (график удобен)

т.е.  $\alpha_1 = \frac{\sqrt{7}}{21}$   
 $\alpha_2 = -\frac{\sqrt{7}}{21}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№. Продолжение.  
Рассмотрим теперь окружности  $O_1 C_1 N$ ,  $O_2 D_2 N$ ,  
 $O_1 D_1 N$ ,  $O_2 D_2 N$

Возьмем, к примеру,  $\triangle O_1 D_1 N$  и  $\triangle O_2 D_2 N$   
(они подобны), но 2-м углом ( $\angle O_1 D_1 N = \angle O_2 D_2 N = 90^\circ$   
(радиусы в т. касания)) и  $\angle O_1 N D_1 = \angle O_2 N D_2 = \beta_2$

т.о.  $\frac{O_1 D_1}{O_2 D_2} = \frac{O_1 N}{O_2 N} \Rightarrow \frac{O_1 N}{O_2 N} = \frac{1}{2} \rightarrow 2O_1 N = O_2 N$

$O_1 N + O_2 N = O_1 O_2 = 8 \Rightarrow 3O_1 N = 8 \Rightarrow O_1 N = \frac{8}{3}$

Найдем  $\tan \beta_2$  (или  $a_3$ )

по т. Пифагора для

$\triangle O_1 C_1 N$ :

$C_1 N = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \sqrt{\frac{64-9}{9}} = \sqrt{\frac{55}{9}} = \frac{\sqrt{55}}{3}$

т.о.  $\tan \beta_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{55}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{55}}$

$\tan \beta_1 = \tan \beta_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  но для  $\beta$ , градусы удобней,  
поэтому  $a_4 = -\frac{3}{\sqrt{55}}$

т.о.

$a_3 = \frac{3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$   
 $a_4 = -\frac{3}{\sqrt{55}} = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$

При других  $a$  кроме  $a_1, a_2, a_3, a_4$  не будет  
2-х точек пересечения прямой  
и двух кругов

Ответ:  ~~$\pm \frac{3}{\sqrt{55}}$~~  ;  ~~$\pm \frac{\sqrt{7}}{21}$~~   
 $\pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$  ;  $\pm \frac{\sqrt{7}}{21}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

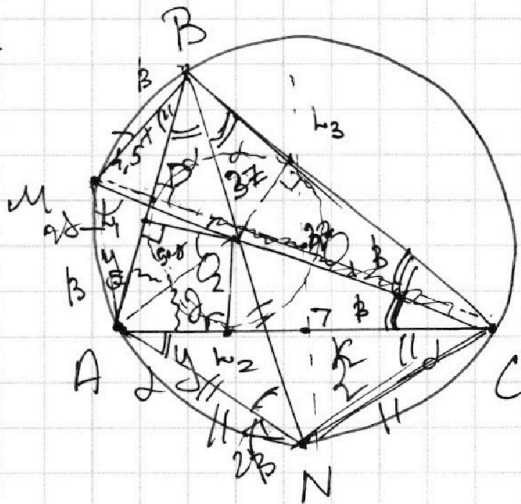
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 7



$$\begin{aligned}
 \sin D &= 4,5 \\
 \sin K &= 2 \\
 S(A; O_2) &?
 \end{aligned}$$

- 1) Серединами перпендикуляр к AC и AB проходят соответственно через точки N и M.
- 2) Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис.  $O_2$  - центр вписанной окружности.  $BO_2$  - биссектриса  $\angle B$  на сфере.  $BO_2N$  - на одной прямой (на равных дугах отрезок равен углу).
- 3)  $O_1$  - центр описанной окружности.
- 4) Аналогично CM - биссектриса  $\angle C$ .
- 5) Пусть  $BH_1 = x$ , то  $BH_3 = x$  и  $AH_1 = y$ , то  $AH_2 = y$ .
- 6)  $\angle CAN = \angle CBN = \angle ABN = \alpha$  (вписанные).
- 7)  $\triangle ANC$  -  $p(\delta)$ , то  $AN = NC$  (отсекает равные дуги).
- 8) по th. sin:  $\frac{AN}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow AN = 2R \sin \alpha$ .
- 9)  $\sphericalangle MA = \sphericalangle MB$  (отсекает равные дуги).
- 10)  $\sphericalangle MAB = \sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM = \sphericalangle MCB = \beta$ .
- 11) по th. sin  $\frac{MA}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow MA = 2R \sin \beta$ .

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7. Продолжение.

12) по т. Пифагора для  $\triangle ARN$  и  $\triangle AO_1K$ :

$$\begin{aligned} AK^2 + KN^2 &= AN^2 \\ AK^2 + O_1K^2 &= AO_1^2 \end{aligned} \Rightarrow O_1K^2 - 4 = AO_1^2 - AN^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R-2)^2 - 4 = R^2 - 4R^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 - 2R + 4 - 4 = R^2 - 4R^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \quad (1)$$

13) по т. Пифагора для  $\triangle AMP$  и  $\triangle AO_1D$

$$AD^2 + 4,5^2 = AM^2$$

$$AD^2 + (R - 4,5)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 - 9R + 4,5^2 - 4,5^2 = R^2 - 4R^2 \sin^2 \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 = 4R \sin^2 \beta \quad (2)$$

Делим (1) на (2):  $\frac{1}{9} = \frac{R \sin^2 \alpha}{4R \sin^2 \beta} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{4}{9}}$

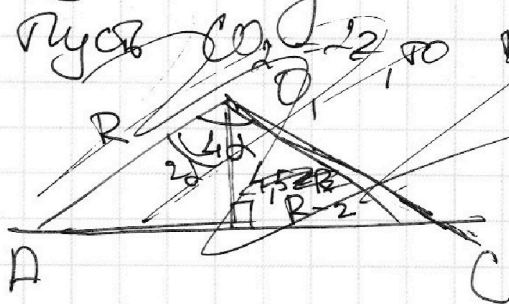
$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2}{3}$$

14) по т. синусов для  $\triangle AOB$  и  $\triangle AOC$ :

$$1. \frac{AO_2}{\sin \beta} = \frac{CO_2}{\sin \angle CAO_2} = \frac{CO_2}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CO_2}{BO_2} = \frac{2}{3}$$

$$2. \frac{AO_2}{\sin \gamma} = \frac{BO_2}{\sin \beta}$$

Пуск  $CO_2 = 2, BO_2 = 3, \sin \alpha = \frac{R-2}{R}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. Продолжиме.

$$\left. \begin{aligned} 13) \quad Bh_3 &= 3z \cdot \cos \beta = Bh_1 \\ 14) \quad Ch_3 &= 2z \cdot \cos \beta = Ch_2 \end{aligned} \right\} \text{т.к. вышена окружность}$$

$$14) \quad 2R = \frac{z(3\cos \alpha + 2\cos \beta)}{\sin 2\gamma}$$

$$18) \quad \sin \gamma = \frac{z}{AO_2}$$

$$AC = 2AN \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 2R \sin \gamma \cdot \cos \alpha = 4R \sin \gamma \cos \alpha$$

$$Ah_2 = 2R \sin 2\alpha - 2z \cos \beta$$

$$\text{из 14.1.} \quad \sin \gamma = \frac{BO_2}{AO_2} \cdot \sin \alpha = \frac{3z}{AO_2} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \gamma}{AO_2} = \frac{3z}{AO_2} \cdot \sin \alpha \Rightarrow z = 3z \sin \alpha$$

$$z = \frac{z}{3 \sin \alpha}$$

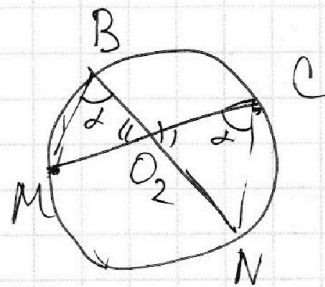
$$\cos \gamma = \frac{Ah_2}{AO_2}$$

$$4R \sin \gamma \cdot \cos \gamma = z(3\cos \alpha + 2\cos \beta)$$

$$4R \cdot \frac{z}{AO_2} \cdot \frac{Ah_2}{AO_2}$$

$$\frac{MO_2}{NO_2} = \frac{BO_2}{CO_2} =$$

$$= \frac{3}{2} = \frac{MB}{CN}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. Продолжение.

$$\angle ANO_2 = 2\beta \text{ (вписанный угол)}$$

$$\angle AO_2N = 180 - 90 + \alpha - 90 + \beta = \alpha + \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle AO_2N - \text{р/б}$$

$$\angle ANB = 2\beta \text{ (вписанный)}$$

$$\begin{aligned} \text{с использованием} \quad \angle AO_2 = 2AN \cdot \sin \beta &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \angle AO_2 &= 4 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \\ \angle AO_2 &= \frac{9 \sin \alpha}{\sin \beta} \end{aligned} \right. \Rightarrow \end{aligned}$$

$$AN = \frac{4.5}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow AO_2^2 = 36 \Rightarrow$$

$$AN = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{AO_2 = 6}$$

Ответ:  $AO_2 = 6$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\text{или } 2x^2 + 2x + 1 = y$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}$$

$$4x^2 - 3x + 4 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{8}$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} =$$

$$= 1 \quad \underbrace{4x^2 - 3x + 3}_{> 0} + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$$



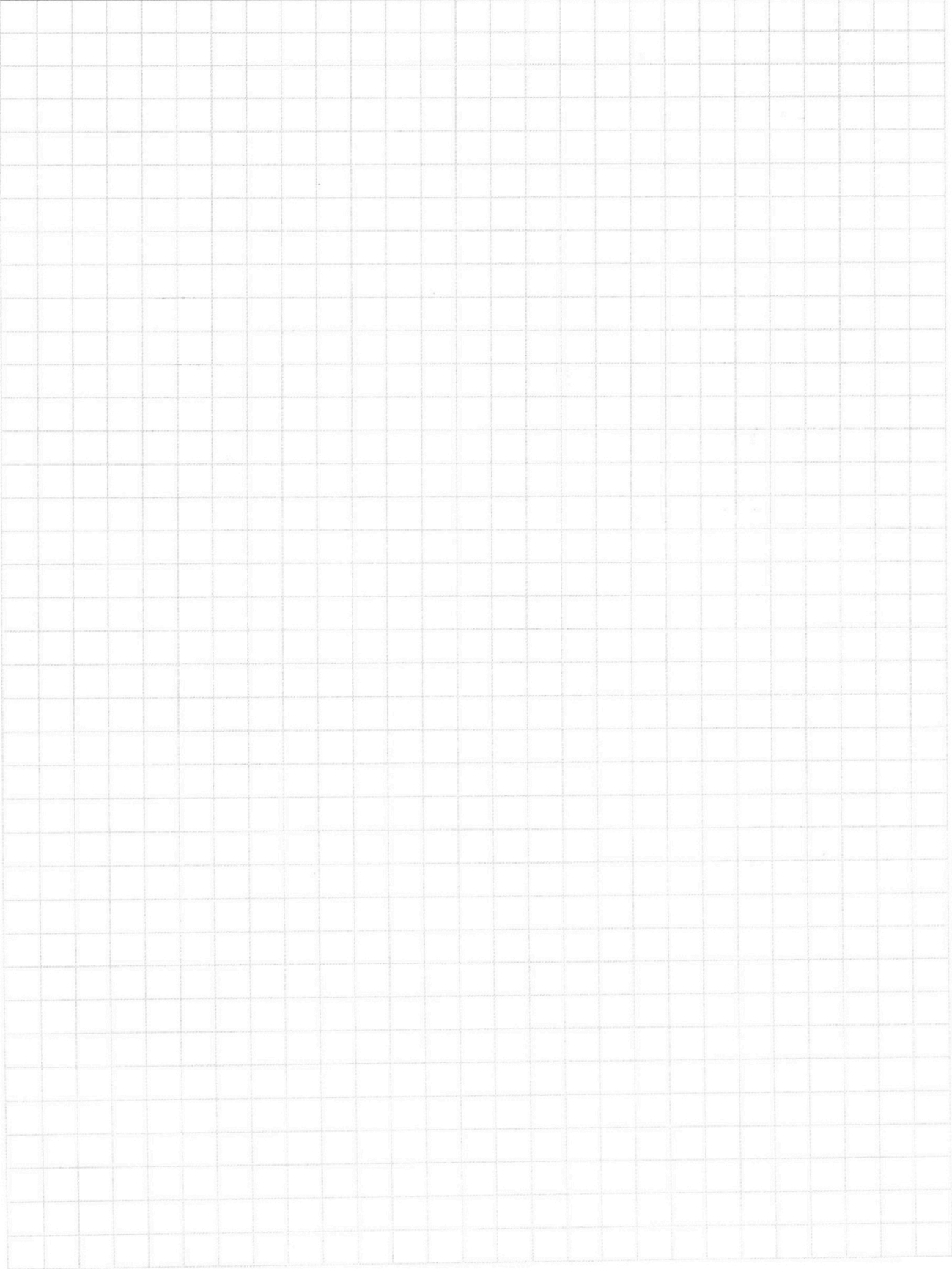
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чертежи

N1

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{11} \cdot 7^{12}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$c = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$abc \rightarrow \text{min} - ?$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 17 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 17 \end{cases}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_2}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 \rightarrow \text{min}$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \beta_2 \rightarrow \text{min}$$

$$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\alpha_2 + 2\beta_2 + 2\beta_2 \geq 31$$

$$2(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2) \geq 51 \Rightarrow 2(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2) = 52, \text{ т.к.}$$

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{N}$$

N2

$$\frac{a}{b}, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = m_{\text{max}} - ?$$

$$= \frac{a+b}{a^2 + 2ab - 8ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 6ab} = \frac{\frac{a+b}{b}}{b \left(1 + \frac{a}{b}\right)} = \frac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^2 - \frac{6ab}{b^2}}{b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 6\frac{a}{b} + 1\right)}$$

можно сократить на  $b$

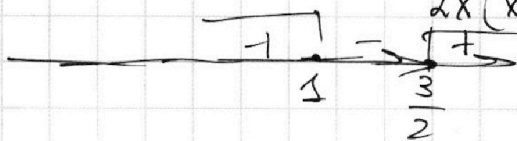
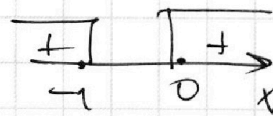
$$\frac{12}{4+4+4} + \frac{15}{5+5+5} + 6 = 18 + 15 = 33$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

при каких  $x \geq 1$ :

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 1$$

$$2x(x+1) \geq 0$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4. Черновик

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2(x-1)(x-\frac{3}{2})} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Замечаем:

$$2 - 7x = t$$

Замечаем:  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a, a \geq 0$   
 $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b, b \geq 0$

$$\begin{cases} a^2 = 2x^2 - 5x + 3 \\ b^2 = 2x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 2 - 7x$$

$$a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b) - (a - b)(a + b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(1 + a + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

т.к.  $a \geq 0, b \geq 0$ , то  $a + b + 1 \geq 1$ , т.о. не подходит (2)

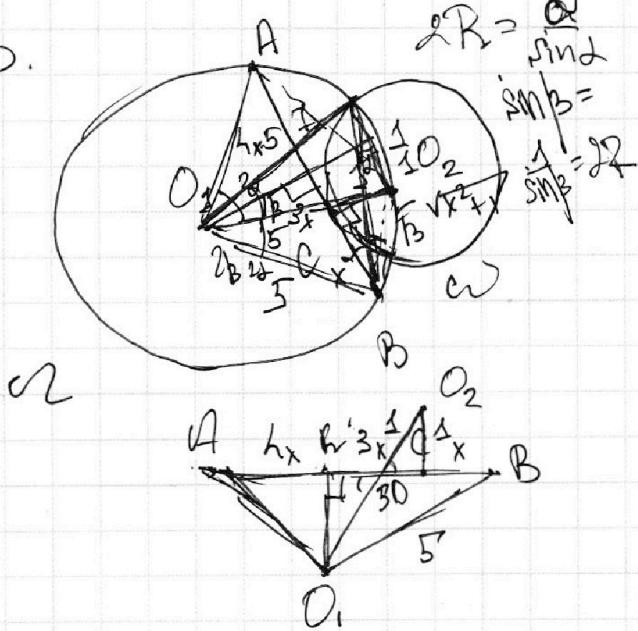
$$a = b$$

$$\text{т.о. } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 7x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \text{ - всегда} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 + x_1^2 &= y_1^2 \\ 1 + x_2^2 &= y_2^2 \\ \sqrt{x_2^2 + 1} + \sqrt{1 + x_1^2} &= 5 \end{aligned}$$

N3.



AC:  $CB = 7$   
 $\angle \omega = 1$   
 $\angle \omega = 5$

$AB = ?$   
 $\angle x = ? \quad \text{tg} \alpha = \frac{OK}{y_1}; \text{tg} \beta = \frac{1}{y_2}$   
 $x = ? \quad \sin \alpha = \frac{OK}{O_1D}; \sin \beta = \frac{1}{O_2D}$   
 $5 = \frac{OK}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta}$   
 $O_1K^2 + HO_2^2 = 25$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

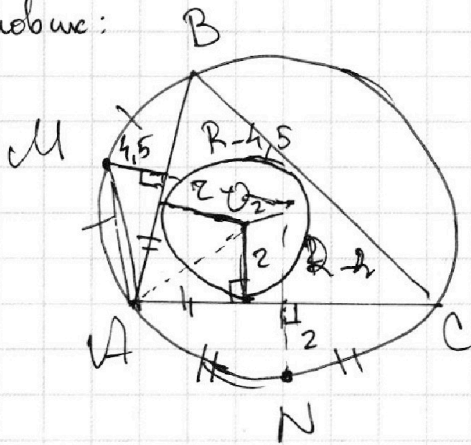
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

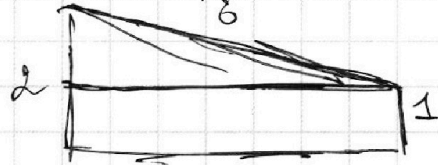
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик:



$$\begin{aligned} P(A; O_2) &= 8 \\ P(M; AB) &= 4,5 \\ P(N; AC) &= 2 \end{aligned}$$

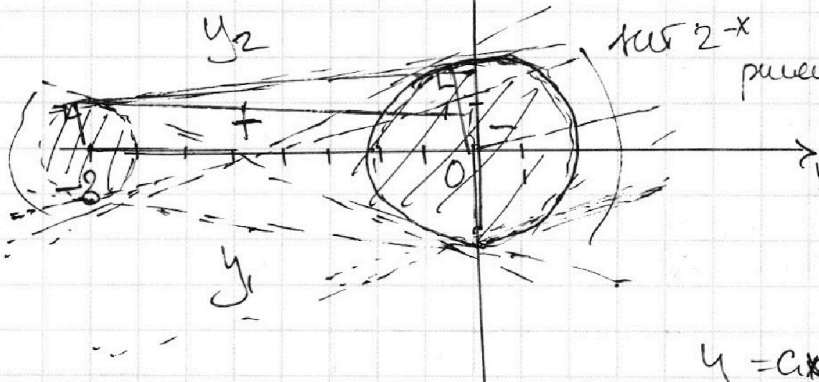


$$ax - y + 10b = 0$$

$$((x+8)^2 + (y^2-1)(x^2+y^2-4)) \leq 0$$

$$\Rightarrow y = ax + 10b$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$



$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &(-8; 0) \\ &(-7; 1) \\ &(-6; 0) \\ &(0; 1) \\ &(8+1-1)(0+1-4) \leq 0 \\ &(3; 4) \end{aligned}$$

$$y = ax + 10b$$

а-угл. коэфф.

где максимум находится между двух решений:  
при  $a=0$ , не находится такой точки  
 $x=0; y=10b$ , - отвечает только за сдвиг по оси  $y$

$$\frac{1+1}{1-6+1} = \frac{2}{-4} = -0,5$$

$$\begin{aligned} &\frac{5}{3} \\ &\frac{10}{3} \\ &-\frac{10}{3} \\ &\frac{25}{9} - 6 \cdot \frac{25}{9} + \frac{25}{9} = \frac{4 \cdot 25}{9} \\ &= \frac{3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 100} \\ &= 3/10 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot (0,1R+1)$$

$$5 = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot (0,1R+1)$$

$$\frac{5}{3x} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{5}{(0,1R+1)}$$

$$\frac{(0,1R+1)^2}{5^2} = \sin^2 \alpha + \frac{9x^2}{25} \cos^2 \alpha$$

$$\frac{(0,1R+1)^2}{25} + \frac{9x^2}{25} = 1$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x=1}, AB=8 \Rightarrow \boxed{AB=8}$$

$$(0,1R+1)^2 = 25 - 9x^2$$

$$0,1R+1 = \sqrt{25 - 9x^2}$$

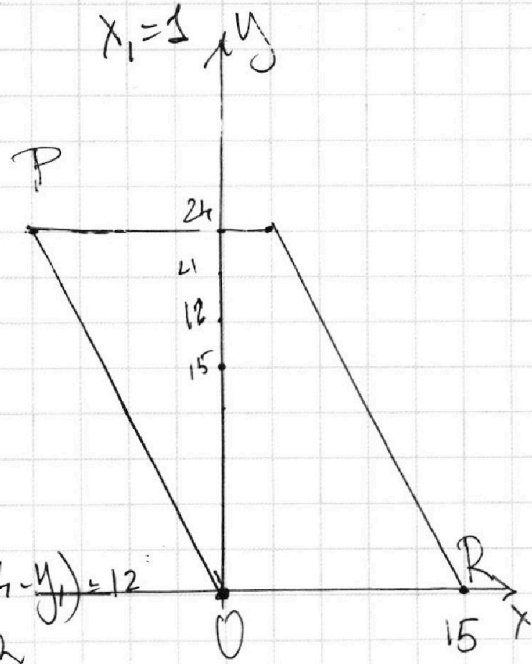
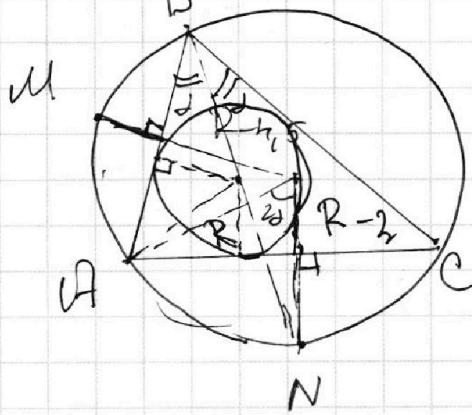
$$25 - 9x^2 - 2\sqrt{25 - 9x^2} + 1 + 16x^2 = 25$$

$$7x^2 - 2\sqrt{25 - 9x^2} + 1 = 0$$

$$7x^2 + 1 = 2\sqrt{25 - 9x^2}$$

$$\Rightarrow 49x^4 + 14x^2 + 1 = 100 - 36x^2$$

N2.  $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$   $\frac{a}{b}$  - корень, т.о.  $x_1 \cdot x_2 = -\frac{99}{49}$   
 ось абсцисс из  $a$  - простое число  $b$  - состоит из простых чисел  $x_1 = 1$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$(-15, 24), 2(-12 - x_1) + (24 - y_1) = 12$$

$$-2x_1 - y_1 = 12$$