МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right)\leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} ab \vdots 2^{14} 7^{10} \\ bc \vdots 2^{17} 7^{17} \\ ac \vdots 2^{20} 7^{37} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = x \cdot 2^{14} 7^{10} \\ bc = y \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac = z \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}, \ x, y, z \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (abc)^2 = xyz \cdot 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37} = xyz \cdot 2^{51} \cdot 7^{64} =$
$xyz \cdot 2 \cdot (2^{25} \cdot 7^{32})^2$, т.е $(abc)^2$ – полный квадрат, $(2^{25} \cdot 7^{32})^2$ – полный квадрат $\Rightarrow 2xyz$ – полн. кв, как частное полн. кв. Заметим, что величина abc минимальна, когда величина xyz минимальна, а минимальный полный квадрат вида $2xyz = 4$ (это не 1, т.к. есть множитель 2) при $x = y = 1$ и $z = 2$. Тогда $abc = \sqrt{2xyz \cdot (2^{25} 7^{32})^2} =$
$= 2 \cdot 2^{25} \cdot 7^{32} = 2^{26} \cdot 7^{32}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{32}$

$\begin{array}{r}30\\ -34\\ \hline 56\end{array}$

№2

Т.к. дробь $\frac{a}{b}$ – несократима, то НОД$(a;b)=1$.

Заметим, что $m=$ НОД$(a+b;\ a^2-6ab+b^2)$

$a^2-6ab+b^2=(a+b)^2-8ab$. Пусть у $a+b$ и $a^2-6ab+b^2$ есть общий делитель $d>1$. Тогда

$$\begin{cases} a+b \,\vdots\, d \\ (a+b)^2-8ab \,\vdots\, d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \,\vdots\, d \\ 8ab \,\vdots\, d \end{cases}$$

Т.к. НОД$(a;b)=1$ и $a+b \,\vdots\, d$, то $a \not\vdots\, d$ и $b \not\vdots\, d$

Иначе, например, если $a \,\vdots\, d$, то из $a+b \,\vdots\, d \Rightarrow b \,\vdots\, d$, т.е. НОД$(a;b)>1$.

Но из $8ab \,\vdots\, d \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8 \,\vdots\, d \\ a \,\vdots\, d \\ b \,\vdots\, d \end{array}\right.$, значит $8 \,\vdots\, d$,

значит максимальное $d=8$.

Докажем, что оно подходит и $m=8$:

Пусть $a=3$, $b=5$. Тогда $a+b=8$, $a^2-6ab+b^2=$
$=9-6\cdot3\cdot5+25=34-90=-56$. Тогда

НОД$(a+b;\ a^2-6ab+b^2)=$ НОД$(8;-56)=8$.

Ответ: $m=8$.

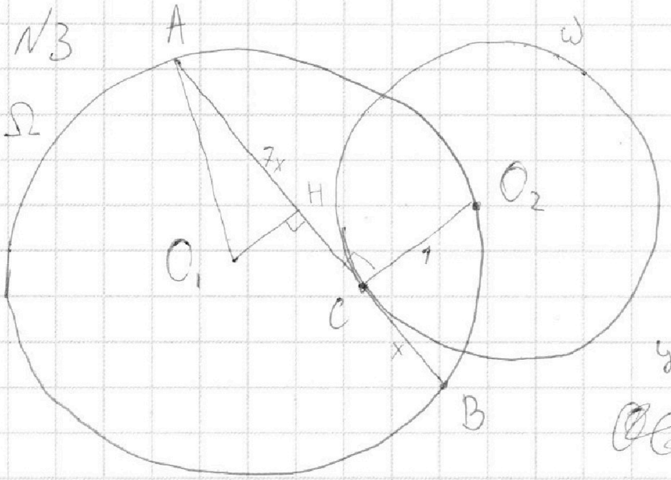
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N3



$R_\Omega = R = 5$

$R_\omega = r = 1$

1) Пусть $AC = 7x$, $BC = x$.

2) Пусть O_1, O_2 — центры Ω и ω. Тогда ~~OO_2~~ O_2C — радиус, провед. в точку кас. $\Rightarrow O_2C \perp AB$. По

2) По т. Пиф для $\triangle ACO_2$ и $\triangle BCO_2$: $AO_2^2 = 49x^2+1$, $BO_2^2 = x^2+1$. По т. кос для $\triangle AO_2B$:

$AB^2 = AO_2^2 + BO_2^2 - 2\cos\angle AO_2B \cdot AO_2 \cdot BO_2$ (Пусть $\angle AO_2B = \alpha$)

$64x^2 = 50x^2 + 2 - 2\cos\alpha \cdot \sqrt{x^2+1}\sqrt{49x^2+1}$

$2\cos\alpha\sqrt{x^2+1}\sqrt{49x^2+1} = 2 - 14x^2$;

$\cos\alpha = \dfrac{1 - 7x^2}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{49x^2+1}}$

3) $\overset{\frown}{AO_2B} = 360° - \overset{\frown}{AB} = 360° - 2\alpha \Rightarrow \angle AO_1B = \overset{\frown}{AO_2B} = 360° - 2\alpha$

Опустим высоту O_1H на AB. $\triangle AO_1B$ — р/б, т.к. $AO_1 = O_1B = R \Rightarrow AH = \frac{1}{2}AB = 4x$. Также O_1H — б-са $\angle AO_1B \Rightarrow \angle AO_1H = \dfrac{\angle AO_1B}{2} = 180° - \alpha \Rightarrow \cos\angle AO_1H =$
$= \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \dfrac{7x^2 - 1}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{49x^2+1}} \Rightarrow$

$O_1H = 5 \cdot \dfrac{7x^2 - 1}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{49x^2+1}}$ $(= AO_1 \cdot -\cos(\alpha))$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Запишем т. Пиф. для $\triangle AOM$:

$$25 = 16x^2 + 25\frac{(7x^2-1)^2}{(x^2+1)(49x^2+1)} \Big| \cdot (x^2+1)(49x^2+1)$$

$$25(x^2+1)(49x^2+1) = 16x^2(x^2+1)(49x^2+1) + 25(7x^2-1)^2;$$

$$25(49x^4+50x^2+1) = 16x^2(49x^4+50x^2+1) + 25(49x^4-14x^2+1)$$

$$\underline{25\cdot 49x^4} + 25\cdot 50x^2 + \underline{25} = 16\cdot 49x^6 + 16\cdot 50x^4 + 16x^2 +$$

$$+ \underline{25\cdot 49x^4} - 25\cdot 14x^2 + \underline{25};$$

$$25\cdot 50x^2 = 16\cdot 49x^6 + 16\cdot 50x^4 + 16x^2 - 25\cdot 14x^2$$

$$16\cdot 49x^6 + 16\cdot 50x^4 + 16x^2 - 25\cdot 64x^2 \Big| 16x^2$$

$$49x^4 + 50x^2 + 1 - 25\cdot 4 = 0;$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 1; \quad x = 1, \text{ т.к. } x > 0 \text{ в силу усл. задачи} \\ x^2 = -\frac{99}{49} \text{ — нет реш} \end{array}\right.$$

$x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8.$

Ответ: 8.

№4

25 90 225

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \quad \Big|\ ^2$$

$$2x^2-5x+3+2x^2+2x+1-2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}=$$

$$=49x^2-28x+4;$$

$$2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}=-45x^2+25x \quad \Big|\ ^2$$

$$\begin{cases} 4(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)=(5x(-9x+5))^2 \\ 5x(5-9x)\geq 0; \quad (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2+6x+3)= \\ \quad =25x^2(9x-5)^2 \end{cases}$$

$$4(4x^4-6x^3-2x^2+x+3)=25x^2(81x^2-90x+25)$$

$$16x^4-24x^3-8x^2+4x+12=2025x^4-2250x^3+625x^2;$$

Заметим, что $2x^2-5x+3-2x^2-2x-1=2-7x \Rightarrow$

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2x^2-5x+3-(2x^2+2x+1);$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=\left(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right);$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \\ \sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{2x^2+2x+1} \end{array}\right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+2x+1} = 1-\sqrt{2x^2-5x+3} \quad \Big| \; V^2 \\ \begin{cases} 2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 \\ 2x^2+2x+1>0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r|l} 244 & 2 \\ 122 & 2 \\ 61 & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x=2 \\ 2x^2+2x+1 = 1-2\sqrt{2x^2-5x+3}+2x^2-5x+3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -7x+3 = 2\sqrt{2x^2-5x+3} \quad \Big| \; V^2 \\ x=\frac{2}{7} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -7x+3\geq 0 \\ 49x^2-42x+9 = 4(2x^2-5x+3) \end{cases} \\ x=\frac{2}{7} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 41x^2-22x-3=0 \\ x\leq\frac{3}{7} \end{cases} \\ x=2/7 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{22+2\sqrt{61}}{41} \\ x=\frac{22-2\sqrt{61}}{41} \end{array}\right. \\ x\leq 3/7 \end{cases} \\ x=2/7 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2/7 \\ x=\frac{22-2\sqrt{61}}{41} \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{2}{7}$; $\frac{22-2\sqrt{61}}{41}$

$D/4 = 121+3\cdot 41 = 121+123 =$
$= 244 = 4\cdot 61$

$\frac{22-2\sqrt{61}}{41} \overset{<}{\vee} \frac{3}{7}$

$154-14\sqrt{61} \vee 123$

$31 \vee 14\sqrt{61}$

$\frac{31}{14} \vee \sqrt{61}$

$\frac{31}{14} < 7 < \sqrt{61}$

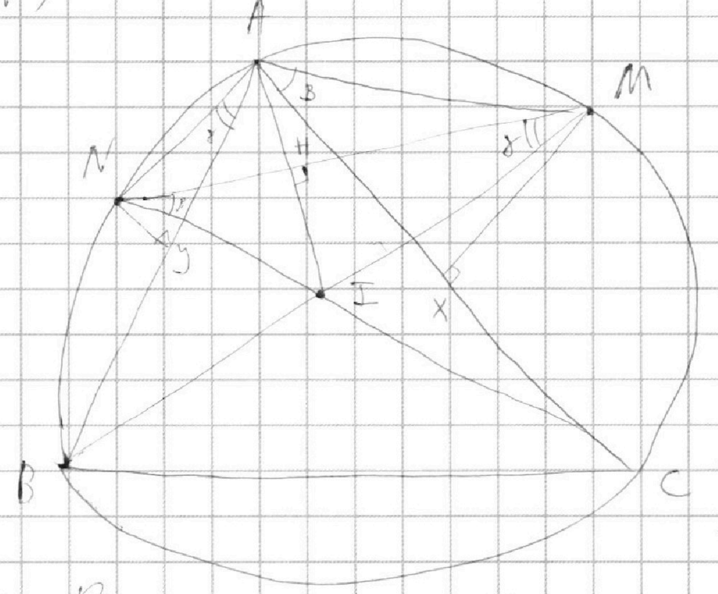
$14\sqrt{61} \underset{>}{\vee} 123-154$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 [x]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



X, Y - основание перпен.

Пусть $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$.

1) Тогда $\angle MNC = \angle MAC = \frac{2\beta}{2} = \beta$ (т.к. M - сер. дуги)

Аналогично $\angle NMB = \angle NAB = \gamma$.

2) По лемме о трезубце $AM = MI$ и $AN = NI \Rightarrow$ $AMIN$ - дельтоид и $AI \perp MN$ и $HI = \frac{AI}{2}$.

3) $AM \cdot \sin\beta = \frac{MX}{AM}$; $AM \sin\beta = \frac{9}{2}$. Аналогично $AN \sin\gamma = 2$. $HI = \sin\gamma \cdot MI$, но $MI = AM \Rightarrow$ $HI = \sin\gamma \cdot AM$. Аналогично $HI = \sin\beta \cdot AN \Rightarrow$ $HI^2 = \sin\gamma \cdot AM \cdot \sin\beta \cdot AN = \sin\beta \cdot AM \cdot \sin\gamma \cdot AN = \frac{9}{2} \cdot 2 = 9 \Rightarrow HI = 3 \Rightarrow AI = 6$

Ответ: 6

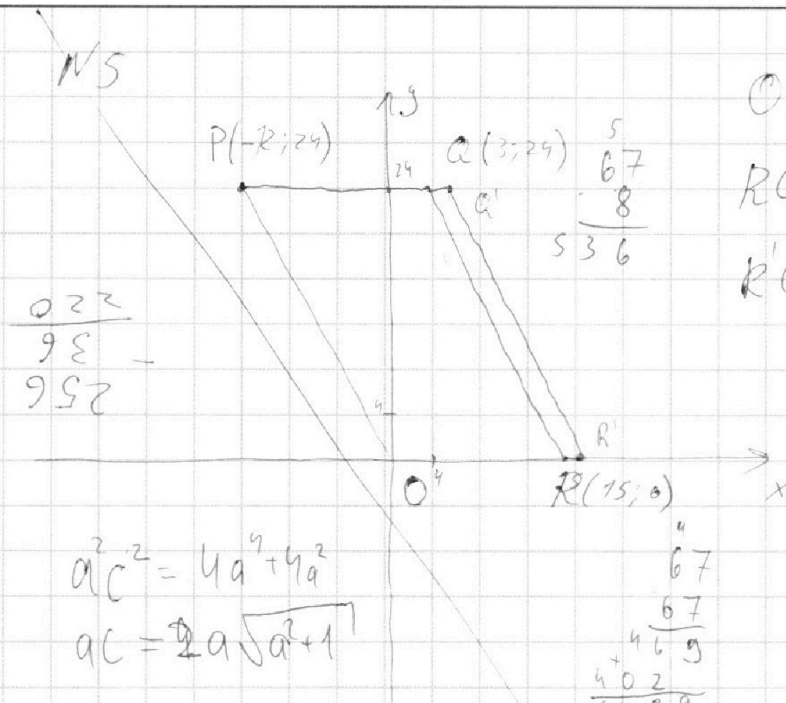
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
				×		

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

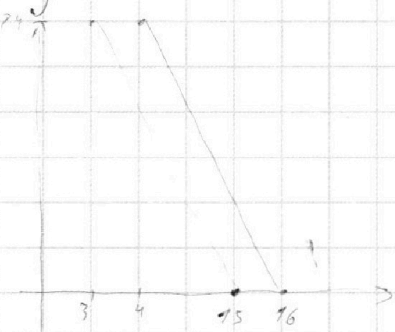
N5



$OP: y = -2x$

$RQ: y = -2(x-15) = -2x+30$

$R'Q': y = -2(x-16) = -2x+32$



$67 \cdot 8 = 536$

$256 - 36 = 220$

$67 \cdot 67 = 4489$

$a^2c^2 = 4a^4 + 4a^2$

$ac = 2a\sqrt{a^2+1}$

~~Запишем условие $\forall A(x;y)$: $A \in PQRO$~~

~~1) $y \in [0;24]$~~; Пусть $R'(16;0)$ и $Q'(4;24)$.

2) ~~Заметим~~ Посчитаем, сколько таких цел. точек в $OPQ'R'$ и вычтем кол-во точек между прямыми RQ и $R'Q'$.

1) Посчитаем кол-во между RQ и $R'Q'$.
Пусть точка $F(x_0;y_0) \in$ этому мн-ву. Тогда

$$\begin{cases} y_0 + 2x_0 - 30 > 0 \\ y_0 + 2x_0 - 32 \le 0 \\ y_0 \in [0;24] \\ x_0 \in [3;16] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y_0 + 2x_0 = 31 \\ y_0 + 2x_0 = 32 \end{array}\right. \\ y_0 \in [0;24] \\ x_0 \in [3;16] \end{cases}$$

Для $\forall y_0$ $\exists x_0$: одно из ~~уравнений~~ равенств выполнено $\Rightarrow$

~~в этом мн-ве 24 целые точки~~

в этом мн-ве 24 целые точки

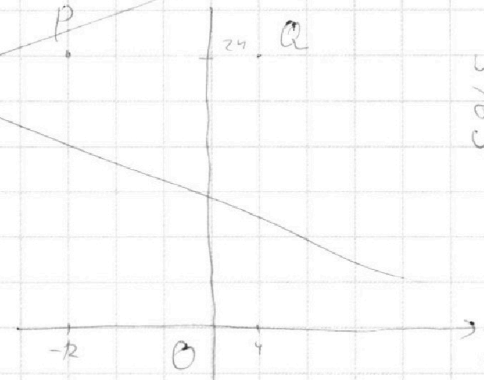
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~2) Осталось посчитать, сколько целых точек в $OPQ'R'$~~



$x^2+y^2=4$

$y=ax+b$

$x^2+(ax+b)^2$

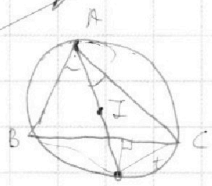
$\frac{-x_0-8}{-x_0}=2$, x_0

65536

Посмотрим, сколько точек соответствует усл.

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$

1сл.) $y_0+2x_0=31;32 \Rightarrow \begin{cases} y_1+2x_1=31;32 \\ y_2+2x_2=31;32 \end{cases}$



~~Очевидно, что $y_2+2x_2-y_1-2x_1=0;1\neq12\Rightarrow$ в этом мн-ве таких точек нет $\Rightarrow$~~

~~можно проверить для $OPQ'R'$~~

$x\cdot a=t(b+c)$

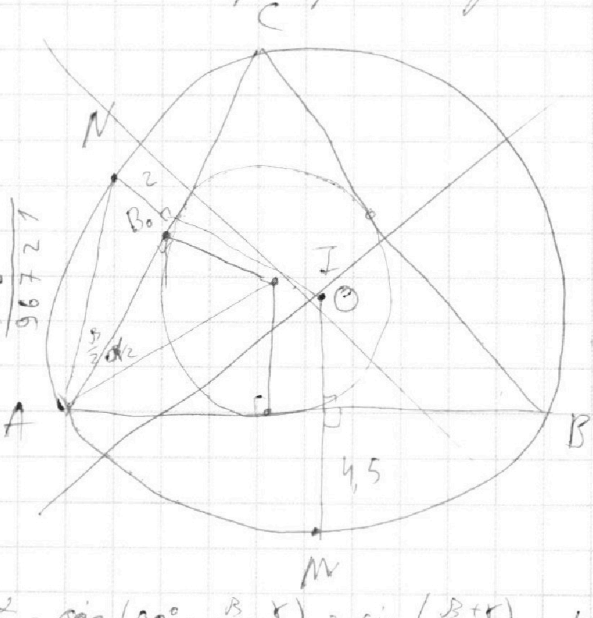
$AI=x-t=\frac{t(b+c)}{a}-t=$

$=t\left(\frac{b+c-a}{a}\right)$

$NB_0=ON-OB_0=$

$=R-R\cdot\cos(90°-\beta)=$

$=R(1-\sin\beta)$



$\frac{AI}{2}$ AM

$\boxed{\begin{matrix} AM\cdot\sin\beta=\frac{9}{2} \\ AN\cdot\sin\gamma=2 \end{matrix}}$

$=\frac{AI}{2}=MI\cdot\sin\gamma=AM\cdot\sin$

$\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\left(90°-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}=$

4489 − 1024 = 3465

−536 ... 134 ... 402

96721 − 31185 = 65536

3465 · 9 = 31185

311 · 311 = 96721

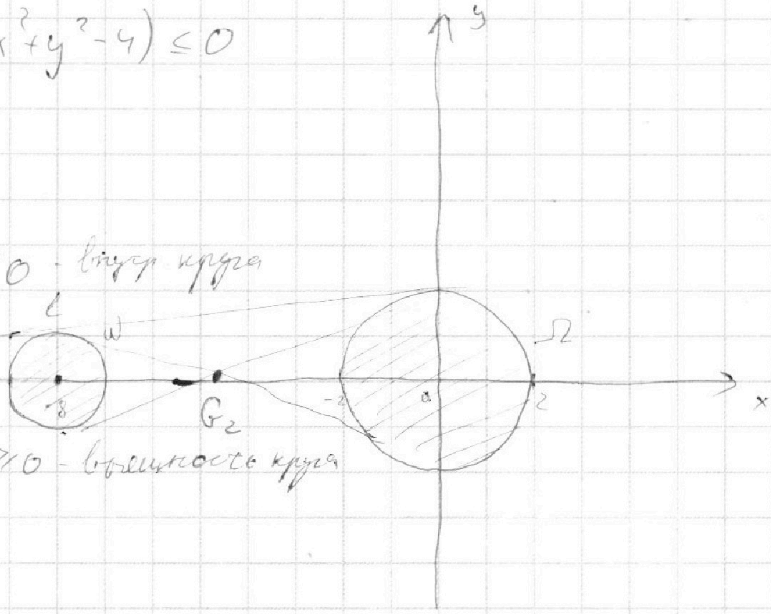
1024 ... 462 ... 562

89 ... 24 ... 52

№6

$$\begin{cases} ax+y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=ax+10b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1\le 0 \text{ - внутр круга} \\ x^2+y^2-4\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1\ge 0 \text{ - внешность круга} \\ x^2+y^2-4\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$



Заметим, что любая прямая l, которая пересекает ω или Ω имеет на себе бесконечно много решений. Если прямая не пересекает ω и Ω или касается одной из них, то система имеет 0 или 1 решение. И только если l касается обеих окружностей, то у системы будет два решения.
Из условия задачи понимаем, что $y=ax+10b$ произвольная прямая, задаваемая параметрами a.
Пусть $10b=c$. Тогда справедлива система

$y=ax+$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [x] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax+y+c = x^2+y^2=4 \\ ax-y+c = \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+(ax+c)^2=4 \\ (x+8)^2+(ax+c)^2=1 \end{cases}$$, где оба уравнения имеют одно реш.

$$\begin{cases} (a^2+1)x^2+2ac\cdot x+c^2-4=0 \\ (a^2+1)x^2+(2ac+16)x+c^2+63=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{1/4}=a^2c^2-(a^2+1)(c^2-4)=0 \\ D_{2/4}=(ac+8)^2-(a^2+1)(c^2+63)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2c^2-(a^2c^2-4a^2+c^2-4)=0 \\ a^2c^2+16ac+64-(a^2c^2+63a^2+c^2+63)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2-c^2+4=0 \quad (1) \\ -63a^2-c^2+16ac+1=0 \quad (2) \end{cases} \quad \begin{cases} c^2=4a^2+4 \\ c^2=-63a^2+16ac+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2+4=-63a^2+16ac+1; \\ 4a^2-c^2+4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 67a^2-16ac+3=0; \\ 4a^2-c^2+4=0; \end{cases}$$

~~Из исходной системы можем получить следствие:~~

$8(2x+8)=-3;\ 16x=-67;\ x=-\frac{67}{16}$

Из 1: $a^2c^2=4a^4+4a^2$ и $c^2=4a^2+4$

Из 2: $16ac=63a^2+c^2-1$;

$$256a^2c^2=(63a^2+c^2)^2-2(63a^2+c^2)+1$$

Подставим из 1, получим: $4\cdot256(a^4+a^2)=(67a^2+4)^2-$
$-2(67a^2+4)+1$.

№6 (продолжение) Пусть $16b = c$

$1024a^4 + 1024a^2 = 4489a^4 + 536a^2 + 16 - 134a^2 - 8 \cdot 1$

$3465a^4 - 622a^2 + 9 = 0$,

У окружностей ω и Ω есть два центра гомотетии (внеш. и внутр.) Очевидно из сим-ии, что эти центры лежат на Ox. Пусть $G_1(x_1; 0)$ и $G_2(x_2; 0)$. Т.к. отношение рад. окружности равно 2, то центр ω – сер. отрезка G_1O. Тогда $x_1 = -16$ и мы ищем касательные из G_1 к Ω $y = ax + c$ проходит через $(-16; 0)$ $\Rightarrow$ $-16a + c = 0$; $16a = c$

и ур-ие $x^2 + (ax + c)^2 = 4$ имеет один корень $\Rightarrow$

$(a^2+1)x^2 + 2ac\,x + c^2 - 4 = 0$; $D/4 = a^2c^2 - (a^2+1)(c^2-4) = 0$;

$4a^2 - c^2 + 4 = 0 \Rightarrow 4a^2 - 256a^2 + 4 = 0$, $-252a^2 + 4 = 0$;

$a^2 = \frac{4}{252} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{1}{63}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}}$

Если G_2 – центр внутр. гомотетии, то G_2 делит отрезок (O; центр ω) в отношении $2:1$, считая от O.

$\Rightarrow x_2 = -8 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{16}{3}$

№6 (продолжение)

Мы ищем касательные из B_2 к Ω

$y=ax+c$ проходит через $\left(-\frac{16}{3}, 0\right)$

$0=-\frac{16}{3}a+c$; $16a=3c$. и

$x^2+(ax^2+c)^2=4$ имеет один корень, т.е.

$4a^2-c^2+4=0; \,|\cdot 9 \quad 36a^2-(16a)^2+36=0$,

$36=220a^2$; $a^2=\frac{36}{220}=\frac{9}{55}$; $a=\pm\frac{3}{\sqrt{55}}$

При $a=\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}}$ $\quad 16a=\pm\frac{16}{3}\sqrt{\frac{1}{7}}=10b$, т.е

$b=\pm\frac{8}{15}\sqrt{\frac{1}{7}}$

При $a=\pm\frac{3}{\sqrt{55}}$ $\quad 16a=\pm\frac{16\cdot 3}{\sqrt{55}}=30b$; т.е

$b=\pm\frac{8}{5\sqrt{55}}$

Ответ: $\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}}$, $\pm\frac{3}{\sqrt{55}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!