



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1)

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc: 2^{19} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$

$$(a^2 b)(bc)(ac): 2^{9+19+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+20}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

Т.к. квадрат натурального числа может

иметь только четную максимальную степень любого  
простого делителя, значит  $(abc)^2: 3^{42} \Rightarrow (abc): 3^{21}$

$$(abc)^2: 5^{53} \Rightarrow (abc): 5^{26}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{54}$$

$$abc: 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$$

~~минимум~~

минимальное натуральное  $abc$ , которое делится  
на  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$ , это и есть  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{24}$ , но по условию  
 $a \cdot c: 5^{20} \Rightarrow$  и  $abc: 5^{20} \Rightarrow$  минимальное  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$   
(т.к. степени  $2^{21}$  и  $3^{21}$  не  
могут уменьшиться).

пример чисел  $a, b, c$ :

$$a = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0, \text{ не трудно убедиться, что}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15}$$

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15} = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15} = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$

Ответ: минимальное  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

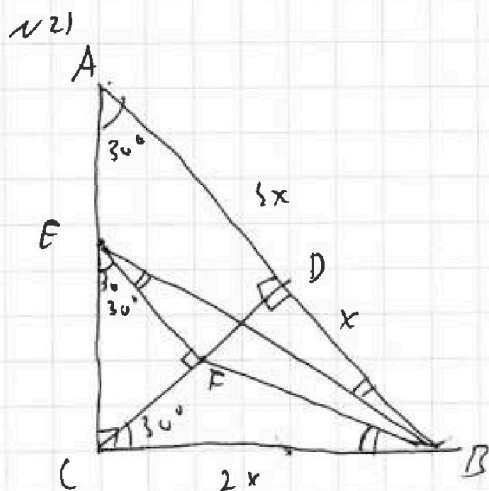
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\angle C = 90^\circ$

CD - высота

$EF \parallel AB$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$

$$AD = 3DB$$

пусть  $DB = x$ , тогда

$$AD = 3x$$

CD - высота из прямого угла, тогда  $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x \cdot x} = \sqrt{3} \cdot x$

$\triangle CDB$ ,  $\angle D = 90^\circ$ , тогда по Т. Пифагора:

$$CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$$

~~Есть~~  $DB = x = \frac{1}{2}CB \Rightarrow$  прямоугольный

$\triangle CDB$   $\angle DCB = 30^\circ$  (угл напротив катета, равно половине гипотенузы).

$$\angle ACD = 90 - \angle DCB = 60^\circ$$

$$\angle CAD = 90 - \angle ACD = 30^\circ$$

т.к.  $EF \parallel AB$  и  $AE$  - секущая, то  $\angle BAE = \angle FEC = 30^\circ$  (соответственные углы).

т.к.  $CB$  - касательная, а  $FB$  - хорда окружности, то

$\angle FBC = \frac{1}{2} \angle FCB$  (угл между касательной и хордой в точке касания равен половине дуги, которую хорда стягивает) и  $\angle FEB = \frac{1}{2} \angle FCB$  (вписанный угол), тогда

$$\angle BEF = \angle FBC$$

т.к.  $EF \parallel AB$  и  $EB$  - секущая  $\Rightarrow \angle ABE = \angle BEF$

(накрест лежащие углы)

$$\triangle ABE \sim \triangle BFC \text{ (т.к. } \angle EAB = \angle DCB = 30^\circ$$

и  $\angle ABE = \angle FBC$ ), тогда задано

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

можно заметить соответствующие стороны

$$\frac{AE}{FC} = \frac{AB}{CB} = \frac{4x}{2x} = 2$$

$$\frac{AE}{FC} = 2 \Rightarrow AE = 2FC$$

~~В~~  $\triangle EFC$  т.к.  $EF \parallel AB$  и  $CD$  — секущая, то  
 $\angle EFC = \angle ADC = 90^\circ$

$$\text{В } \triangle EFC \quad \angle FEC = 30^\circ \text{ и } \angle EFC = 90^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  сторона напротив  $\angle FEC$  равна половине гипотенузы

$$\Rightarrow FC = \frac{1}{2} EC$$

$$EC = 2FC$$

В  $\triangle ABC$  применить т. Пифагора:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x,$$

$$\text{но } AC = AE + EC = 2FC + 2FC = 2\sqrt{3}x$$

$$4FC = 2\sqrt{3}x$$

$$FC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$\triangle ABC \sim \triangle EFC$  (т.к.  $\angle ACB = \angle EFC = 90^\circ$  и  $\angle CAB = \angle CEF = 30^\circ$ )

$$\text{при чём коэф. подобия } k = \frac{CB}{CF} = \frac{2x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{но } \frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = k^2 = \frac{16 \cdot 3}{9} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



115)

$$\arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

можно считать, что возьмем  $\sin$  от обеих частей уравнения

$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$-2 \sin\left|\frac{x + \frac{2\pi}{2} - \frac{x}{2}}{2}\right| \cdot \sin\left(\frac{x - \frac{2\pi}{2} + \frac{x}{2}}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{2x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\frac{2x}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi k$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

полученные  $x$  - корни уравнения

$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ , тогда возьмем  $\arcsin$  от  
обеих частей

$$\arcsin(\cos(x)) = \arcsin\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

где  $d =$

Если  $x + \frac{\pi}{2}$  принадлежит I или IV четвертям  
принципальных значений, то

$\arcsin(\sin d) = d$ , и полученные уравнения  
будут удовлетворены абсолютно всеми

Если  $d$  принадлежит II или III четвертям, то

$\arcsin(\sin d) = \pi - d$ , и если  $\pi - d \neq d$ , то ~~тогда~~ ~~тогда~~ ~~тогда~~  
уравнение не имеет решений ( $\pi - d = d$  рассматривается  
отдельно)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

так как  $\arcsin$  - возвращает угол от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ ,

то  $\frac{\pi}{2} \geq \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \geq -\frac{\pi}{2}$ , заметим, что все такие углы  
в 1 или 4 четвертях, тогда  
они будут удовлетворять исходной системе  
произведений от двух корней.

$$\text{при } x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}\pi k$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} k \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = -1; 0; 1$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2\pi; -\frac{\pi}{2}; -3\pi$$

$$\text{при } x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k:$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}\pi k}{5} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k \leq \frac{\pi}{2} \quad | -\frac{\pi}{6}; : \pi$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$-\frac{4}{6} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{2}{6} \quad | \cdot 3$$

$$-2 \leq k \leq 2 \quad ; k = -2; -1; 0; 1$$

$$x = -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; \frac{\pi}{3}; 2\pi$$

$$\text{если } \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} = \pi - \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}, \text{ то}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi$$

$$x = 2\pi, \text{ что уже есть в ответах}$$

$$\text{общий ответ: } x = -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4)

$$\begin{cases} ax + 2y - 3z = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9) | (x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

все значения  $a$ , для которых найдётся  
 $x, z$  такое, что выполняются условия.

решение уравнения  $(x^2 + y^2 - 9) | (x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$

Эквивалентные решения совокупности

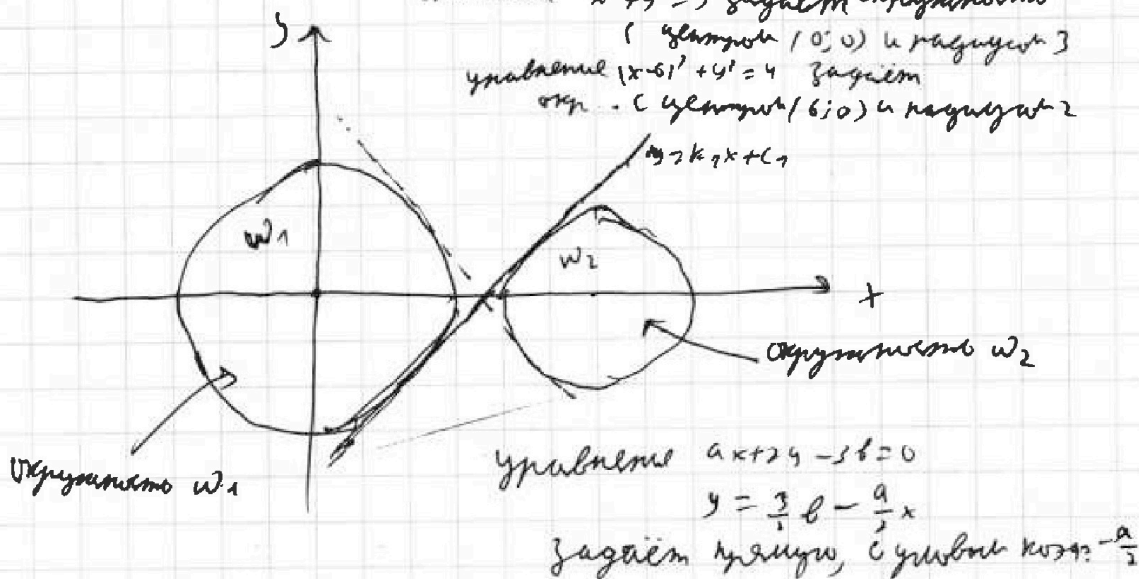
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases}$$

перепишем исходную систему (учитывая это)

$$\begin{cases} ax + 2y - 3z \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + 32 + y^2 = 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + 2y - 3z \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

решим систему графически, введя  $x, y, z$ .

уравнение  $x^2 + y^2 = 9$  задаёт окружность  
(центр  $(0, 0)$  и радиус  $3$ )  
уравнение  $(x-6)^2 + y^2 = 4$  задаёт  
окр. с центром  $(6, 0)$  и радиусом  $2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

по условию  $b$  - произвольное, значит прямая

$$y = \frac{3}{2}b + \frac{a}{2}x \text{ имеет } \begin{matrix} \text{произвольное} \\ \text{значение} \end{matrix} \text{ в вертикальном} \\ \text{направлении.}$$

Заметим, что график симметричен относительно  
 $Ox$ , тогда будет рассматриваться только  $a < 0$ , в силу сим-  
метрии ~~если  $a > 0$ , то он касался бы оси  $Ox$~~   
, если касался ~~на~~  $Ox$  в точке  $a$ , то он касался  
в точке  $-a$ .

при  $a < 0$ , прямая  $y = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}x$  возрастает.

$$\text{Значит } k = \frac{-a}{2}, k > 0$$

$$\text{Значит } l = \frac{3}{2}b,$$

$$y = kx + l$$

~~рассмотрим, какое  $c$ , что  $y = kx + c$  касалась~~

~~окружностям  $w_1$  (см. рисунок), тогда, если  
эта же прямая пересекает вторую окружность, то  
при изменении  $c$  на очень малое значение  $\epsilon$ ;  $\epsilon \rightarrow 0$ ;  $\epsilon > 0$   
приближаясь к нулю будет пересекать сразу обе окружности  
и будет иметь 4 решения~~

~~Если ~~же~~ касалась ~~прямая~~  $y = kx + c$  касалась  $w_1$  касалась  
 $w_2$ , то при изменении  $c$ , она пересекать ~~будет~~ ~~обе~~  
окружности  $c$  от  $0$  до  $2r$  окружностей, тогда решений не будет  
если~~

рассмотрим прямую  $y = k_1x + c_1$  - общую касательную  
двух окружностей (см. рисунок); при  $k > k_1$  будет  
увеличиваться  $c$  от  $+\infty$  до  $-\infty$ , следовательно прямая касалась  
 $w_1$  второй раз раньше, чем  $w_2$  первый, но тогда  
 $y$  система не более 2-х решений; || при  $k < k_1$ , при  
увеличении  $c$  от  $+\infty$  до  $-\infty$ , до 1-го касания 0 решений,  
в точке касания - 1 решение, до второго касания 2 решения,  
в точке второго касания тоже 2 решения, а далее уже не может  
быть более двух н.к. Прямая больше не касалась  $w_1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  не подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

при  $k=0 \Rightarrow a \geq 0$ ; тогда при  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$  из первого уравнения  $y \geq 0$ , что  
 при  $0 < k < k_1$ , ~~и~~ например в точке  $C_1$  будет ~~длина и~~  
~~и~~ решение, т.к. прямая будет уже не касаться, а пересекать  
 окружность  $\Rightarrow k < k_1$  невозможно  
 найдем  $k_1$  и  $c_1$   
 если прямая  $y = kx + c$  касается окружности

$$x^2 + y^2 = 9, \text{ то } y \text{ уравнение}$$

$$x^2 + (kx + c)^2 = 9 \text{ дискриминант} = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + x \cdot 2ck + c^2 - 9 = 0$$

$$D = 4c^2k^2 - 4c^2k^2 - c^2 \cdot 4 + 36k^2 + 36 = 0$$

$$c^2 \Rightarrow \downarrow$$

$$4c^2 - 4 = 36k^2 + 36$$

$$c^2 = 9k^2 + 9$$

$$c = \pm 3\sqrt{k^2 + 1}$$

поэтому второе касание ~~и~~ найдем при  
 параметре  $c$ , поэтому  $c_1 = -3\sqrt{k^2 + 1}$

если прямая  $y = kx + c$  касается окр.

$$(x-6)^2 + y^2 = 9, \text{ то } y \text{ уравнение}$$

$$(x-6)^2 + (kx+c)^2 = 9 \text{ дискриминант равен } 0.$$

$$x^2 - 12x + 36 + k^2x^2 + 2kxc + c^2 - 9 = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + (2kc - 12)x + c^2 - 9 = 0$$

$$D = 4k^2c^2 - 48kc + 144 - 4k^2c^2 + 16k^2 - 4c^2 + 36 = 0$$

$$16k^2 + 36 = 48kc + 4c^2 \quad | : 4$$

$$c^2 + 12kc = 4k^2 + 40, \text{ чтобы получить окружность}$$

касательную, выставляем  $c = -9\sqrt{k^2 + 1}$

$$9k^2 + 0 + 36k\sqrt{k^2 + 1} = 4k^2 + 40$$

$$5k^2 - 37 = 36k\sqrt{k^2 + 1} \quad | \text{ возведем обе части в}$$

$$25k^4 - 310k^2 + 961 = 1296k^4 + 1298k^2 \quad \text{квадрат}$$

$$-961 + 1298k^2 + 1606k^2 - 961 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k^2 = \frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}$$

Отмечаем дискриминант не равен, т.к.  $k^2 > 0$

т.к.  $k > 0 \Rightarrow$

$$k_1 = \frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}$$

Для  $k < k_1$  система имеет 4 решения.

$$\text{Система имеет 4 решения} \quad -\frac{a}{2} > k_1 \Rightarrow a > -2k_1$$

$$a > -2k_1$$

Окажем, что для  $k < 0$  для  $k > k_1$  система имеет 4 решения, т.к.

$$\text{Вывод } a = 0$$

$$-2k_1 < a < 2k_1 \Rightarrow$$

Ответ:  $\frac{1}{2} \leq a < 2$

$$-2 \frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241} < a < 2 \frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!



и 31

$$\arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos(x)) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20}$$

~~Случай  $\arcsin(a) = b$~~

некорректное  $a = b$ , но и

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} \leq 2\pi k + \frac{\pi}{2} - 2$$

$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20}\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20}\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{4x}{20} - \frac{\pi}{20}\right) = 0$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) =$$

$$= \left(\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{b}{2} \cos \frac{a}{2}\right) \left(\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} - \sin \frac{b}{2} \cos \frac{a}{2}\right)$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} - \sin^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} - \cos^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos^2 \frac{b}{2} - \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos 2a + 1}{2} - \frac{\cos 2b + 1}{2}$$

$$-2 \sin\left(\frac{6x}{20} + \frac{\pi}{20}\right) \cdot \sin\left(\frac{4x}{20} - \frac{\pi}{20}\right) = 0$$

$$\frac{6x}{20} + \frac{\pi}{20} = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{20}{4} \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{20}{6} \pi k$$

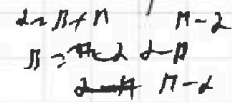
$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = \pi - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{20} \quad x = 2\pi$$

$$2x + \pi = \pi \quad 2x = 0 \quad x = 0$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = -\frac{x}{5} - \frac{\pi}{20} \quad \beta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2x}{5} = -\frac{\pi}{10} \quad \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot 1, 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

~~определить из каких  $x$ , не принадлежащих промежутку  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  принадлежат к четвертому или первому четвертям.~~

~~где  $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k$ , следовательно каждая  $x$  принадлежит к четвертому или первому четвертям и будем считать тогда рассмотрим только первое  $x$  и  $k$ .~~

~~$k=0 \quad x = -\frac{\pi}{2}$~~

~~$k=1$~~

~~$k=2$~~

~~$k=3$~~

~~$\cos x$  - возвращаемся к  $\cos$  от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ , тогда~~

~~$\cos x$  возвращаемся к  $\cos$  от  $-\frac{5\pi}{2}$  до  $\frac{5\pi}{2}$ , тогда~~

~~$\cos x$  возвращаемся к  $\cos$  от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$~~

тогда произведем отбор корней  $x$ , таких, что

~~$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \leq \frac{\pi}{2}$  и  $\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \in I$  или  $IV$  четверти~~

~~или  $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k$ :  
тогда  $\cos$  от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$  всегда в I или IV четверти, так как это четные  $k$  будем брать  $k = -1, 0, 1$ .~~

~~$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}k \leq \frac{\pi}{2}$~~

~~$\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = -\cos \frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$~~

~~$\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$~~

~~$-\frac{4}{5} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{5} \frac{\pi}{2} + \frac{2}{5} \frac{\pi}{2}$~~

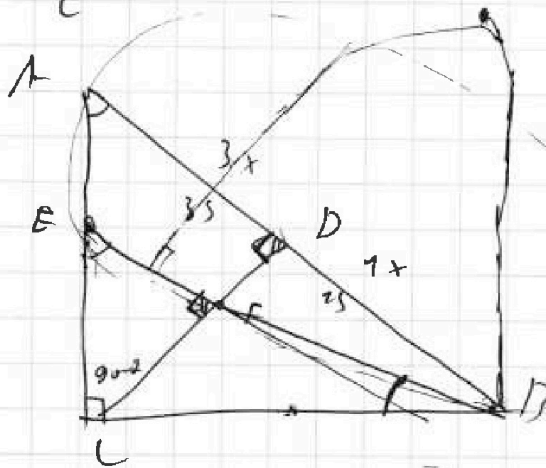
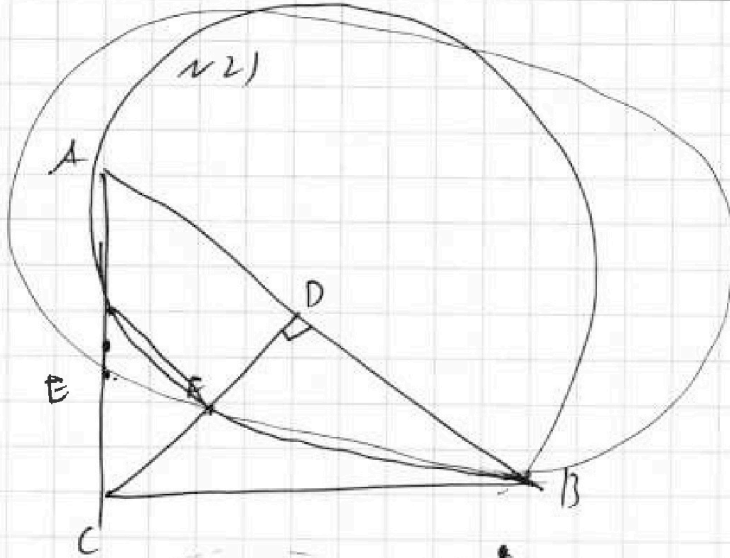
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

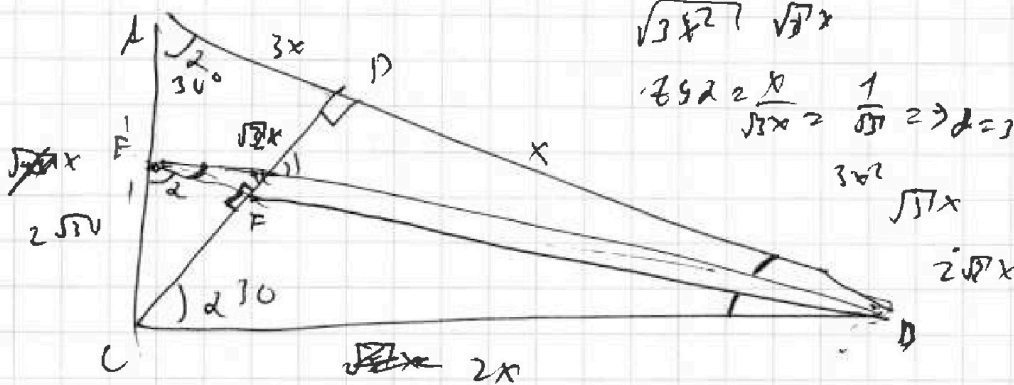
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD = DB = \frac{3}{7}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CBF}}$$

$$S_{ABC} = 45$$



$$\sqrt{3}x^2 \sqrt{3}x$$

$$2\sqrt{3}x = \frac{1}{\sqrt{3}x} \Rightarrow d = 30^\circ$$

$$\frac{ED}{FB} = 2 \Rightarrow EB = 2FD$$

$$\frac{AE}{CF} = 2 \Rightarrow AE = 2CF$$

$$60 - 2\theta$$

$$CE = \frac{1}{2} AC$$

$$AC = 2\sqrt{3}x = AE + EC$$

$$2\sqrt{3}x = \frac{3}{2} EC$$

$$CF = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) 36  
216  
36\*60 + 1200  
1296 -

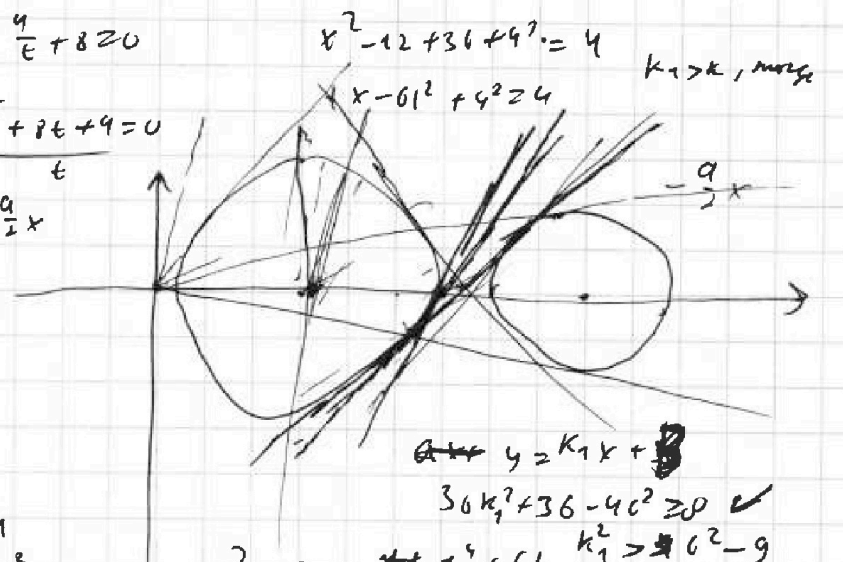
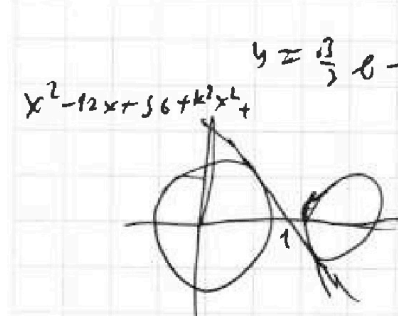
$6^4 k^2 > 41k^2 - 240 \cdot 9k^2 - 8100$   
 $6^4 k^2 - 41k^2 - 2160 \cdot 9k^2 - 8100$   
 $\log_3^4 x + 6 \log_3^3 = 8$   
 $6^4 k^2 + 6^4 k - 41k^2 - 2160 \cdot 9k - 8100$

$-35k^2 - 2 \cdot 40 \cdot 9k^2 - 8100 > 0$   
 $x^2 + k^2 + 2kx + c^2 = 9$   
 $x^2(k^2+1) + x \cdot 2k + c^2 - 9 = 0$   
 $y = kx + c$   
 $D = 4k^2 c^2 - 4k^2 c^2 + 36k^2 + 36 = 0$   
 $x^2 + (kx+c)^2 = 9$

$\log_3^4 x + 6 \log_3^3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \log_3^7 - 8$   
 $t^4 + \frac{4}{t} + 8 = 0$

$36k^2 + 36 = 4c^2$   
 $8^2 \cdot (k^2+1) = 4c^2$   
 $9(k^2+1) = c^2$   
 $k_1 > k$

$4 > 32k$   
 $4 > 36k \sqrt{k^2+1} + 41k^2 + 9$   
 $36k \cdot \sqrt{k^2+1} > 41k^2 + 9$   
 $t^4 + \frac{4}{t} + 8 = 0$



$x^2 - 12x + 36 + k^2 x^2 + 2kx + c^2 = 4$   
 $x^2(1+k^2) + x(2k-12) + 32 + c^2 = 0$   
 $D = 4k^2 c^2 - 48k + 144 - 128 - 120k^2 - 48k^2 c^2 - 4c^2$   
 $t^4 + \frac{4}{t} = \frac{2}{t} - 8$   
 $16 > 48k + 128k^2 + 4c^2$   
 $4 > 12k + 32k^2 + c^2$   
 $32k^2 + 16k + c^2 - 4 = 0$   
 $D = 144c^2 - 128c^2 + 512$   
 $16c^2 + 512 = 16(c^2 + 32)$   
 $k = \frac{-12c \pm 4\sqrt{c^2+32}}{64}$

$\frac{2}{t} - 8 = \frac{4}{t} + \frac{6}{t}$   
 $t^4 + \frac{4}{t} + 8 = 0$   
 $k_1 > \frac{c^2}{9} - 1$   
 $k_2 = \frac{c^2}{9}$   
 $c^2 = 9k^2 + 9$   
 $c = 3\sqrt{k^2+1}$   
 $k^4 + \frac{4}{k} - \frac{11}{k} + 8 = 0$   
 $k^4 - \frac{7}{k} + 8 = 0$   
 $2k^5 + 20k - 14 = 0$   
 $k^4 + \frac{2}{k} = \frac{11}{2k} - 8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

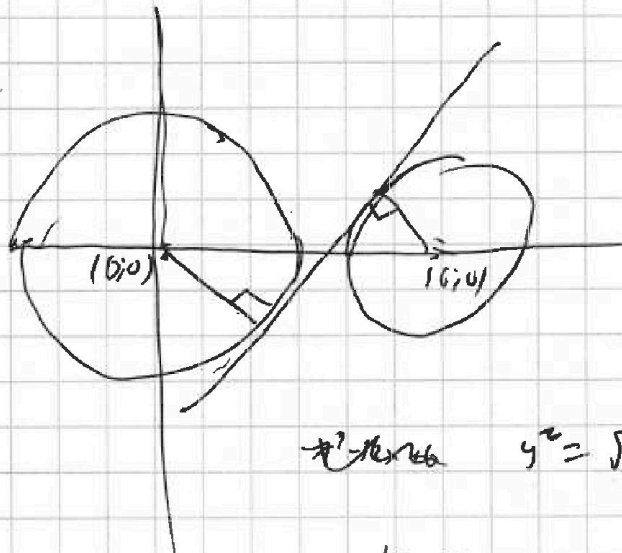
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = kx + 3\sqrt{b+1}$$



~~$x^2 + y^2 = b$~~   $y^2 = \sqrt{4 - (x-6)^2}$

$$k =$$