



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x.$$

Handwritten solution for problem 3:

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x \\ & \sqrt{3x^2-5x+6} = \sqrt{3x^2+x+1} + 5-6x \\ & \text{Square both sides: } 3x^2-5x+6 = 3x^2+x+1 + 2\sqrt{3x^2+x+1}(5-6x) + (5-6x)^2 \\ & -5x+5 = 2\sqrt{3x^2+x+1}(5-6x) + 25-60x+36x^2 \\ & -5x+5 = 2\sqrt{3x^2+x+1}(5-6x) + 25-60x+36x^2 \end{aligned}$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Handwritten solution for problem 5:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{10}{z} \pm 6$$

$$\frac{25}{12} - \frac{2}{6} = \frac{136}{6} \dots$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a \cdot b &: 3^{14} \cdot 7^{13} \\ b \cdot c &: 3^{19} \cdot 7^{17} \\ a \cdot c &: 3^{23} \cdot 7^{42} \end{aligned} \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 &: 3^{14+19+23} \cdot 7^{13+17+42} \\ a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 &: 3^{56} \cdot 7^{72} \\ \Rightarrow abc &: 3^{28} \cdot 7^{36} \end{aligned}$$

$$abc = k \cdot 3^{28} \cdot 7^{36}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 3^{28} \cdot 7^{36}$$

(при $k=1$)

$$\text{Ответ: } \min(a \cdot b \cdot c) = 3^{28} \cdot 7^{36}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b \in \mathbb{N}$
 $\boxed{\sqrt{2}}$ $\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow a$ и b не имеют общ. делителей

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab}$$

Если $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь, то $\frac{b}{a}$ - несократимая дробь, при условии если $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь
 a

~~$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab}$~~

$$\frac{a+b}{a+b} = \frac{11ab}{a+b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 $\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$

Замена: $\sqrt{3x^2-5x+6} = a, a \geq 0$
 $\sqrt{3x^2+x+1} = b, b \geq 0$, тогда $5-6x = a^2 - b^2$

$\Rightarrow \begin{cases} a-b = a^2-b^2 \\ a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a+b) - (a-b) = 0 \\ a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a+b-1) = 0 \\ a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

T.O. $\begin{cases} \sqrt{3x^2-5x+6} = \sqrt{3x^2+x+1} & (1) \\ \sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1 & (2) \end{cases}$

(1) $\sqrt{3x^2-5x+6} = \sqrt{3x^2+x+1} \Leftrightarrow 3x^2-5x+6 = 3x^2+x+1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$

(2) $\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1$
 ~~$\sqrt{3x^2-5x+6} \geq 0$
 $\sqrt{3x^2+x+1} \geq 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} 3x^2-5x+6 \leq 1 \\ 3x^2+x+1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-5x+5 \leq 0 \\ 3x^2+x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{3}, 0]$~~

$\sqrt{3(x-\frac{5}{6})^2 + \frac{47}{12}} + \sqrt{3(x+\frac{1}{6})^2 + \frac{11}{12}} = 1$

$\Rightarrow \min \left(\sqrt{3(x-\frac{5}{6})^2 + \frac{47}{12}} \right) = \sqrt{\frac{47}{12}}$

$\alpha \min \left(\sqrt{3(x+\frac{1}{6})^2 + \frac{11}{12}} \right) = \sqrt{\frac{11}{12}}$

очень
значимые
выражения

$\frac{\sqrt{47} + \sqrt{11}}{\sqrt{12}}$

$6 < \sqrt{47} < 7$
 $3 < \sqrt{11} < 4$
 $3 < \sqrt{12} < 4$

$\Rightarrow 3 < \frac{\sqrt{47} + \sqrt{11}}{\sqrt{12}} < 3\frac{3}{4}$

Ответ: $x = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow \sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1$ (не имеет решений)

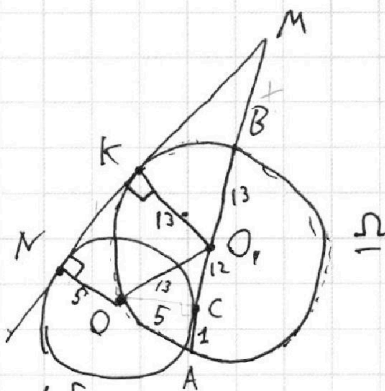
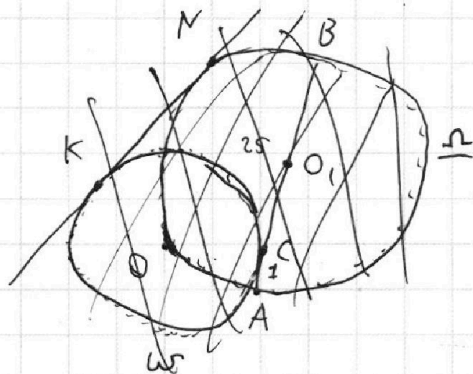
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$BC=25$
 $AC=1$
 $(-) O \in \omega$
 $AB \cap \omega = C$

 $MK=?$

1). $AB = AC + BC = 26 \approx 13$
 $BO_1 = O_1A = \frac{1}{2} AB$ (как радиусы)

$\Rightarrow O_1C = O_1A - AC = 12$

2). Проведём $O_1K \perp MN$ (так как радиус проведённый в точку кас. \perp касательной)

3). Проведём $OC \perp MA$ (как радиус проведённый в точку кас.)

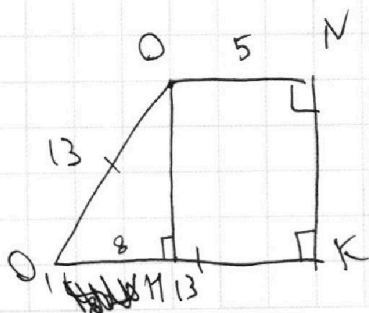
$\triangle OCO_1$: - прямоугольный ($OC \perp MA$)
 $OO_1 = 13$ (как радиус ω)

$O_1C = 12$
 $\Rightarrow OC = \sqrt{169 - 144} = 5$

4). $ON \perp MN$ (радиус, проведённый в точку кас.)
 $O_1K \perp MN$ ($\Rightarrow \sphericalangle 2$)

$\Rightarrow ON \parallel O_1K$ (две прямые, перпендик. к третьей \parallel)

\Rightarrow Четыр. $OMKO_1$ - трапеция.



Проведём $OH = NK$
 $O_1H = O_1K - O_1N = 8$

\Rightarrow По т. Пифагора:

$OH = NK = \sqrt{O_1O^2 - O_1H^2} = \sqrt{105}$
 Ответ: $NK = \sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

$$\begin{cases} 5x - y = 3z & (1) \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} & (2) \end{cases} \quad x, y, z \neq 0$$

$$\min \left(\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} \right) \quad (3)$$

Умножим (1) на (2):

$$40 + \frac{5x}{y} - \frac{8y}{x} - 1 = 45$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \frac{x}{y} - 8 \cdot \frac{y}{x} = 6 \quad \text{Замена: } t = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow 5t - \frac{8}{t} = 6$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 6t - 8 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{3 \pm 7}{5} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Подставим в (1):

$$\begin{cases} z = 3y \\ z = -\frac{5y}{3} \end{cases}$$

т.о., $\begin{cases} x = 2y \\ x = -\frac{4y}{5} \end{cases}$

$$\begin{cases} z = 3y \\ x = 2y \end{cases} \quad \text{Подставим в (3):} \\ \begin{cases} z = -\frac{5}{3}y \\ x = -\frac{4}{5}y \end{cases} \quad \text{(2) случаи}$$

(1) случаи $\begin{cases} x = 2y \\ z = 3y \end{cases}$

(2) случаи $\begin{cases} x = -\frac{4y}{5} \\ z = -\frac{5y}{3} \end{cases}$

$$\frac{25 \cdot 4y^2 - y^2 - 9y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} = \frac{100y^2 - y^2 - 9y^2}{28y^2} = \frac{90y^2}{28y^2} = \frac{45}{14}$$

$$\frac{25 - \left(-\frac{4y}{5}\right)^2 - y^2 - \left(-\frac{5y}{3}\right)^2}{y^2 + 3 \cdot \left(-\frac{5y}{3}\right)^2} = \frac{25 - \frac{16y^2}{25} - y^2 - \frac{25y^2}{9}}{y^2 + 25y^2} = \frac{16y^2 - y^2 - \frac{25y^2}{9}}{y^2 + \frac{25y^2}{3}} = \frac{(16 \cdot 9 - 9 - 25)}{9} = \frac{28}{3}$$

Ответ: $\min \left(\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} \right) = \frac{55}{42} = \frac{13}{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$5x - y = 3z \quad (1)$
 $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad (2)$

$\Rightarrow 5x - y = \frac{45xy}{8y + x} \Rightarrow \frac{45xy}{x + 8y} - \frac{5x - y}{1} = 0$

$\Rightarrow \frac{45xy - 5x^2 - 40xy + xy + 8y^2}{x + 8y} = 0$

$\Rightarrow 8y^2 - 5x^2 + 6xy = 0$
 $(3x + y)^2 - 14x^2 + 7y^2 = 0$

$(-11x + y)(17x + y)$
 $(3x + y - \sqrt{14}x)(3x + y + \sqrt{14}x) = -7y^2$
 $(x(3 - \sqrt{14}) + y)(x(3 + \sqrt{14}) + y) = -7y^2$

$-7y^2 \leq 0$ всегда
 $\Rightarrow \begin{cases} x(3 - \sqrt{14}) + y < 0 \\ x(3 + \sqrt{14}) + y > 0 \\ x(3 - \sqrt{14}) + y > 0 \\ x(3 + \sqrt{14}) + y < 0 \end{cases}$

$\min \left(\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} \right) - 1$
 $25x^2 + y^2 - z^2$

$5x = 3z + y \Rightarrow 25x^2 = (3z + y)^2$
 $\frac{(3z + y)^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} \quad (3)$

x выражаем из (1) и подставляем в (2):
 $\frac{40}{3z + y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow \frac{41y + 3z}{(3z + y)y} = \frac{15}{z} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{41yz + 3z^2 - 15zy - 15y^2}{(3z + y)zy} = 0$
 $3z^2 - 4zy - 15y^2 = 0 \Rightarrow \frac{3z^2 + y^2}{(3z + y)(-zy)} - \frac{16y^2 + 4zy}{(3z + y)(-zy)} = 0$
 $\Rightarrow \frac{8z^2 + 6zy}{16y^2 + 4zy} = \frac{4z^2 + 3zy}{8y^2 + 2zy}$

сложим (1) + (2): $5x + \frac{8}{x} - y + \frac{1}{y} = 3z + \frac{15}{z}$
 $5x - y -$

умножим (1) на (2): $40 + \frac{5x}{y} - \frac{8y}{x} - 1 = 45 \Rightarrow \frac{5x}{y} - \frac{8y}{x} = 6$
 $\Rightarrow \frac{x}{y} = z, \frac{y}{x} = -\frac{4}{5}$

подстав-
 лем в
 (3)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

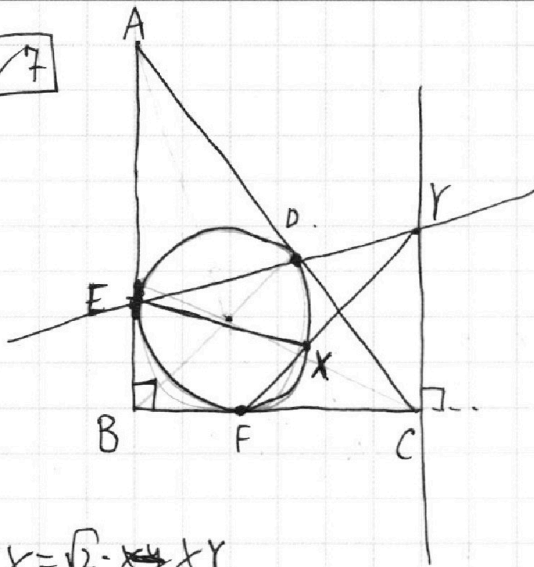
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7



$$EX = \sqrt{2} \cdot XY$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

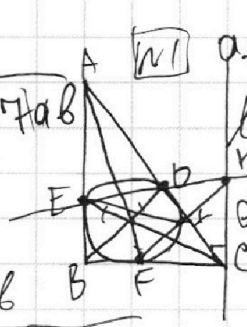
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(a-b)^2 + 7ab$
 $(a-b)^2 - 7ab$



$ab: 3^{14} \cdot 7^{13}$
 $bc: 3^{13} \cdot 7^{11}$
 $ac: 3^{23} \cdot 7^{11}$

$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2: 3^{56} \cdot 7^{72}$
 $5t - \frac{8}{t} = 6$
 $t^2 - 6t - 8 = 0$
 $t = 8$

$(a-b)^2 - 7ab$
 $3ab$

$MK^2 = MB \cdot AB$

$MK + MK = MB + AB$

$\sqrt{3(x^2 - 5x + 6) + 1} + \sqrt{3(x^2 + x + 1)}$
 $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 < 1 \\ 3x^2 + x + 1 < 1 \end{cases}$
 $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 5 < 0 \\ 3x^2 + x < 0 \end{cases}$

$a - b = a^2 \cdot b^2$

$(a-b)(a+b) - (a-b) = 0$
 $(a-b)(a+b-1) = 0$
 $x - \frac{5}{6} + x + \frac{1}{6} = 0$
 $2x - \frac{4}{6} = 0$
 $x = \frac{2}{3}$

$\sqrt{3(x - \frac{5}{6})^2 - \frac{25}{12} + 6}$
 $\sqrt{3(x + \frac{1}{6})^2 - \frac{1}{12} + 1}$
 $3(x - \frac{5}{6})^2 - \frac{25}{12} + 6 = 5 - 6x$
 $3(x - \frac{5}{6})^2 - \frac{25}{12} = 5 - 6x$
 $3(x - \frac{5}{6})^2 = 5 - 6x + \frac{25}{12}$
 $3(x - \frac{5}{6})^2 = \frac{60x - 60x + 25 + 30}{12}$
 $3(x - \frac{5}{6})^2 = \frac{25 - 30}{12}$
 $3(x - \frac{5}{6})^2 = -\frac{5}{4}$

$a + b + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$
 $a + b = a^2 + b^2$
 $\sqrt{a-b} = a-b$
 $\sqrt{a+b} = a+b$
 $a+b = a^2 + b^2$

$6(\frac{5}{6} - x)$

$3(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{47}{12}$

$x \in [-\frac{1}{3}, 0]$

$4 = 5 - 6(t + \frac{1}{2})$

$\sqrt{3(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{12}}$

$x = \frac{324}{5}$

$\sqrt{3(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{47}{12}} - \sqrt{3(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{12}} = 3 - 6t$

$x = \frac{1547}{849}$

$3(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{47}{12} + 3(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{12} = (3 - 6t)^2$

$-2\sqrt{(3(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{47}{12})(3(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{12})} =$

$6t^2 + \frac{3}{2} + \frac{58}{12} - 2\sqrt{9(t - \frac{1}{2})(t + \frac{1}{2})} = 3 - 6t$

$5x + y = 3z$

$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$

$8zy + xz - 15xy = 0$

$8zy + xz - 15xy = 0$

$5x = y + 3z$

$25x^2 + 6y^2 = 9z^2$

$25x^2 - (2y^2 + 3z^2)$

$8z^2 + 30xz$

$\sqrt{a \cdot b}$

$\sqrt{a \cdot b}$

$\sqrt{a \cdot b}$

$\sqrt{a \cdot b}$

$\sqrt{a \cdot b}$

$27x^2 - 27xz + 30xz + 9z^2 - z^2$

$6t^2 + \frac{3}{2} + \frac{58}{12} - 2\sqrt{9(t - \frac{1}{2})(t + \frac{1}{2})} = 3 - 6t$

$5 \cdot 15$

$\frac{1440}{119}$

$a^2 - a + b - b^2 + 2ab = 0$

$(a-b)(a+b) - (a-b) + 2ab = 0$

$(\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b})(a+b) - (\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}) + 2\sqrt{a \cdot b} = 0$