



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \quad (1)$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{10} \quad (1)$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \quad (3)$$

(найти $abc(mn)^2$)

перемножим все алгебра и габитре формулы:

$$(ab \cdot bc \cdot ac) : (2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2^{17} \cdot 7^{10} \cdot 2^{23} \cdot 7^{39})$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 : 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+10+39}$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 : 2^{55} \cdot 7^{60}$$

Квадрат abc , наименьшими звеньями $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$ делит на mn^2 , куда

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{55} \cdot 7^{60}$$

но! $a, b, c \in \mathbb{N}$ (по умр. abc), abc - кратна mn^2

А $2^{55} = 2^{54} \cdot 2$ Если abc или mn^2 кратны 2 , то получится:

$$7^{39} \cdot 2^{27} \cdot \sqrt{2}$$

но $\sqrt{2}$ - не натур. abc , или mn^2 делится 2^{55} (умножить)

таким же образом 7^{60} так abc или mn^2 делится 7^{60}

Поэтому, что abc должно делиться 2^{55} на 2 . Тогда:

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{56} \cdot 7^{60} \quad (abc > 0)$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{30}$$

Проверим не a или b кратны? По условию, у нас числа кратные

(из (1), (2), (3)) abc , значит a, b, c имеют этого делителя, но кратко

каждый шти (напримр: $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$, где k - abc , $(\in \mathbb{N})$)

abc , mn^2 шти будет mn^2 , куда все k делит равно 1.

(k_1, k_2, k_3)
 $(1, 2, 3)$

но шти шти рассмотрим все уже выше. но ~~заметим~~

~~что abc или mn^2 делится на abc~~

А mn^2 шти 2 может быть в шти из $k(k_1, k_2, k_3)$

различия не, abc mn^2 шти

$$\text{Ответ } abc = 2^{28} \cdot 7^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$ - несократима (a, b - взаимно простые числа).

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ ← как можно сократить уроб?

перепробуй a (нет разницы, в каком виде мне представить уроб (переверну или наоборот, все зависит от того и то же число).

$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b}$; $\frac{a^2+2ab+b^2-9ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2-9ab}{a+b}$

$= a+b - \frac{9ab}{a+b}$; $\frac{9ab}{a+b}$; $\frac{ab}{a+b}$ не кратно (каждое из a, b взаимнопросто), но $(a+b) \cdot 9$; $\frac{3}{5}$ - макс уроб (по ур)

1) рассмотрим несколько вариантов $a=3, b=5$

$\frac{3+5}{9-7 \cdot 5 \cdot 3+25} = \frac{8}{71}$; $\frac{3}{5}$ - макс уроб (только еще $m=2$)

2) пусть $b=3, a=23$; $\frac{23}{3}$ - макс уроб ; (32)

$\frac{26}{25^2-7 \cdot 3 \cdot 23+9} = \frac{26}{23 \cdot 23+9} = \frac{26}{55}$; (51) ; а уроб макс

Понял, что получ. 1 и получ. 2 разные, которые и в которых сократятся, что получ. уроб так же не сократятся (даже если это отменит уроб)

Понял $m=2$; $m(m+1)=1$

но если не две цифры, то пусть $a=7k, b=7p$

Ответ: $\frac{7(k+p)}{49k^2-7 \cdot 7k \cdot p+49p^2} = \frac{k+p}{7k^2-49kp+7p^2}$

или самым близ, если отмен m должно быть только уроб как числа, то уроб, что m - макс. и уроб брата

какой-то чис. квадрат. пусть k и p , и тогда уроб сокр на это квадрат. число, что m - макс. (не вар) ; $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{49}$; макс $m(m+1) = 9$; $m=2$; $a=4, b=5$; $(a+b)=9$

3) но вернется $\frac{9}{49}$; макс $m(m+1) = 9$; $m=2$; $a=4, b=5$; $(a+b)=9$

Ответ: если m должно быть две или $m=1, m=9$; если $a=4, b=5$; $(a+b)=9$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

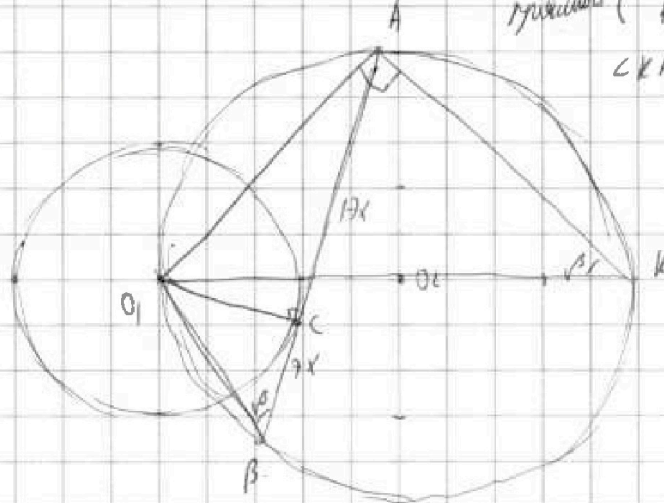
МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$O_1(w, R_1)$
 $O_2(a, R_2)$
 AB кас w/в.р.с
 $AC = 17$ ($AC = 17x$)
 $BC = 7$ ($BC = 7x$)
 $R_1 = 7$
 $R_2 = 13$
 AB - !

Искомое:
 $BC = 7x$



O_1, O_2, K - на одной прямой!
 (A, K - диаметр)
 $\angle KAO_1 = 90^\circ$

• пусть $\angle O_1BA = \beta$, $\cos \beta$!

$\angle O_1BA = \angle O_1KA = \beta$, $(90^\circ); (\beta)$

• $\cos \beta$, $\triangle O_1CB \sim \triangle O_1AK$ (по 2-м углам)

$$\frac{BO_1}{KO_1} = \frac{O_1C}{AO_1}$$

$KO_1 = 26$ ($= 2R_2$)

$O_1C = 7 = R_1$ (кас. AB)

$$\frac{BO_1}{26} = \frac{7}{AO_1}$$

$$AO_1 \cdot BO_1 = 7 \cdot 26$$

$\cos \beta$, по ст-б. кас и ди (где BO_1 и AO_1):

$$49x^2 = (BO_1 - 7) \cdot (BO_1 + 7)$$

$$289x^2 = (AO_1 - 7) \cdot (AO_1 + 7)$$

$$289x^2 = (AO_1 - 7) \cdot AO_1$$

$$(x^2 + 1)AO_1 = 26^2$$

$$x^2 = \frac{26^2}{AO_1} - 1$$

$$49x^2 = BO_1^2 - 49$$

$$289x^2 = AO_1^2 - 49$$

$$49x^2 = \frac{49 \cdot 26^2}{AO_1^2} - 49$$

$$289x^2 = AO_1 - 49$$

$\cos \beta$

$$AO_1 = \frac{26^2}{x^2 + 1}$$

$$289x^2 = \frac{26^2}{x^2 + 1} - 49$$

$$289x^4 + 289x^2 = 26^2 - 49x^2 - 49$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$x^2 = \frac{-169 \pm \sqrt{169^2 - 289 \cdot 627}}{289}$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{28} - 165}{289}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 = \frac{207 - 169}{289}$$

$$207 = 169^2 + 289 \cdot 627$$

$$y = \frac{\sqrt{169^2 + 289 \cdot 627} - 169}{17}$$

$$AB = \frac{24}{17} \cdot \sqrt{169^2 + 289 \cdot 627} - 169$$

$$\text{Ответ: } \frac{24}{17} \cdot \sqrt{169^2 + 289 \cdot 627} - 169$$

$$\frac{24}{17} \sqrt{209707} - 169$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & \textcircled{1} \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & \textcircled{2} \\ 3x^2 + 3x + 1 = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$ $\textcircled{3}$ $\frac{3x+1}{2} = 0$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x + 1 = -9x + 1 \quad | : (1-9x) \text{ умнож}$$

пусть $\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = t \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = p \end{cases}$ $t \geq 0, p \geq 0$ $\textcircled{3}$ $\frac{3x+1}{2} = 0$

$$t - p = t^2 - p^2 \quad ; \quad t - p = (t-p)(t+p)$$

$$(t-p)(t+p-1) = 0$$

$\textcircled{1} \quad t - p = 0$
 $t = p$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

возводим в квадраты ($6x \geq 0$)

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 = 9x$$

$$x = \frac{1}{9}$$

(проверим ОДЗ)

$\textcircled{2} \quad t + p = 1$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

возведем в квадраты (левая часть ≥ 0)

$$3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$6x^2 - 3x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = -6x^2 + 3x - 2$$

умнож: $6x^2 - 3x + 2 \leq 0$ ($-6x^2 + 3x - 2 \geq 0$)
 $6x^2 - 3x + 2 < 0$

но: $6x^2 - 3x + 2 = 0$

$$D = 9 - 12 \cdot 4 < 0$$

$$6x^2 - 3x + 2 > 0 \text{ (всегда)}$$

умнож: $\textcircled{2} \quad \emptyset$ (корней нет)

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O(0,0)$, $P(-13,26)$, $Q(3,26)$, $R(16,0)$

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$\tau A, B \in \text{паралл}$

$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$ *сумма*
 $2(x_2 - x_1) = 14$ *сумма*

увели коэффициентов

1) ищем, что еще

$x_2 - x_1 = 0$ *сумма*

$y_2 - y_1 = 14$

$x_2 = 0$, $y_2 = -14$

сумма *сумма*

$x_1 = x_2 = 0$, *сумма*

$y_2 - y_1 = 14$

мин $y_1 = 0$ *сумма*

$y_2 = 14$

сумма *сумма*

коэффициент $4 \rightarrow$

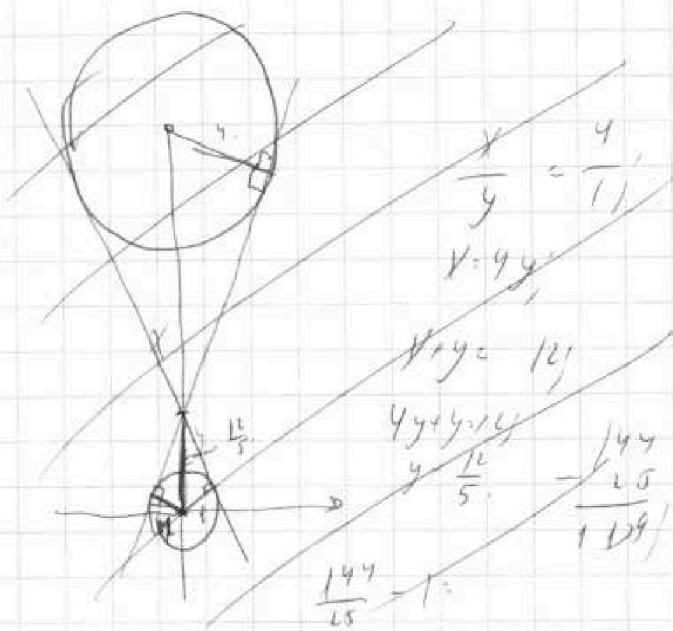
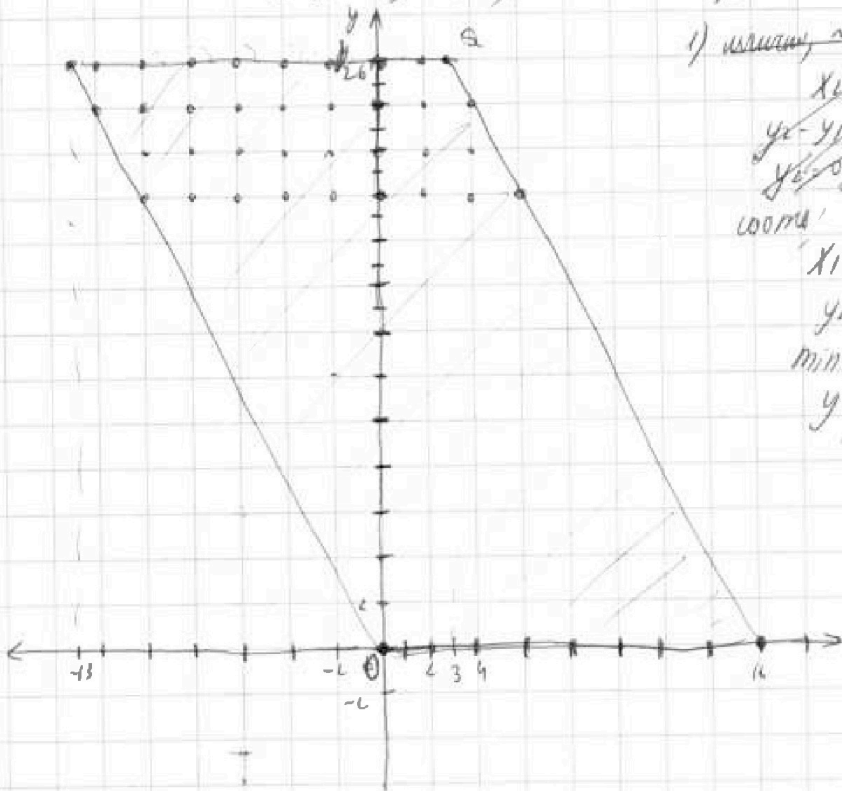
$y_2 = 26$

сумма

в 1-ой

$x \text{ бер } = 13$

1



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④

$$x^2 + (8b + ax + 12)^2 = 16$$

$$x^2 + (64b^2 + 8abx + 96b + 8abx + a^2x^2 + 12ax + 96b + 12ax + 144) = 16$$

$$x^2 + x^2(a^2 + 1) + (16abx) + 64b^2 + 192b + (24ax) + 121 = 0$$

$$y'(a^2 + 1) + x(16ab + 24a) + 64b^2 + 192b + 121 = 0$$

$$D = 8a(8ab + 12a)$$

$$D = (16ab + 24a)^2$$

$$D_1 = (8ab + 12a)^2 - (a^2 + 1)(64b^2 + 192b + 121) = 0$$

$$(8ab + 12a)^2 = (a^2 + 1)(64b^2 + 192b + 121)$$

$$a^2(8b + 12)^2 = (a^2 + 1)(64b^2 + 192b + 121) \quad \text{так как } a^2 = 1 - 64b^2$$

$$a^2(2b + 3)^2 = (a^2 + 1)(4b^2 + 12b + 8)$$

$$a^2(2b + 3)^2 = (a^2 + 1)(4b^2 + 12b + 8)$$

$$a^2(4b^2 + 12b + 9) = (a^2 + 1)(4b^2 + 12b + 8)$$

$$a^2(4b^2 + 12b + 9) + a^2 = a^2(4b^2 + 12b + 8) + 4b^2 + 12b + 8$$

$$a^2 = 4b^2 + 12b + 8$$

$$1 - 64b^2 = 4b^2 + 12b + 8$$

$$68b^2 + 12b + 7 = 0$$

$D =$

пусть:

$$\begin{cases} y^2 + (8b - ax)^2 = 1 \\ x^2 + (8b - ax - 12)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a^2 = 64b^2 \\ a^2 = 4b^2 - 12b + 8 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

(из двух уравнений тут, решим их)

$$64b^2 - 1 = 4b^2 - 12b + 8$$

$$60b^2 + 12b - 9 = 0$$

$$D = 36 + 960 = 6616 = 6^2 \cdot 4^2$$

$$b_{1,2} = \frac{-6 \pm 24}{60}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = \frac{3}{10}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad a_1^2 = \frac{64 \cdot 1}{4} - 1 = 15$$

$$a^2 = 15, \quad a = \pm \sqrt{15}$$

$$b_2 = \frac{3}{10}, \quad a_2^2 = \frac{64 \cdot 9}{100} - 1, \quad a_2^2 = \frac{16 \cdot 9}{25} - 1, \quad a = \pm \frac{\sqrt{71}}{5} \quad \text{Ответ } a = \pm \sqrt{15}, \quad a = \pm \frac{\sqrt{71}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



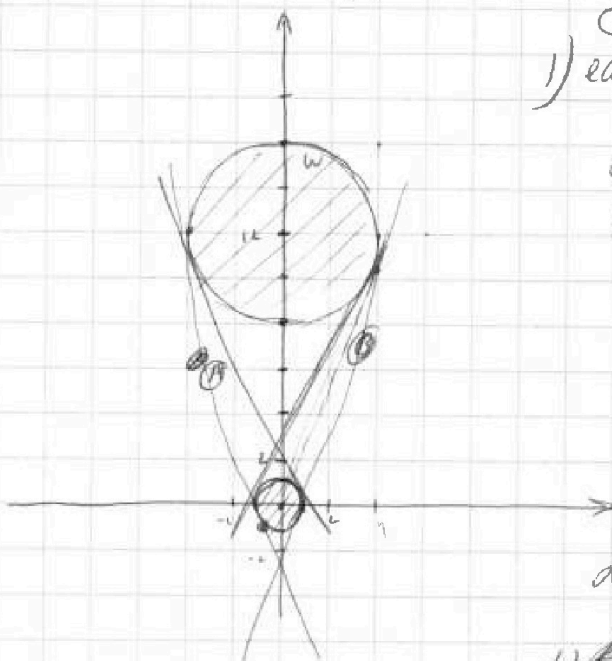
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+by \\ a(x+y-8b)=0 \quad (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y+1)^2-16)=0 \quad (2) \end{cases} \quad y = 786 - ax$$

(1): $x^2+y^2=1$
 $x^2+(y+1)^2=16$ } обе окр.

или попарно зипр - оба.



1) если $b=0$ то:

$y = -ax$
 100% min ширины - кас. к окр. w
 100%

$$x^2 + (-ax-1)^2 = 16$$

$$x^2 + a^2x^2 + 24ax + 12 = 16$$

$$x^2(a^2+1) + 24ax + 4 = 0$$

$$D = 0 \text{ (одно реш.)}$$

$$D: 12a^2 - 4 \cdot 4 \cdot 8(a^2+1) = 0$$

$$12a^2 = 128$$

$$12a^2 = 4 \cdot 4 \cdot 8(a^2+1)$$

$$448a^2 = 448(a^2+1)$$

$$a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2} \rightarrow \text{но}$$

100% этот вариант не подходит. минимум ширины у кас. кас.

4 если

2) су. бцр, кас. кас. попарно - а; в - кас. к 2 окр. сразу (прямая 1 и 2) или (прямая) кас. кас. окр.

$$\begin{cases} x^2 + (786 - ax)^2 = 1 \quad (1) \\ x^2 + (-786 - ax - 1)^2 = 16 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $x^2 + 64b^2 + 16axb + a^2x^2 = 1$
 $x^2(a^2+1) + 16axb + 64b^2 - 1 = 0$
 $D = 0 \Rightarrow D = 64$

$$D_1 = 64a^2b^2 - (a^2+1)(64b^2-1) = 0$$

$$64a^2b^2 - 64a^2b^2 - a^2 - 64b^2 + 1 = 0$$

$$a^2 + 64b^2 = 1 \Rightarrow (1)$$

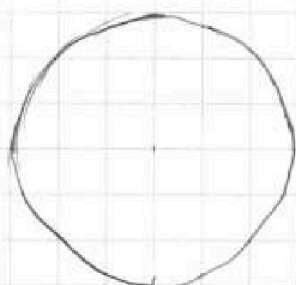
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ 10140 \\ 16900 \\ \hline 28561 \\ + 81143 \\ \hline 209704 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \sqrt{627} \\ \hline 1963 \\ 5780 \\ 173400 \\ \hline 181193 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 11 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 1820 \\ \hline 20475 \end{array} \quad 0010$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 1820 \\ \hline 20475 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 48 \\ \hline 53 \end{array} \quad +14$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 16 \\ \hline 17 \end{array}$$

200000
360000
500
400
250000

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ 1132 \\ \hline 28501 \end{array}$$

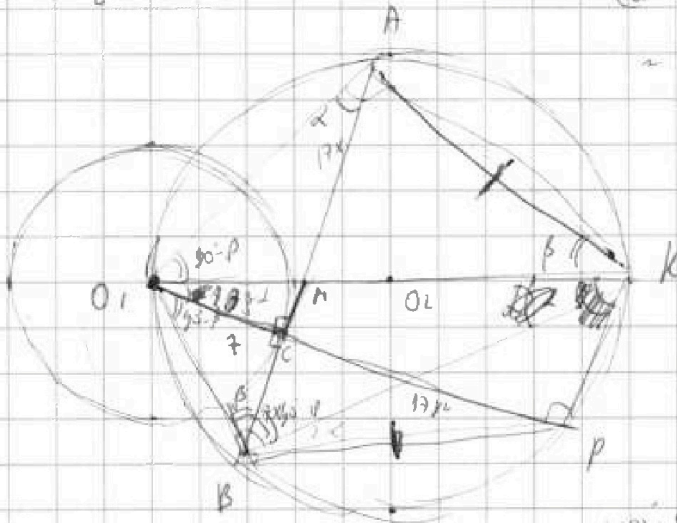
$$\begin{array}{r} 54 \\ + 8 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 7 \\ \hline 33 \end{array}$$

8

$$(26-7)(26+7) =$$

27



$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 19 \\ \hline 297 \\ 594 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 115 \\ \hline 3380 \\ 3718 \\ \hline 38870 \end{array}$$

$$13^4 + 17^4 = (26^2 - 7^2)$$

$$90^\circ - \beta + \alpha$$

$$120^\circ - 90^\circ - 90^\circ + \beta + \alpha$$

~~$$\angle \alpha = \frac{7}{17}$$~~

$\beta = 1$

$$43 \times 2 = BO_1$$

$$\triangle CBO_1 \sim \triangle AKO_1$$

$$\frac{CB}{AK} = \frac{BO_1}{KO_1} = \frac{CO_1}{AO_1}$$

$$\frac{7x}{AK} = \frac{BO_1}{26} = \frac{7}{AO_1}$$

$$AO_1 \cdot BO_1 = 7 \times 6$$

$$\begin{array}{r} 284 \\ \times 46 \\ \hline 1704 \\ 1136 \\ \hline 13084 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 284 \\ \times 49 \\ \hline 2556 \\ 1136 \\ \hline 14016 \end{array}$$

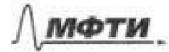
$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 2x + y &= 14 \\
 y &= 14 - 2x
 \end{aligned}$$

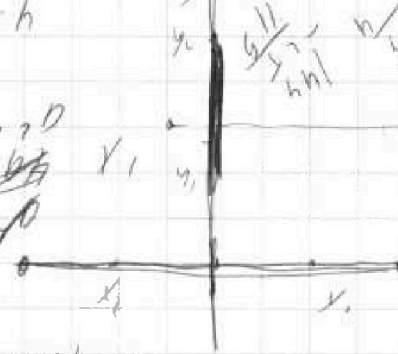
$$2x + y = 14$$

$$y = 14 - 2x$$

$$2x + y = 6$$

$$2x + y = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$



$$\begin{aligned}
 &= 2x + y + 14 - 2x - y + 6 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x + y + 14 - 2x - y + 6 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x + y + 14 - 2x - y + 6 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x + y + 14 - 2x - y + 6 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x + y + 14 - 2x - y + 6 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x + y + 14 - 2x - y + 6 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

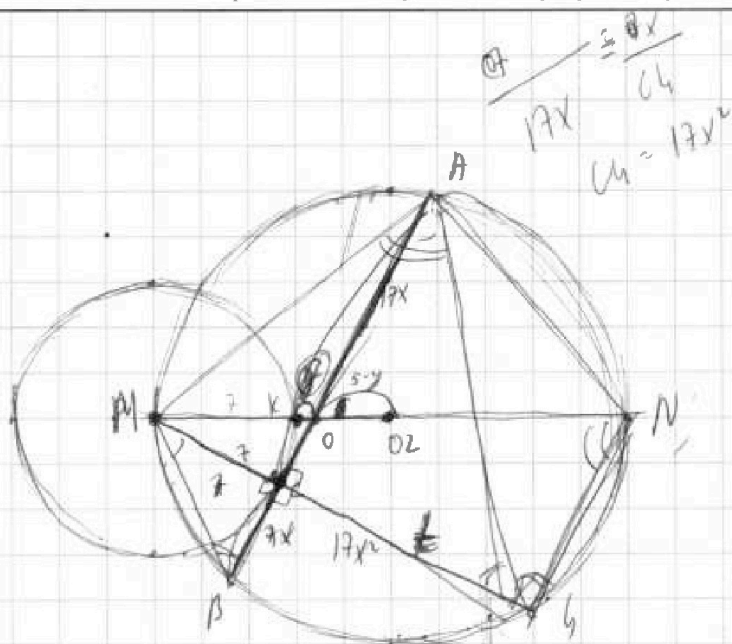
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ИММ



$$\frac{OM}{AM} = \frac{ON}{AN}$$

$$\frac{7}{7x} = \frac{7}{7y}$$

$$7y = 7x$$

$$y = x$$

$$\triangle MCB \sim \triangle ACG;$$

$$\frac{7}{7x} = \frac{7y}{7z}$$

$$z = x = y$$

$$5-y = 11$$

$$17x \cdot 7x = 7 \cdot 7z$$

$$17x \cdot 7x = 7 \cdot 7$$

$$(7y = 7x)$$

$$5-y + 15 =$$

$$MN \cdot ON = AO \cdot BO;$$

$$(7+y) \cdot (18-y) = 7 \cdot (z);$$

$$\frac{7}{7+z} = \frac{7+y}{26}$$

$$(7+y)(18-y) = 7 \cdot \frac{7 \cdot 26 - 7(7+y)}{7+y}$$

$$7 \cdot 26 = (7+y)z + z(7+y)$$

$$\frac{7}{7+z} = \frac{7+y}{26} z = \frac{7 \cdot 26 - 7(7+y)}{7+y}$$

$$z = \frac{7 \cdot 26}{7+y} - 1$$

$$z = \frac{7 \cdot 26 - 7(7+y)}{7+y}$$

$$\frac{7}{7+z} = \frac{7+y}{18-y}$$

$$(7+y)^2 \cdot (18-y) = 7 \cdot 7 \cdot (26 - 7 - y)$$

$$(7+y)^2 \cdot (18-y) = 49(19-y)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2-6x+2+9x-1} = 1-9x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2-3x+1} = 1-9x$$

$$3x^2+3x+1 - 3x^2+6x-2 = 1-9x$$

$$-9x+1 = 1-9x$$

$2x_1 + y_2 = k$
 $2x_1 + y_1 = 14 - k$
 $y_2 = k - 2x_1$
 $p = t^2 - p^2$

$t - p = t^2 - p^2 = (t-p)(t+p)$
 $(t-p)(t+p-1) = 0$
 $t+p=1$

$\sqrt{3x^2-6x+2} = 3x^2+2x$
 $3x^2-6x+2 = 3x^2+2x$
 $-9x+2=0$
 $x = \frac{2}{9}$

$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x-1} = 1$

$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x-1 = 1$
 $6x^2-3x+2 = 0$
 $6x^2-3x+2 \leq 0$

$4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x-1) = (3x^2-3x+2)^2$
 $4(9x^4+9x^3+3x^2-18x^3-18x^2+6x+6x^2+6x-2) = 9x^4-6x^3+12x^2-12x+4$

$4(9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 12x + 4) = 9x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 4$
 $36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 48x + 16 = 9x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 4$
 $27x^4 - 30x^3 - 24x^2 + 60x + 12 = 0$

$27x^4 - 30x^3 - 24x^2 + 60x + 12 = 0$
 $3x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 1 = 0$
 $3x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 1 = 0$
 $x = \frac{1}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

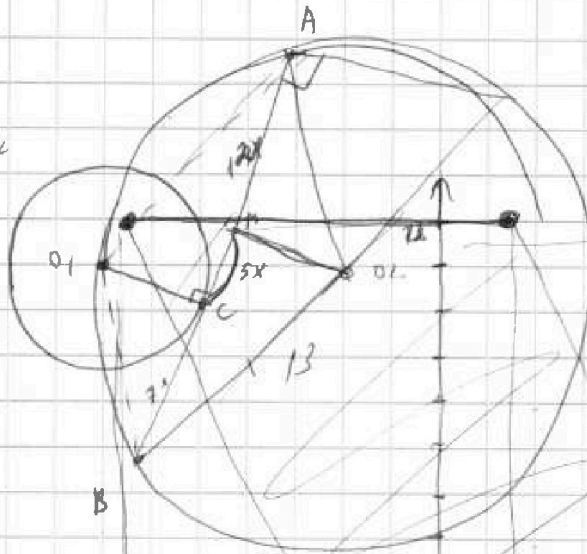
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поиск QR-кода недоступен!



$$kx + b = y_1$$

$$kx + b = y_2$$

$$kx + b = y_1$$

$$y \leq 2x$$

$$y > 0$$

$$\begin{matrix} y \\ \hline 4 \\ \hline 4+4 \\ \hline 4+8 \\ \hline 4+12 \\ \hline 4+16 \\ \hline 4+20 \\ \hline 4+24 \\ \hline 4+28 \\ \hline 4+32 \end{matrix}$$

a=1, b=3

$R_1 = 7$
 $R_2 = 13$

$\frac{g_n}{1+n}$
 $\frac{g_n}{1+n}$
 $\frac{g_n}{1+n}$
 $\frac{g_n}{1+n}$
 $\frac{g_n}{1+n}$
 $\frac{g_n}{1+n}$
 $\frac{g_n}{1+n}$
 $\frac{g_n}{1+n}$
 $\frac{g_n}{1+n}$
 $\frac{g_n}{1+n}$
 $\frac{g_n}{1+n}$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = t \quad (t \geq 0 \text{ / const})$$

$$\sqrt{t+p} - \sqrt{t} = p$$

$$\sqrt{t+p} = p + \sqrt{t}$$

$$t+p = p^2 + 2p\sqrt{t} + t$$

$$p^2 + 2p\sqrt{t} - p = 0, \quad p=0 \quad 1-p \geq 0$$

$$p + 2\sqrt{t} - 1 = 0, \quad 2\sqrt{t} = 1 - p$$

$$4t = (1 - 2p)^2$$

$$4(2x^2 + 3x + 1) + 12x + 4 = 1 - 2 + 18x + 1 - 18x + 81x^2$$

$$4t = (1-p)^2$$

$$4(12x^2 + 12x + 4) = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 6.614.69$$

$$= 66+t$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 4 \\ \hline 276 \\ \times 276 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 6 \\ \hline 72 \\ \times 72 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$\frac{69}{13}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



46
+ 25
51

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x$$

3x² - 6x + 1 = 2 D = 9 - 12 = -3
D = 9 - 6 = 3

23
x

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 - 9x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x$$

3x² + 3x + 1 = 4 1 - 5x = p

$$\sqrt{t - p} - \sqrt{t} = p$$

p > 0

71
43
+ 501
101

45
45
101

45
45
101

$$\sqrt{t - p} - \sqrt{t} = p$$

$$t - p + t = 2\sqrt{t} \sqrt{t - p} = p^2$$

3x² + 3x + 1 - 9x + 1 = 1 + 3x + 1 - 9x + 1 = 3x² - 6x + 3 = 3(x² - 2x + 1) = 3(x - 1)²

1 + 3x = 4 → x = 1

501 - 101

45
45
101

$$\sqrt{t + p} - \sqrt{t} = p$$

p > 0

$$\sqrt{t + p} - \sqrt{t} = p$$

$$t + p - 2\sqrt{t} \sqrt{t + p} + t = p^2$$

45
45
101

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x$$

3x² + 3x + 1 = 2 3x² + 3x + 1 = 2

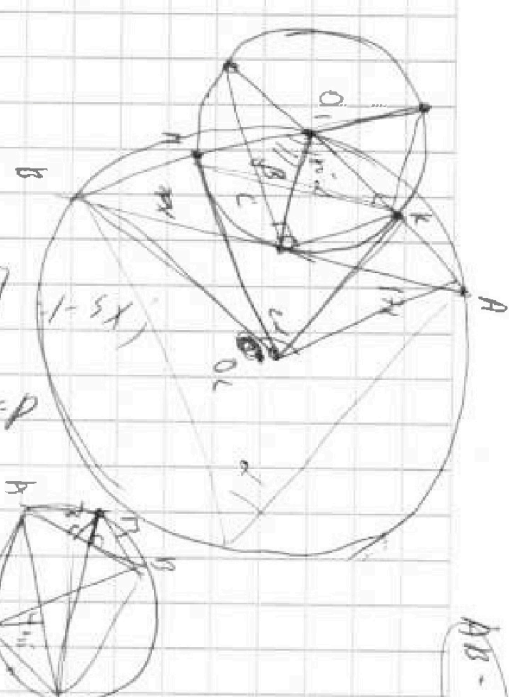
$$\sqrt{t + p} - \sqrt{t} = p$$

1 - 2√t + √t ≥ 0

p = 0

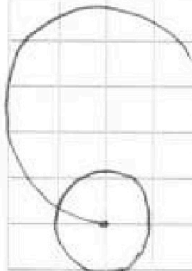
p + 2√t = 1 - p

4t = 1 - 4p + p²



AB = 2√x

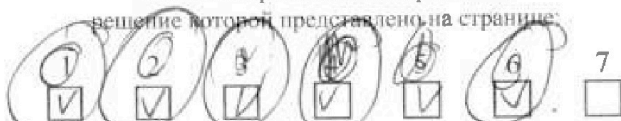
R₁ = 7
R₂ = 1/3
AB = 2√x
AB = 2√x
AB = 2√x



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице.



ЛФТИ

Если отмечены более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

Handwritten mathematical work on grid paper. The main problem involves algebraic manipulation of the expression $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} \cdot \frac{b}{b} \cdot (a+b)^2 - 9ab$. The student uses the substitution $\frac{a}{b} = k$ and derives several equations for k , including $k^2 - 7k + 1 = 0$. They find $k = 8$ and $k = 5$. The final result is $abc = 2^{21} \cdot 7^{34}$. There are also calculations for $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$ and $bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$. The work includes various algebraic steps, long division, and some scribbles.

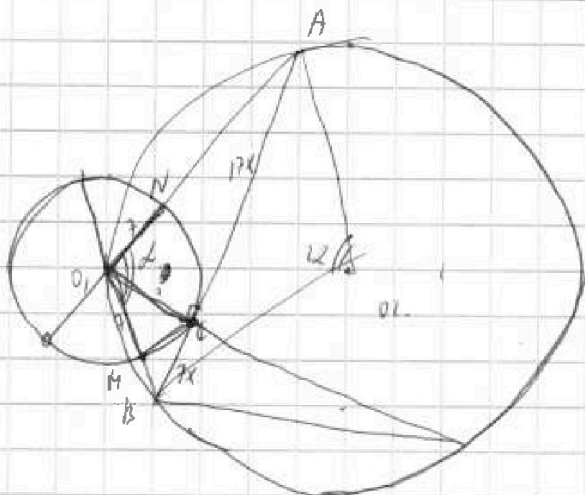
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$285x^2 + 45$$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)} = 2 \cdot 13$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \cdot 13}{24x}$$

$$\sin \alpha = \frac{13}{12x}$$

$$45 - 45x^2 = 45(1 - x^2)$$

$$O_1D = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

$$O_1A = \sqrt{285x^2 + 45}$$

$$MB \cdot (MB + 14) = 45x^2$$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)} = 2 \cdot 13$$

$$AB = 2 \cdot 26 \cdot \sin \alpha$$

$$24x = 2 \cdot 26 \cdot \sin \alpha$$

$$6x = 13 \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{6x}{13}$$

$$\cos \alpha =$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \left(\frac{6x}{13}\right)^2$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha$$

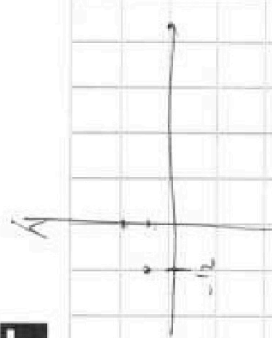
$$1 - 1 +$$

$$\sin \alpha = \frac{6x}{13}$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot (1 - \cos \alpha) = AB^2$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot \left(1 - \frac{6x}{13}\right) = AB^2$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot \frac{36x^2}{15} = AB^2$$



Handwritten notes on the right margin, including 'x/2 + x/2 = x' and other calculations.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МОТИ

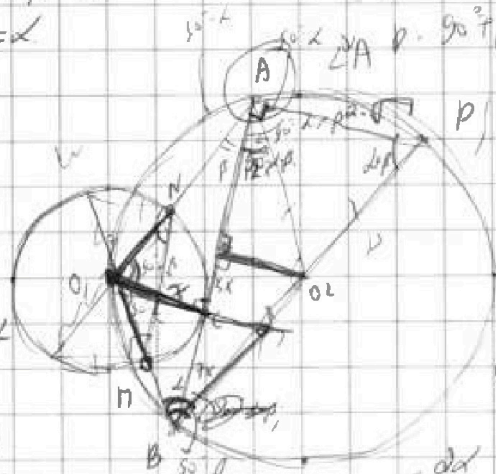
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$90^\circ - \alpha + 50^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = \alpha$$

$$90^\circ - \alpha - \beta = 50^\circ - \alpha$$



$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = 2 \cdot 13$$

$$\frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{24x}{13}$$

$$\frac{24x}{13} = \frac{12x}{13}$$

$$1 - \frac{1}{2} = 0$$

$$b = 22$$

$$b = 3$$

$$\sqrt{165 - 144x^2}$$

$$90^\circ + \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{15}{15}$$

$$\frac{171}{150}$$

$$\frac{361}{15}$$

$$\frac{3}{9 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

$$90^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \beta$$

$$\frac{1}{23} - \frac{24}{21} = \frac{24}{21} - \frac{90^\circ - \beta}{21}$$

$$22 \cdot 7 - 5 = \frac{21}{22} \cdot \frac{42}{20}$$

$$\frac{1}{21} \cdot \frac{21}{22} = \frac{21}{22}$$

$$\cos^2(90^\circ - \alpha) = \frac{12x}{13}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{12x}{13}$$

$$\sin \alpha = \frac{12x}{13} = \frac{169}{13} = 13$$

$$22 + 3 = 25$$

$$15^2 - 7 \cdot 19 = 31 \cdot 9$$

$$\frac{21}{19}$$

$$\frac{189}{210}$$

$$\frac{399}{19}$$

$$\triangle ACO_1 \sim \triangle BCO_1$$

$$9ab = \dots$$

$$9ab = \dots$$

$$b \cdot (22 + 14) = 45 \cdot 2$$

$$a = 22$$

$$b = 3$$

$$AN(AN + 20) = \dots$$

$$\frac{156}{168}$$

$$b = 3, a = 19$$

$$\frac{27}{9}$$

$$22 \cdot 22 - 7 \cdot 22 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = \dots$$

$$22$$

$$\frac{23}{2}$$

$$400 + 9 - 7 \cdot 20 \cdot 3 = \dots$$

$$\frac{13616}{17}$$

$$405 - 420 = \dots$$

$$4^2 \cdot 166 + 5^2 \cdot 20 = \dots$$

$$5 \cdot 456^2 - 46^2 \cdot 456^2 = \dots$$

$$a_{11} = \frac{26^2 \cdot 366}{2} = \dots$$

$$\frac{1}{23} - \frac{1}{3} = \frac{1}{69} - \frac{23}{69} = \frac{-22}{69}$$

$$23 \cdot 23 - 7 \cdot 23 \cdot 3 + 9 = \dots$$

$$23(23 - 21) + 9 = \dots$$

$$\frac{55}{26}$$

$$\frac{22}{26}$$

$$\frac{54}{26}$$

$$\frac{8}{26}$$

$$\frac{46}{27}$$

$$\frac{1}{93} + \frac{1}{3} + 1 = \dots$$

$$\frac{105014}{22}$$



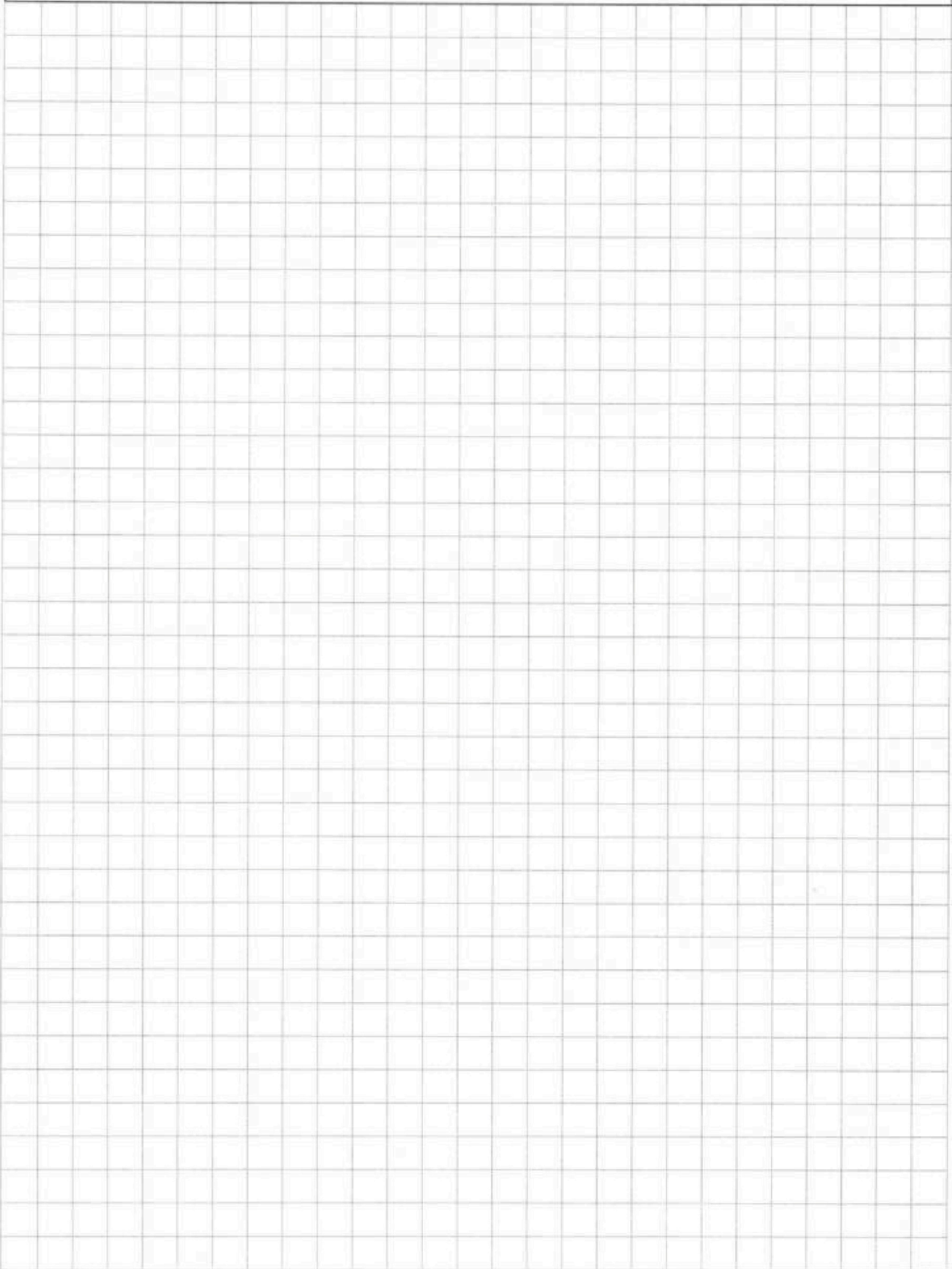
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



МФТИ

180 100 100 80 100 100

~~$ax + y - 8b = 0$~~ ①
 ~~$(x^2 + y^2 - 1)(y^2 + (y-1)^2 - 16) = 0$~~ ②

① ~~$x^2 + y^2 = 1$~~ ② ~~$x^2 + (y-1)^2 = 16$~~

$$\begin{array}{r} 152 \\ \times 16 \\ \hline 304 \\ \times 16 \\ \hline 152 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 152 \\ \times 16 \\ \hline 304 \\ \times 16 \\ \hline 152 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \sqrt{16} \\ \hline 8 \end{array}$$

$y = -4x + 8b$

$9x^2 + 64b^2 + 24bx + 4x^2 + 16ax + 4y^2 + 24ay + 192b + 16abx + 4x^2 + 16ax + 4y^2 + 24ay + 192b + 16abx + 4x^2 + 16ax + 4y^2 + 24ay + 192b + 16abx$

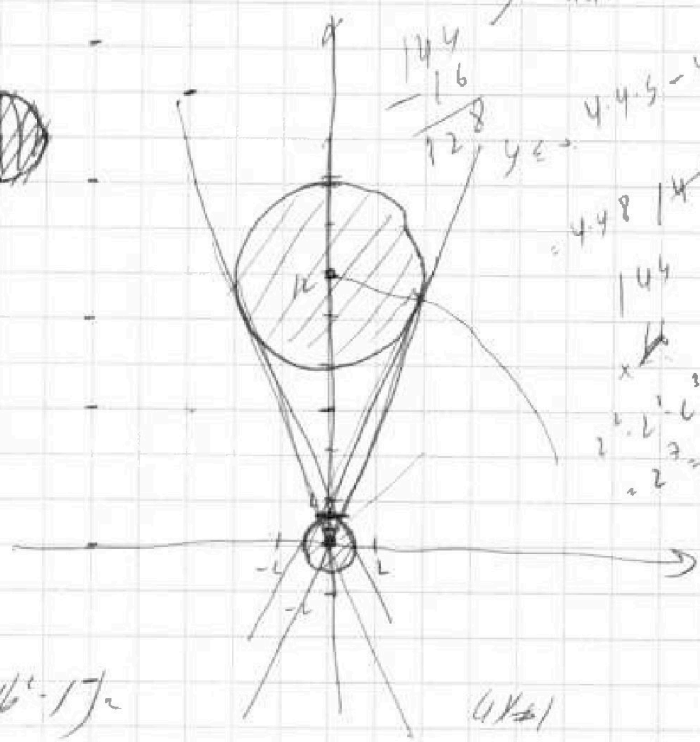
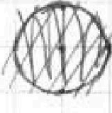
$$\begin{array}{r} 152 \\ \times 16 \\ \hline 304 \\ \times 16 \\ \hline 152 \\ \hline 256 \end{array}$$

$-x + 8b$

$$\begin{array}{r} 152 \\ \times 16 \\ \hline 304 \\ \times 16 \\ \hline 152 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 192 \\ \times 16 \\ \hline 384 \\ \times 16 \\ \hline 192 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 152 \\ \times 16 \\ \hline 304 \\ \times 16 \\ \hline 152 \\ \hline 256 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 152 \\ \times 16 \\ \hline 304 \\ \times 16 \\ \hline 152 \\ \hline 256 \end{array}$$

2 96

$8b \cdot 9x^2 = 16abx$

$$\begin{array}{r} 152 \\ \times 16 \\ \hline 304 \\ \times 16 \\ \hline 152 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$x^2 + (-4x - 1)^2 = 16$$

$$x^2 + 4^2x^2 + 24x + 144 = 16$$

$x^2(4^2 + 1) + 24x + 1$

$4^2 + 1 = 17$

$x^2 + 64b^2 - 16abx + 4^2x^2 = 1$

$x^2(4^2 + 1) + 16abx + 64b^2 = 1$

$\Delta = 0^2 - 4(4^2 + 1)(64b^2 - 1)$

80b