МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\begin{cases} ab \vdots 2^{14} \\ bc \vdots 2^{17} \\ ac \vdots 2^{20} \end{cases} \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac \vdots 2^{14+17+20} \Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{51} \Rightarrow abc \vdots 2^{26}$

$ac \vdots 7^{37} \Rightarrow abc \vdots 7^{37}$

Значит abc не меньше $2^{26} \cdot 7^{37}$. $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ к примеру если $b = 2^6 = 64$, $a = 2^9 \cdot 7^{10}$, $c = 2^{11} \cdot 7^{27}$. Нетрудно заметить, что в этом случае все условия по делимости выполняются.

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ m должно являться делителем $a+b$

~~$\frac{a}{b}$ несократима => a и b взаимно простые~~

Докажем, что $m\leq 8$. Пойдем от противного. Пусть $m>8$.

$(a+b)\vdots m \Rightarrow (a+b)^2 \vdots m \Rightarrow 8ab \vdots m$ (т.к. $((a+b)^2-8ab)\vdots m$).

Значит m ~~[illegible]~~ не взаимно просто с a или b. Без ограничения общности скажем, что m не взаимнопросто с a. Обозначим их НОД за x ($x>1$).

$$\left.\begin{matrix} a+b \vdots x \text{ (т.к. } a+b \vdots m) \\ a \vdots x \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \vdots x.$$

Но тогда a и b имеют общий делитель больше 1 и $\frac{a}{b}$ не может быть несократимой дробью. Противоречие. Значит $m\leq 8$.

$m=8$ при $a=3$, $b=5$. Действительно, $\frac{a}{b}$ несократима и:

$$\frac{3+5}{3^2-6\cdot3\cdot5+5^2}=\frac{8}{9-90+25}=-\frac{8}{56}=-\frac{1\cdot8}{7\cdot8}=-\frac{1}{7}.$$

Ответ: $m=8$.

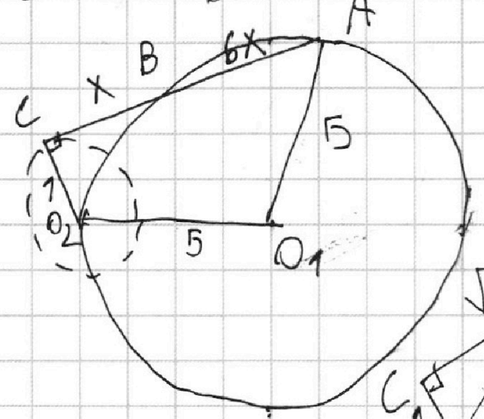
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

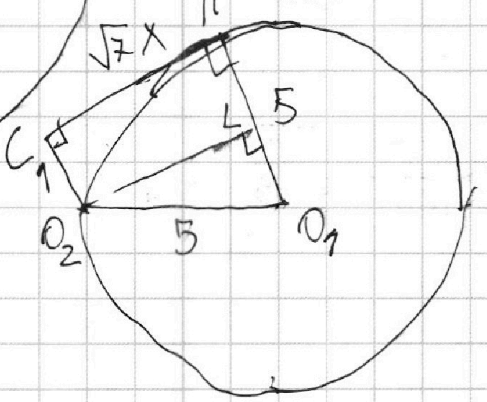
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{AC}{BC}=7 \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AC-BC}{BC}=\frac{AC}{BC}-1=6$$



Опустим из точки C касательную. Она будет равна $\sqrt{(6+1)x\cdot x}=\sqrt{7}x$.



$O_2L \perp$ к MO_1

1) $ML = CO_2 = 1$ (т.к. $CMLO_2$ - прямоуг.)

2) $LO_1 = MO_1 - ML = 4$

3) $O_2L = \sqrt{O_1O_2^2 - LO_1^2} = 3$

4) $C_1M = O_2L = 3 = \sqrt{7}x \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

5) $AB = 6x = \frac{6\cdot 3\sqrt{7}}{7} = \frac{18\sqrt{7}}{7}$.

Ответ: $AB = \frac{18\sqrt{7}}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \quad \Big| \cdot \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$2x^2-5x+3-(2x^2+2x+1)=(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$$

$$2-7x=(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$$

$$(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}-1\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2-7x=0 \\ \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \end{array}\right.$$

ОДЗ:

$\cancel{\sqrt{2x^2-5x+3}\geq 0}$

$$\begin{cases} 2x^2+2x+1\geq 0 \\ 2x^2-5x+3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\in R \\ \left[\begin{array}{l} x\leq 1 \\ x\geq 1{,}5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 1 \\ x\geq 1{,}5 \end{array}\right.$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \quad \Big| \,{}^{\wedge}2$$

$$4x^2-3x+4+2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}=1$$

$$(4x^2-3x+3)+\left(2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)}\right)=0$$

Заметим, что первая скобка строго положительна ($a>0$, $D<0$); вторая неотрицательна (квадратный корень) и в сумме давать ноль они не могут (их сумма положительна).

$2-7x=0$

$x=\frac{2}{7}$ Корень удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $x=\frac{2}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$$

$y=ax+10b$

$((x+8)^2+(ax+10b)^2-1)(x^2+(ax+10b)^2-4)\le 0$

$(x^2+16x+64+a^2x^2+20axb+100b^2-1)(x^2+20axb+a^2x^2+100b^2-4)\le 0$

$((a^2+1)x^2+(20ab+16)x+(100b^2+63))((a^2+1)x^2+20abx+(100b^2-4))\le 0$

При заданных a и b каждому значению x соответствует ровно одно значение y. => нам необходимо, чтобы неравенство выше имело ровно 2 решения. Это возможно в 2 случаях:

1) корни обоих многочленов в скобках равны. Но это невозможно т.к. по т. Виета произведения их корней разные.

2) Дискриминанты обоих ~~мно~~ трёхчленов равны нулю и их корни не равны (последнее верно в силу т. Виета)

$D_1=100a^2b^2+160ab+64-100a^2b^2-63a^2-100b^2-63=160ab-63a^2-100b^2+1$

$D_1=100a^2b^2-100a^2b^2+4a^2-100b^2+4=4a^2-100b^2+4$

$$\begin{cases} 160ab-63a^2-100b^2+1=0 \\ 4a^2-100b^2+4=0 \end{cases}$$

$640ab-252a^2-400b^2+4=0$

$640ab-256a^2-300b^2=0$

$64a^2-160ab+75b^2=0 \quad |:b^2$

$64\left(\frac{a}{b}\right)^2-160\frac{a}{b}+75=0$

$D_1=6400-75\cdot 64=25\cdot 64$

$\frac{a}{b}=\frac{80\pm\sqrt{25\cdot 64}}{64} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 64a=120b \\ 64a=40b \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 8a=15b \\ 8a=5b \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 64a^2=225b^2 \\ 64a^2=25b^2 \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a^2 - 25b^2 + 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} a^2 - 64a^2 + 1 = 0 \\ 9a^2 - 64a^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = \frac{1}{63} \\ a^2 = \frac{1}{55} \end{array}\right. \Rightarrow$$

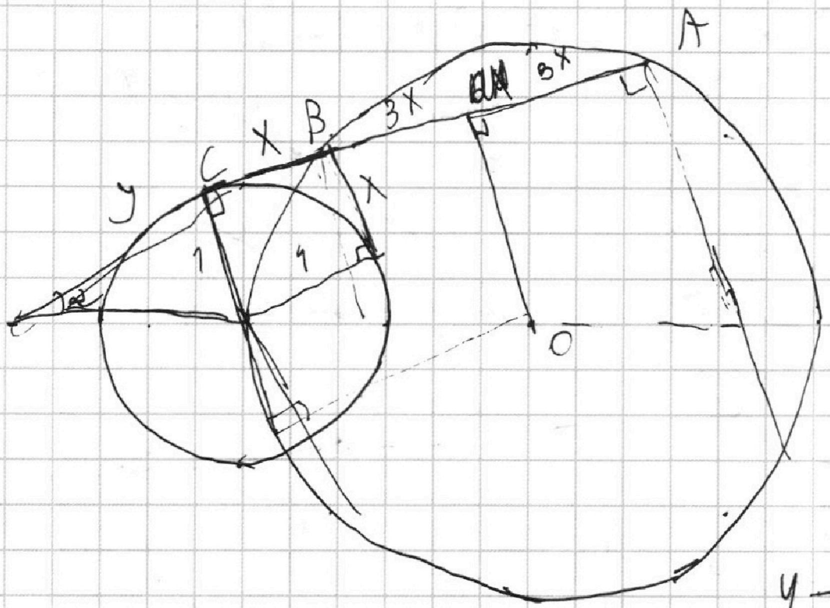
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{\frac{1}{63}} \\ a = -\sqrt{\frac{1}{63}} \\ a = \sqrt{\frac{1}{55}} \\ a = -\sqrt{\frac{1}{55}} \end{array}\right.$$

ответ: $\sqrt{\frac{1}{63}}$; $-\sqrt{\frac{1}{63}}$; $\sqrt{\frac{1}{55}}$; $-\sqrt{\frac{1}{55}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

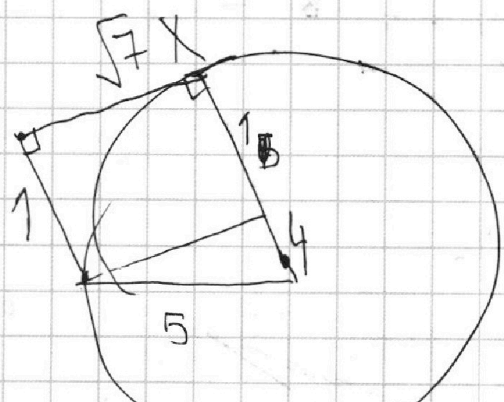
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{y+4x}{\sqrt{25-9x^2}}$$

$$CO^2 = 6x^2 + 25$$

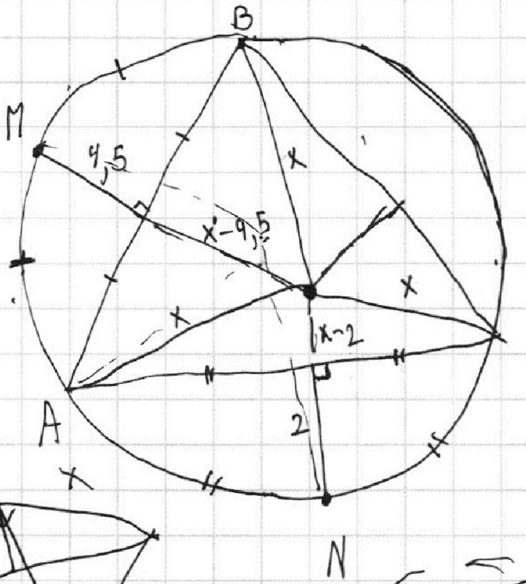


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

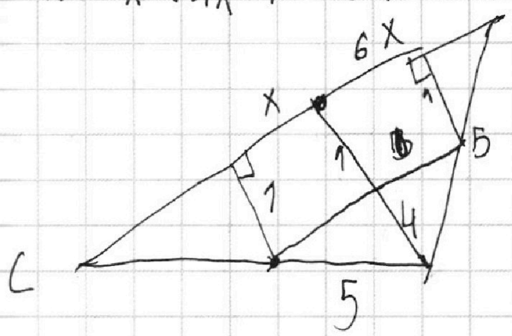
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

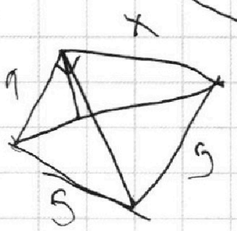
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

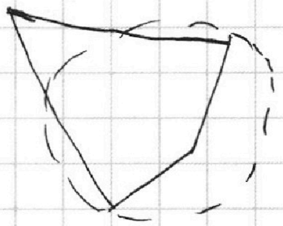
МФТИ

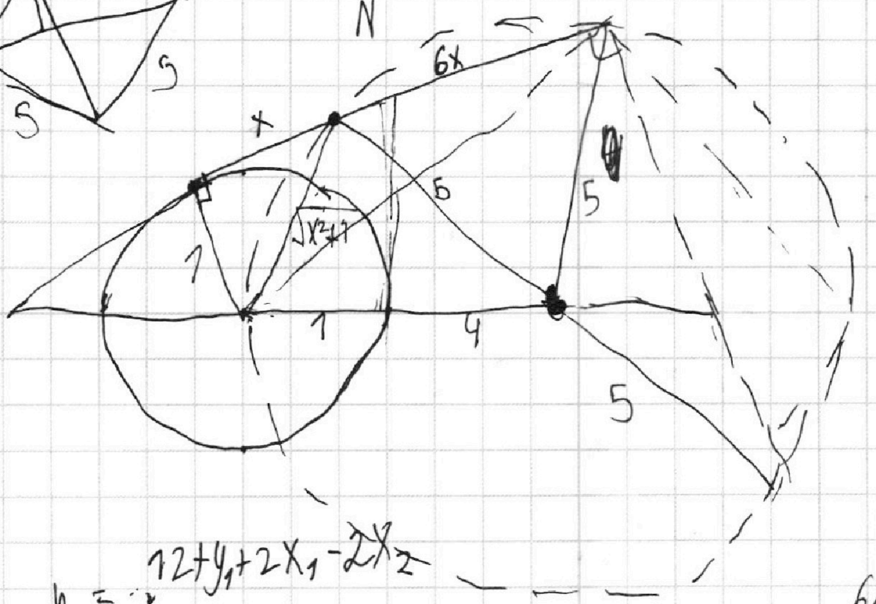


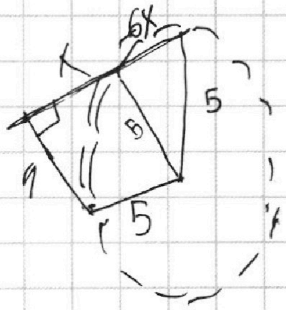
$x^2 - x^2 + 4x - 4 = \sqrt{4x-4}$





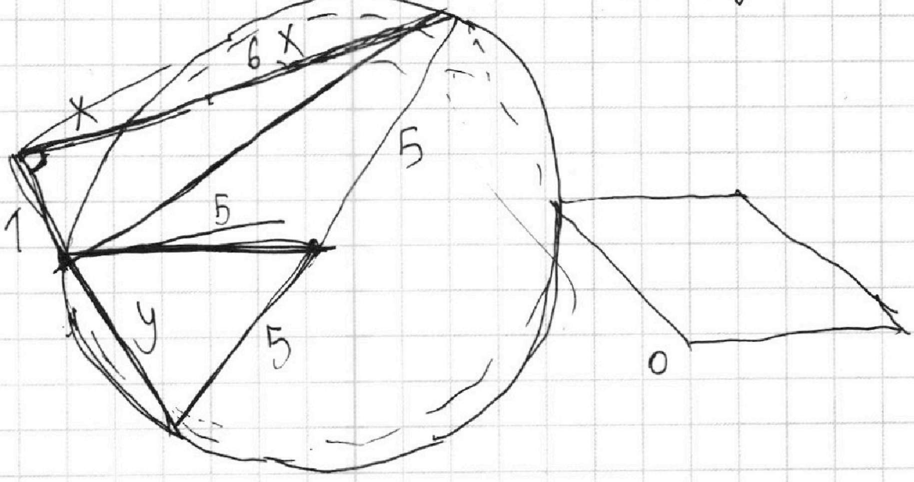






$y_2 = 12 + y_1 + 2x_1 - 2x_2$

$6x^2 = 1 + y$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $ab \vdots 2^{14}$ $m=14$

$bc \vdots 2^{17}$

$ac \vdots 2^{20}$

b $a-3$ $c-6$

b $b+3$ $b+6$

$b=6$ $a=9$ $c=2^{11}$

$\alpha_b=6$ $\alpha_a=9$ $\alpha_c=11$

$2(ab+bc+ac)=51$

$ab+bc+ac=26$

$\beta_a=10$ $\beta_c=27$

ОДЗ: $2x^2-5x+3\geq 0$

$(-\infty;1]\cup[\frac{3}{2};+\infty)$

2) a, b – взаимнопростые

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \quad 253$$

Делитель $a+b$ не делит a, b $m=8$

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

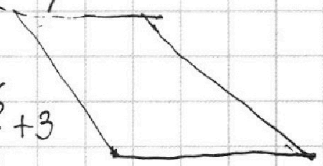
$$2x^2-5x+3-2x^2-2x-1=$$

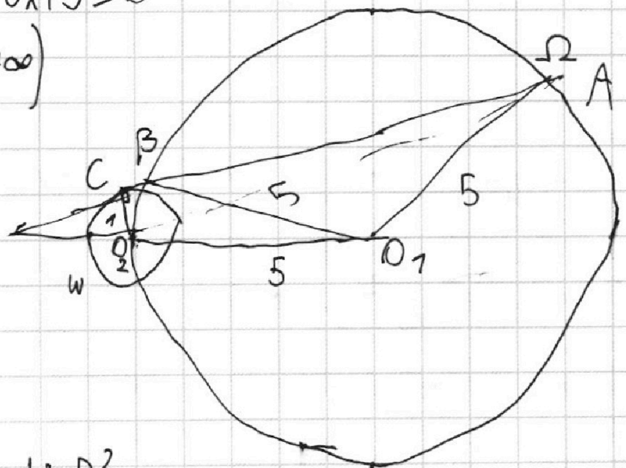
$$(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$$

$$-7x+2=(2-7x)$$

$$4x^2-3x+4+2\sqrt{\ldots}=1$$

$$\frac{4}{49}-\frac{10}{7}+3=-\frac{66}{49}+3$$



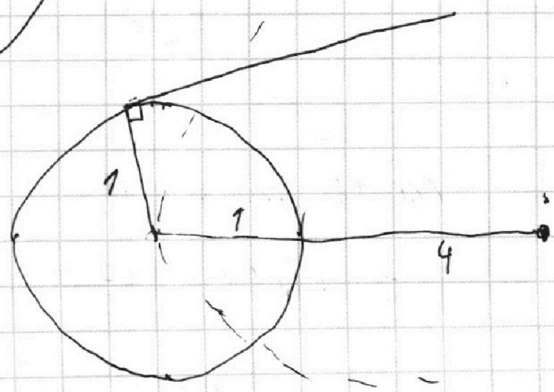


$\frac{AC}{CB}=7$ $R_\omega=1$

$R_\Omega=5$

AB – ?

$\frac{AB}{BC}=6$



$AC\cdot BC=d^2-R^2$

$7BC^2=d^2-R^2$

$$AC^2=(AO_2-1)(AO_2+1)=AO_2^2-1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\left((x+8)^2+(ax+10b)^2-1\right)\left(x^2+(ax+10b)^2-4\right)\right)\le 0$$

$$\left(x^2+16x+64+a^2x^2+20abx+100b^2-1\right)\left(x^2+a^2x^2+20abx+100b^2-4\right)\le 0$$

$$\left((a^2+1)x^2+4(5ab+4)x+(100b^2+63)\right)$$

$$D_1=25a^2b^2+40ab+16 \quad 100a^2b^2+160ab+64-100a^2b^2-63a^2-100b^2-63$$

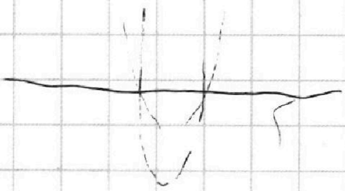
$$=160ab-63a^2-100b^2+1$$

$$(a^2+1)x^2+20abx+(100b^2-4)$$

$$D_1=100a^2b^2-100a^2b^2+4a^2-100b^2+4$$

$$90a=75b$$

$$D_1=4a^2-100b^2+4$$



$$160ab-63a^2-100b^2+1=0$$

$$4a^2-100b^2+4=0$$

$$a^2+1=25b^2$$

$$160a\sqrt{\frac{a^2+1}{25}}-63a^2-4a^2-4+1=0$$

$$32a\sqrt{a^2+1}-67a^2-3=0$$

$$32a\sqrt{a^2+1}=67a^2+3$$

$$32^2a^4+32^2a^2=67^2a^4+6\cdot 67a^2+9$$

$$690ab-64\cdot 90a^2$$

$$D_1=6900-75\cdot 69=25\cdot 64 \quad \sqrt{D_1}=40$$

$$\frac{80\pm 40}{64}$$