



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \quad (1)$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{10} \quad (1)$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \quad (3)$$

(найти  $abc(\text{mm})^2$ )

перемножим все алгебра и геометрические формулы:

$$(ab \cdot bc \cdot ac) : (2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2^{17} \cdot 7^{10} \cdot 2^{23} \cdot 7^{39})$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 : 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+10+39}$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 : 2^{55} \cdot 7^{60}$$

Квадрат  $abc$ , наименьшими звеньями  $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$  делит на  $mm^2$ ,  $km^2$ .

$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{55} \cdot 7^{60}$  Но!  $a, b, c \in \mathbb{N}$  (по усл. задачи),  $abc$  - такое число

А  $2^{55} = 2^{54} \cdot 2$  Если  $abc$  или  $ab$  или  $bc$  или  $ac$  кратны 2, то получится:

$7^{39} \cdot 2^{27} \cdot \sqrt{2}$  но  $\sqrt{2}$  - не натур. число, или можно упростить  $2^{55}$  (умножить)

таким же числом 2, так и получится самое маленькое

Получим, что можно упростить  $2^{55}$  на 2. Тогда:

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{54} \cdot 7^{60} \quad (abc > 0)$$

$$abc = 2^{27} \cdot 7^{30}$$

Проверим же и могу упростить? По условию, у нас числа кратные  
(из (1), (2), (3)) (тогда, если  $ab, bc, ac$  могут быть больше, но кратны

каким-то числу) (напрямик:  $ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$ , где  $k$  - число,  $(\in \mathbb{N})$ )

(тогда, min ширины будет такое, когда все  $k$  для равно 1.

( $k_1, k_2, k_3$ )  
(или 1, 1, 1))

Но, тогда ширины рассмотрим все уже выше. Но ~~заметим~~

это ~~еще~~ ~~или~~ ~~заметим~~ ~~или~~ ~~заметим~~

А наша  $abc$  может быть в  $mm^2$  из  $k(k_1, k_2, k_3)$

разницы не, ведь  $abc$  ~~заметим~~  
такая.

$$\text{Ответ: } abc = 2^{27} \cdot 7^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$  - несократима ( $a, b$  - взаимно простые числа).

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$  ← как можно сократить уроб?

Перепишем  $a$  (нет разности, в каком виде мне представить уроб (разверн. или обратная, все зависит от того и то не знаю).

$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b}$ , соотв;  $\frac{a^2+2ab+b^2-9ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2-9ab}{a+b}$

$= a+b - \frac{9ab}{a+b}$ ; соотв, т.к.  $\frac{ab}{a+b}$  не кратно (каждый раз (простая), но  $(a+b) \cdot 3$  соотв,  $\frac{3}{5}$  - шаг уроб (по ур)

1) рассмотрим несколько вариантов  $a=3, b=5$

соотв;  $\frac{3+5}{9-7 \cdot 5 \cdot 3+25} = \frac{8}{71}$  т.к. уроб не сокр (только если  $m=21$ )

2) пусть  $b=3, a=23$   $\frac{23}{3}$  - несократим, (32)

$\frac{26}{25^2-7 \cdot 3 \cdot 23+9} = \frac{26}{23 \cdot 2+9} = \frac{26}{55}$  (тоже не сокр) (51)

Понял, что получ. 1 и примера 2 примера, которые и в которых сократим, что получ. уроб так же не сократим (даже если это другой уроб)

Понял  $m=21$ , соотв;  $m(\max)=1$ .

но если не две цифры, то пусть  $a=7k, b=7p$

Ответ: 1. соотв;  $\frac{7(k+p)}{49k^2-7 \cdot 7k \cdot 7p+49p^2} = \frac{k+p}{7k^2-49kp+7p^2}$

ни самым же, если это  $m$  должно быть только две не знаю, но думаю, что  $m$  - много. и еще брат

какой-то чис. квадрат. пусть  $k$  и  $p$ , и тогда уроб сокр ни это квадрат. число, что  $m$  - сем. (не вар) + но уроб не сократим

3) но вернется к 3.  $(a+b)^2 \cdot 9$

Ответ: 2. соотв;  $a=4, b=5$ . пусть  $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{49}$ , соотв;  $m(\max) = 9$  (только если  $m=9$ )

Ответ: если  $m$  должно быть две не знаю (4, 6), но  $m=9$ ,  $m=9$  если  $a=4, b=5$   $(a+b)^2 = 9$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

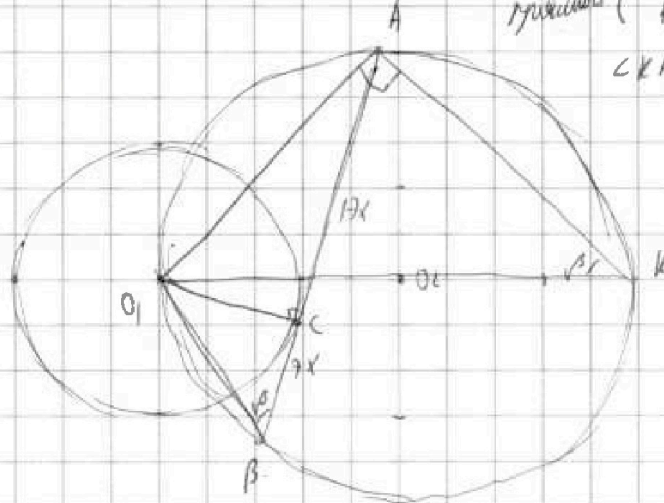
МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$O_1(w, R_1)$   
 $O_2(a, R_2)$   
 AB кас w/B/C  
 $AC = 17$  ( $AC = 17x$ )  
 $BC = 7$  ( $BC = 7x$ )  
 $R_1 = 7$   
 $R_2 = 13$   
 AB - !

Искомое:  
 $BC = 7x$



$O_1, O_2, K$  - на одной  
 прямой (A, K - диаметр,  
 $\angle KAO_1 = 90^\circ$ )

• пусть  $\angle O_1BA = \beta$ ,  $\cos \beta$ !

$\angle O_1BA = \angle O_1KA = \beta$ ,  $(90^\circ)$ ,  $(\beta)$

•  $\cos \beta$ ,  $\triangle O_1CB \sim \triangle O_1AK$  (по  $\angle$ -ам ушар)

$$\frac{BO_1}{KO_1} = \frac{O_1C}{AO_1} \quad \text{по 1-му (по гипот.)}$$

$$KO_1 = 26, \quad (= 2R_2)$$

$$O_1C = 7 = R_1 \text{ (кас. AB)}$$

$$\frac{BO_1}{26} = \frac{7}{AO_1}$$

$$AO_1 \cdot BO_1 = 7 \cdot 26$$

$\cos \beta$ , по CB-AB кас и AK (где  $BO_1$  и  $AO_1$ ):

$$\left. \begin{aligned} 49x^2 &= (BO_1 - 7) \cdot (BO_1 + 7) \\ 289x^2 &= (AO_1 - 7) \cdot (AO_1 + 7) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 49x^2 &= BO_1^2 - 49 \\ 289x^2 &= AO_1^2 - 49 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{289}{49} \cdot \frac{49x^2}{x^2} = \frac{AO_1^2 - 49}{x^2 + 1}$$

$$(x^2 + 1)AO_1 = 26x^2$$

$$x^2 = \frac{26x^2}{AO_1} - 1$$

$$\left. \begin{aligned} 49x^2 &= BO_1^2 - 49 \\ 289x^2 &= AO_1^2 - 49 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 49x^2 &= BO_1^2 - 49 \\ 289x^2 &= AO_1^2 - 49 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$49x^2 = \frac{49 \cdot 26^2}{AO_1^2} - 49$$

$$289x^2 = AO_1^2 - 49$$

•  $\cos \beta$

$$AO_1 = \frac{26x^2}{x^2 + 1}$$

$$289x^2 = \frac{26^2}{x^2 + 1} - 49$$

$$289x^4 + 289x^2 = 26^2 - 49x^2 - 49$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$x^2 = \frac{-169 \pm \sqrt{169^2 - 289 \cdot 627}}{289}$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{28} - 165}{289}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 = \frac{207 - 169}{289}$$

$$207 = 169^2 + 289 \cdot 627$$

$$y = \frac{\sqrt{169^2 + 289 \cdot 627} - 169}{17}$$

$$AB = \frac{24}{17} \cdot \sqrt{169^2 + 289 \cdot 627} - 169$$

$$\text{Ответ: } \frac{24}{17} \cdot \sqrt{169^2 + 289 \cdot 627} - 169$$

$$\frac{24}{17} \sqrt{209707} - 169$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

ОДЗ:  $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & \textcircled{1} \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & \textcircled{2} \\ 3x^2 + 3x + 1 = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$   $\textcircled{3}$   $\frac{3x+1}{2 \cdot 3} = 0$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x + 1 = -9x + 1 \quad | : (1-9x) \text{ умнож}$$

пусть  $\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = t & t \geq 0, p \geq 0 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = p \end{cases}$   $\textcircled{3}$   $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$$t - p = t^2 - p^2 \quad ; \quad t - p = (t - p)(t + p)$$

$$(t - p)(t + p - 1) = 0$$

$\textcircled{1} \quad t - p = 0$   
 $t = p$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

возводим в квадраты ( $6x \geq 0$ )

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 = 9x$$

$$x = \frac{1}{9}$$

(проверим ОДЗ)

$\textcircled{2} \quad t + p = 1$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

возведем в квадраты (левая часть  $\geq 0$ )

$$3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$6x^2 - 3x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = -6x^2 + 3x - 2$$

умнож:  $6x^2 - 3x + 2 \leq 0 \quad \begin{cases} -6x^2 + 3x - 2 \geq 0 \\ 6x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$

но:  $6x^2 - 3x + 2 = 0$

$$D = 9 - 12 \cdot 4 < 0 \quad \text{умнож}$$

$$6x^2 - 3x + 2 > 0 \quad (\text{всегда})$$

умнож:  $\textcircled{2} \quad \emptyset$  (корней нет)

Ответ:  $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O(0,0)$ ,  $P(-13,26)$ ,  $Q(3,26)$ ,  $R(16,0)$

$A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$   $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$\tau A, B \in \text{паралл}$

$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$  *состав*  
 $2(x_2 - x_1) = 14$  *состав*

увели коэффициентов

1) ищем, что еще

$x_2 - x_1 = 7$  *состав*

$y_2 - y_1 = 14$  *состав*

$x_2 = 7$ ,  $y_2 = -14$  *состав*

состав: если

$x_1 = x_2 = 0$ , *состав*

$y_2 - y_1 = 14$  *состав*

мин  $y_1 = 0$  *состав*

$y_2 = 14$  *состав*

состав: если

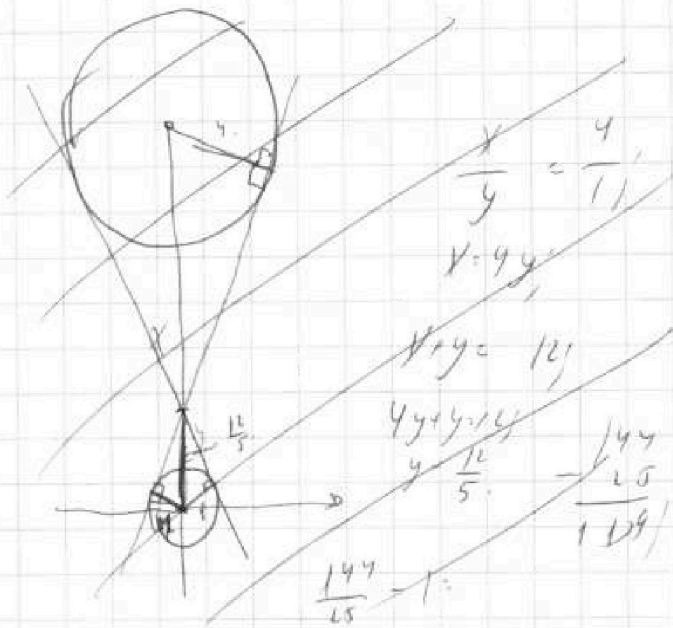
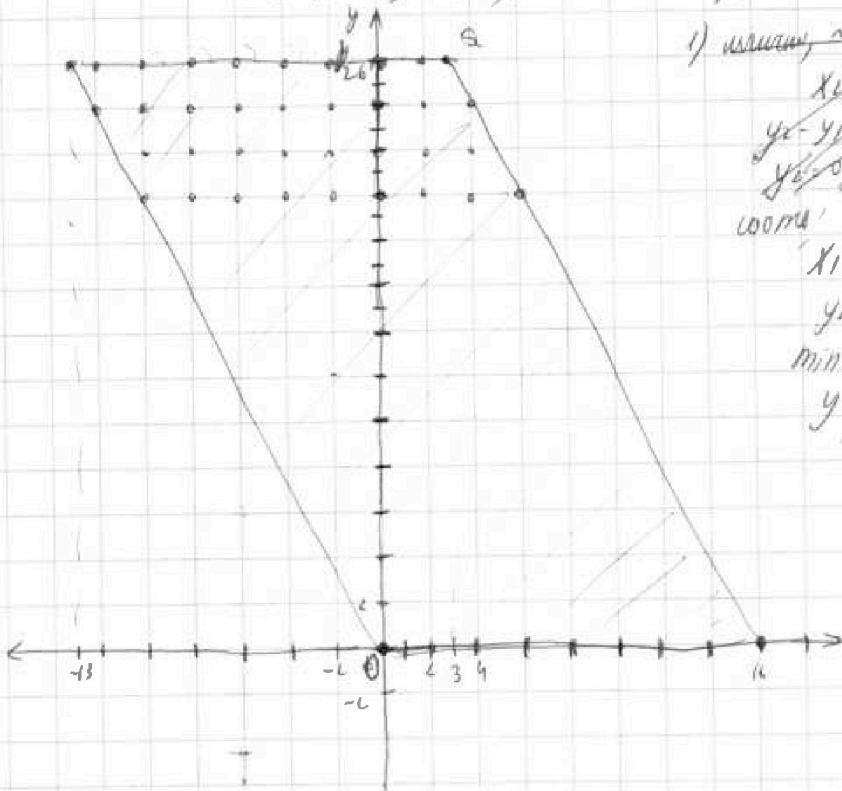
попробуем  $y_2$

$y_2 = 26$  *состав*

состав:

в 1-ой

$x \text{ бер } = 13$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④

$$x^2 + (8b + ax + 12)^2 = 16$$

$$x^2 + (64b^2 + 8abx + 96b + 8abx + a^2x^2 + 12ax + 96b + 12ax + 144) = 16$$

$$x^2 + x^2(a^2 + 1) + 16abx + 64b^2 + 192b + 24ax + 12a = 0$$

$$y'(a^2 + 1) + x(16ab + 24a) + 64b^2 + 192b + 12a = 0$$

$$D = 8a(8ab + 12a)$$

$$D = (16ab + 24a)^2$$

$$D_1 = (8ab + 12a)^2 - (a^2 + 1)(64b^2 + 192b + 12a) = 0$$

$$(8ab + 12a)^2 = (a^2 + 1)(64b^2 + 192b + 12a)$$

$$a^2(8b + 12)^2 = (a^2 + 1)(64b^2 + 192b + 12a) \quad \text{так как } a^2 = 1 - 64b^2$$

$$a^2(2b + 3)^2 = (a^2 + 1)16(4b^2 + 12b + 3)$$

$$a^2(2b + 3)^2 = (a^2 + 1)(4b^2 + 12b + 3)$$

$$a^2(4b^2 + 12b + 9) = (a^2 + 1)(4b^2 + 12b + 3)$$

$$a^2(4b^2 + 12b + 9) + a^2 = a^2(4b^2 + 12b + 3) + 4b^2 + 12b + 3$$

$$a^2 = 4b^2 + 12b + 3$$

$$1 - 64b^2 = 4b^2 + 12b + 3$$

$$68b^2 + 12b + 2 = 0$$

$$D =$$

пусть:

$$\begin{cases} y^2 + (8b - ax)^2 = 1 \\ x^2 + (8b - ax - 12)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a^2 = 64b^2 \\ a^2 = 4b^2 - 12b + 8 \\ a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases}$$

(из первой решим тут, вторую из нее)

$$64b^2 - 1 = 4b^2 - 12b + 8$$

$$60b^2 + 12b - 9 = 0$$

$$D = 36 + 960 = 6616 = 6^2 \cdot 4^2$$

$$b_{1,2} = \frac{-6 \pm 24}{60}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = \frac{3}{10}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad a_1^2 = \frac{64 \cdot 1}{4} - 1 = 15$$

$$a^2 = 15, \quad a = \pm \sqrt{15}$$

$$b_2 = \frac{3}{10}, \quad a_2^2 = \frac{64 \cdot 9}{100} - 1 = \frac{16 \cdot 9}{25} - 1 = \frac{71}{25}, \quad a = \pm \sqrt{\frac{71}{25}}, \quad \text{Ответ } a = \pm \sqrt{15}, \quad a = \pm \frac{\sqrt{71}}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



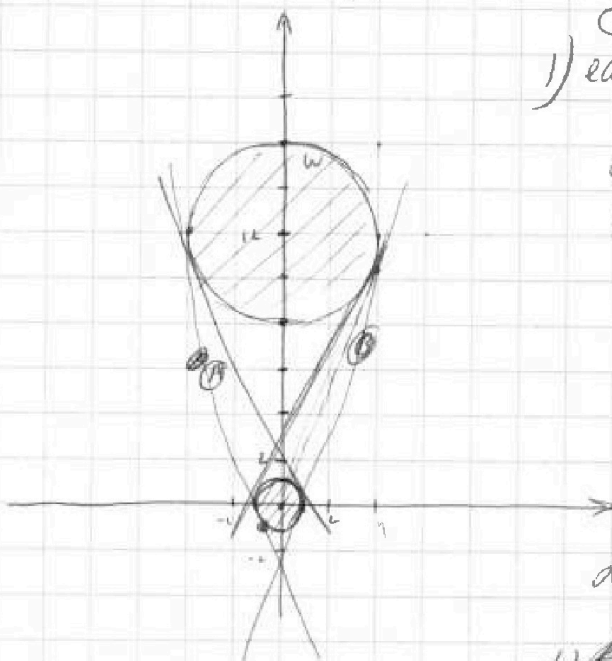
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+by \\ a(x+y-8b)=0 \quad (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y+1)^2-16)=0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\textcircled{1}: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y+1)^2=16 \end{cases} \text{ две окр.}$$

или попарно зипр - оба.



1) если  $b=0$  то:

$y = -ax$   
 100% min ширины - кас. к окр. w  
 100% min

$$x^2 + (-ax-1)^2 = 16$$

$$x^2 + a^2x^2 + 24ax + 12 = 16$$

$$x^2(a^2+1) + 24ax + 4 = 0$$

$$D = 0 \text{ (одно реш.)}$$

$$D: 12a^2 - 4 \cdot 4 \cdot 8(a^2+1) = 0$$

$$12a^2 = 128$$

$$12a^2 = 4 \cdot 4 \cdot 8(a^2+1)$$

$$448a^2 = 448(a^2+1)$$

$$a^2 = 2, a = \pm 2\sqrt{2} \text{ но}$$

это вариант позадвиг минимум решения

4 если

2) су. бцр, кас. кас. позадвиг  $-a, 8$  - кас. к 2 окр. сразу (прямая  $\textcircled{1}$   $\textcircled{2}$ )  
 или (прямая) кас. кас. силь внешне кас. окр.

$$\begin{cases} x^2 + (8b-ax)^2 = 1 \quad (1) \\ x^2 + (-8b-ax-1)^2 = 16 \quad (2) \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2 + 64b^2 + 16axb + a^2x^2 = 1 \\ x^2(a^2+1) + 16axb + 64b^2 - 1 = 0 \\ D=0, D_1=64 \end{cases}$$

$$D_1 = 64a^2b^2 - (a^2+1)(64b^2-1) = 0$$

$$64a^2b^2 - 64a^2b^2 - a^2 - 64b^2 + 1 = 0$$

$$a^2 + 64b^2 = 1, (1)$$

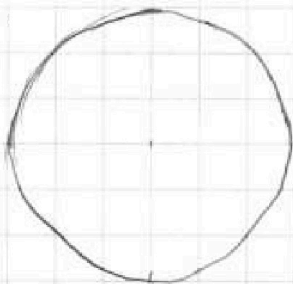
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ 10140 \\ 16900 \\ \hline 28561 \\ + 81143 \\ \hline 209704 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \sqrt{627} \\ \hline 1963 \\ 5780 \\ 173400 \\ \hline 181193 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 11 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 1820 \\ \hline 20475 \end{array}$$

0010

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 1820 \\ \hline 20475 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 48 \\ \hline 53 \end{array}$$

+14

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 16 \\ \hline 17 \end{array}$$

200000  
360000  
500  
400  
250000

$$\begin{array}{r} 8 \\ + 54 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 30 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ - 1 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 84 \\ - 7 \\ \hline 57 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ 40 \end{array}$$

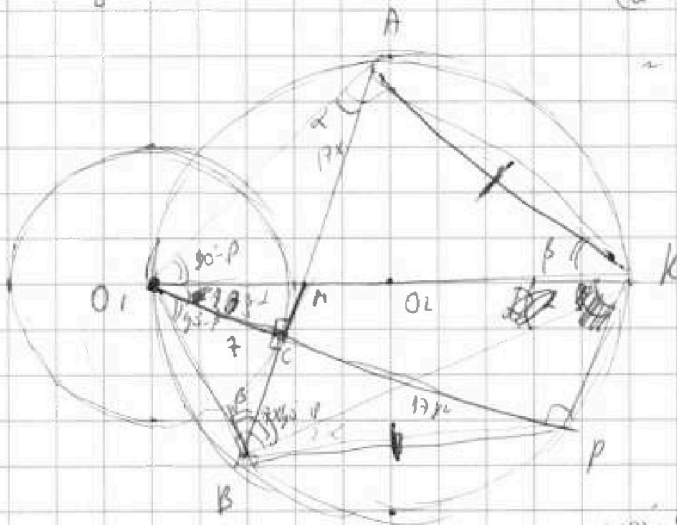
$$\begin{array}{r} 54 \\ + 8 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 7 \\ \hline 33 \end{array}$$

8

$$(26-7)(26+7) =$$

27



$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 19 \\ \hline 297 \\ 594 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 115 \\ \hline 21 \\ 13 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$13^4 + 17^4 = (26^2 - 7^2)$$

$$90^\circ - \beta + \alpha$$

$$120^\circ - 90^\circ - 90^\circ + \beta + \alpha$$

$$\angle \alpha = \frac{7}{17}$$

$\beta = 1$

$$43 \alpha^2 = BO_1$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 49 \\ \hline 258 \\ 3 \\ \hline 142 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\triangle CBO_1 \sim \triangle AKO_1$$

$$\frac{CB}{AK} = \frac{BO_1}{KO_1} = \frac{CO_1}{AO_1}$$

$$\frac{7x}{AK} = \frac{BO_1}{26} = \frac{7}{AO_1}$$

$$AO_1 \cdot BO_1 = 7 \cdot 26$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 49 \\ \hline 358 \end{array}$$

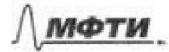
$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 2x + y &= 14 \\
 y &= 14 - 2x
 \end{aligned}$$

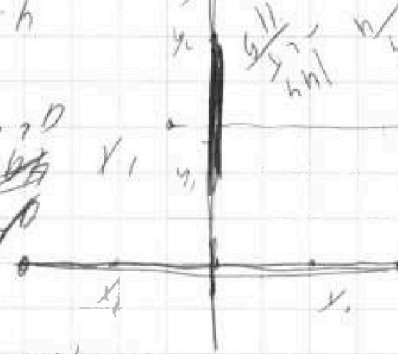
$$2x + y = 14$$

$$y = 14 - 2x$$

$$2x + y = 6$$

$$2x + y = 14$$

$$2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 14$$



$$\begin{aligned}
 &= 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 + (14 - 2x_1) + (14 - 2x_2) \\
 &= 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 + 28 - 2x_1 - 2x_2 \\
 &= y_1 + y_2 + 28
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 + (14 - 2x_1) + (14 - 2x_2) \\
 &= 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 + 28 - 2x_1 - 2x_2 \\
 &= y_1 + y_2 + 28
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 + (14 - 2x_1) + (14 - 2x_2) \\
 &= 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 + 28 - 2x_1 - 2x_2 \\
 &= y_1 + y_2 + 28
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 + (14 - 2x_1) + (14 - 2x_2) \\
 &= 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 + 28 - 2x_1 - 2x_2 \\
 &= y_1 + y_2 + 28
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2-6x+2+9x-1} = 1-9x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2-6x+2} = 1-9x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1$$

$$3x^2+3x+1 - 3x^2+6x-2$$

$$-9x-1$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} = t$$

$$\sqrt{3x^2+3x+1} = p$$

$$a(y_1-x_1) + (y_1-y_1) = k$$

$$2x_1+y_1 = k$$

$$2x_1+y_1 = 14-k$$

$$p = t^2 - p^2$$

$$t - t^2 + p^2 - p = (t-p)(t+p)$$

$$(t-p)(t+p-1) = 0$$

$$t-p$$

$$t+p-1$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} = 3x^2+2x$$

$$3x^2-6x+2 = 3x^2+2x$$

$$-9x+2 = 0$$

$$x = -\frac{2}{9}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 = 1$$

$$6x^2-3x+2 = 0$$

$$6x^2-3x+2 \leq 0$$

$$4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) = (3x^2-3x+2)^2$$

$$4(9x^4+9x^3+3x^2-18x^3-18x^2+2) = 9x^4-18x^3+9x^2+4$$

$$4(9x^4-9x^3-9x^2+2) = 9x^4-18x^3+9x^2+4$$

$$4(9x^4-9x^3-9x^2+2) = 9x^4-18x^3+9x^2+4$$

$$36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 8 = 9x^4 - 18x^3 + 9x^2 + 4$$

$$27x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 4 = 0$$

$$x = 36 + 4 \cdot 69 = 312$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{312}}{69}$$

9-11-3

$$6 = 2\sqrt{78}$$

Handwritten notes and calculations on the left side of the page, including a small graph and various numerical steps.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



46  
+ 25  
51

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

3x<sup>2</sup> - 6x + 1 = 2      D = 9 - 12 = -3  
D = 9 - 6 = 3

23  
x

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 - 9x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

3x<sup>2</sup> + 3x + 1 = 4      1 - 9x = p

$$\sqrt{t - p} - \sqrt{t} = p$$

t - p > 0

31  
+ 33  
501

43  
+ 17  
501

501  
45  
45

$$\sqrt{t - p} - \sqrt{t} = p$$

$$t - p + t = 2\sqrt{t} \sqrt{t - p} - p^2$$

$$\sqrt{t + p} - \sqrt{t} = p$$

p > 0

34 - 105

15  
x 2  
101

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{t + p} - \sqrt{t} = p$$

$$\sqrt{t + p} = p + \sqrt{t}$$

$$t + p = p^2 + 2p\sqrt{t} + t$$

$$p^2 + 2p\sqrt{t} - p^2 = 0$$

$$p(p + 2\sqrt{t} - p) = 0$$

p = 0

45  
+ 5  
51

$$\sqrt{t + p} - \sqrt{t} = p$$

$$\sqrt{t + p} = p + \sqrt{t}$$

$$t + p = p^2 + 2p\sqrt{t} + t$$

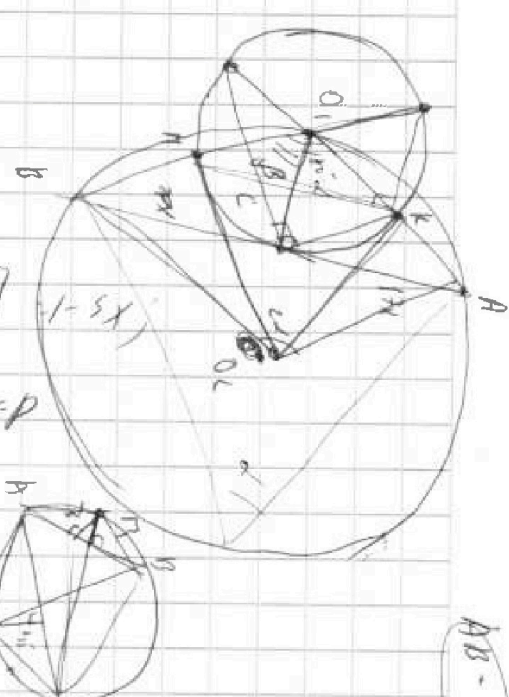
$$p^2 + 2p\sqrt{t} - p^2 = 0$$

$$p(p + 2\sqrt{t} - p) = 0$$

p = 1 - 2\sqrt{t}

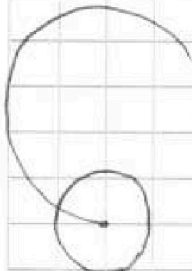
$$p + 2\sqrt{t} = 1 - p$$

$$4\sqrt{t} = 1 - 2p$$



AB = 2\sqrt{x}

R1 = 7  
R2 = 1/3  
AB = 2\sqrt{x}

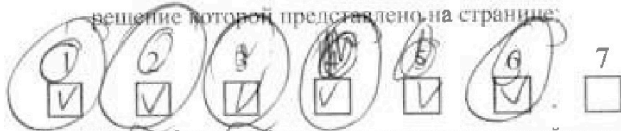




На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице.



ЛФТИ

Если отмечены более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

Handwritten mathematical work on grid paper. The main problem involves solving for variables a, b, and c based on given equations and their products.

Initial equations and manipulations:

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} \cdot \frac{b}{b} = \frac{(a+b)^2 - 9ab}{b}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{a^2 - 7ab + b^2}{b}$$

Substitution  $\frac{a}{b} = k$  leads to:

$$k^2 - 7k + 1 = 0$$

Solving the quadratic equation for k:

$$k = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}$$

Using the positive root  $k = \frac{7 + \sqrt{45}}{2}$ , the variables are determined:

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{35}$$

The product of all three equations is:

$$abc \cdot abc \cdot abc = 2^{55} \cdot 7^{64}$$

Therefore, the final result is:

$$abc = 2^{18} \cdot 7^{21}$$

Additional calculations and notes include:

- $abc = 2^{18} \cdot 7^{21}$  (circled)
- $abc = 2^{18} \cdot 7^{21}$  (circled)
- Final result:  $abc = 2^{18} \cdot 7^{21}$

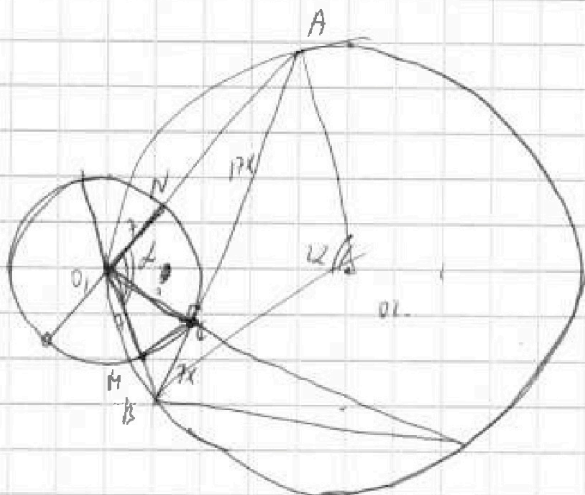
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$285x^2 + 45$$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)} = 2 \cdot 13$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \cdot 13}{24x}$$

$$\sin \alpha = \frac{13}{12x}$$

$$45 - 45x^2 = 45(1 - x^2)$$

$$O_1D = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

$$O_1A = \sqrt{285x^2 + 45}$$

$$MB \cdot (MB + 14) = 45x^2$$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)} = 2 \cdot 13$$

$$AB = 2 \cdot 26 \cdot \sin \alpha$$

$$24x = 2 \cdot 26 \cdot \sin \alpha$$

$$6x = 13 \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{6x}{13}$$

$$\cos \alpha =$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \left(\frac{6x}{13}\right)^2$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha$$

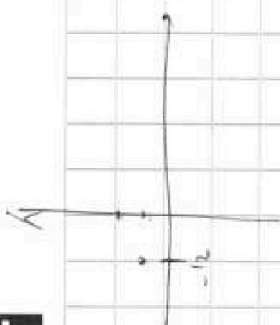
$$1 - 1 +$$

$$\sin \alpha = \frac{6x}{13}$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot (1 - \cos \alpha) = AB^2$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot \left(1 - \frac{6x}{13}\right) = AB^2$$

$$2 \cdot 13^2 \cdot \frac{36x^2}{15} = AB^2$$



Handwritten notes on the right margin, including 'x/2 + x/2 = x' and other calculations.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



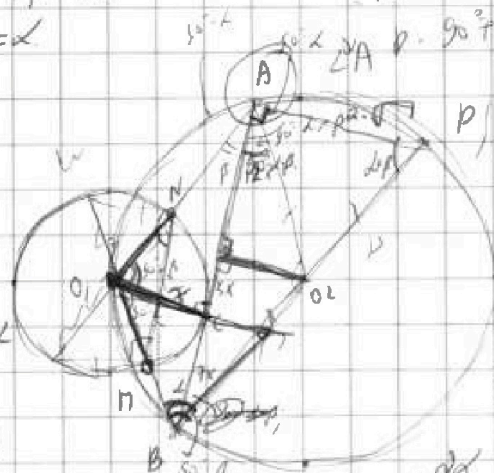
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$90^\circ - \alpha + 50^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = \alpha$$

$$90^\circ - \alpha - \beta = 50^\circ - \alpha$$



$$\frac{AB}{\sin(100^\circ - \alpha)} = 2 \cdot 13$$

$$\sin(100^\circ - \alpha)$$

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$\frac{24x}{113} = \frac{12x}{13}$$

$$1 - 9 \frac{1}{2} = 0$$

$$b = 22$$

$$b = 3$$

$$\sqrt{165 - 144x^2}$$

$$90^\circ + \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{15}{15}$$

$$\frac{171}{150}$$

$$\frac{361}{361}$$

$$15^2 - 719 \cdot 3 + 9$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{12x}{13}$$

$$\sin \alpha = \frac{12x}{13} = \frac{168}{13} = \frac{12 \cdot 14}{13}$$

$$22 + 3 = 25$$

$$\frac{189}{210} = \frac{399}{399}$$

$$b \cdot n \cdot (2n + 1) = 45n^2$$

$$a = 22$$

$$b = 3$$

$$AN(AN + 2b) = 48$$

$$b = 3, a = 19$$

$$\frac{21}{54} = \frac{7}{18}$$

$$2d \cdot 2d - 7 \cdot d \cdot 5 + 3 \cdot 5 =$$

$$22$$

$$\frac{23}{22}$$

$$400 + 9 - 7 \cdot 20 = 3$$

$$\frac{13616}{17}$$

$$405 - 40 =$$

$$4^2 \cdot 166 + 5^2 \cdot 20$$

$$5 \cdot 456^2 - 46^2 \cdot 456^2$$

$$a_{11} = \frac{76^2 \cdot 366}{2}$$

$$2d \cdot (2d - 21) + 9 =$$

$$25$$

$$31$$

$$\frac{23}{31}$$

$$4^2 \cdot 166 + 5^2 \cdot 20$$

$$5 \cdot 456^2 - 46^2 \cdot 456^2$$

$$a_{11} = \frac{76^2 \cdot 366}{2}$$

$$2d + 9 = 2 \cdot 31$$

$$\frac{9}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 =$$

$$\frac{1}{93} + \frac{1}{3} = \frac{1 + 31}{93} = \frac{32}{93}$$

$$\frac{105014}{22}$$

$$\frac{55}{26} = \frac{22}{26} = \frac{11}{13}$$

$$\frac{46}{27}$$



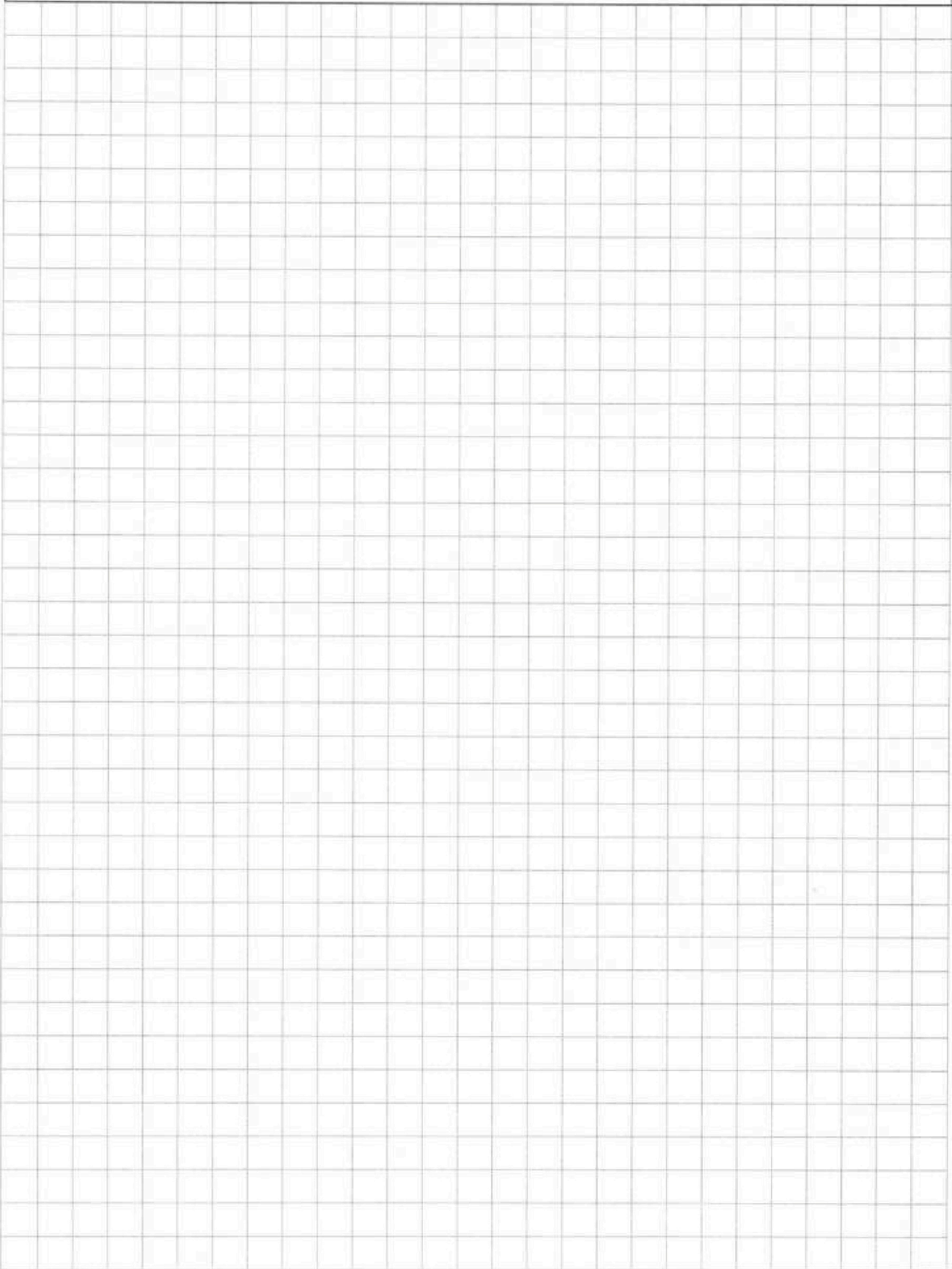
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



МФТИ

180 100 100 80 100 100

2 96

~~$ax + y - 8b = 0$~~  ①  
 ~~$(x^2 + y^2 - 1)(y^2 + (y-1)^2 - 16) = 0$~~  ②

①  $x^2 + y^2 = 1$   
 ②  $x^2 + (y-1)^2 = 16$

$152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$

$152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$

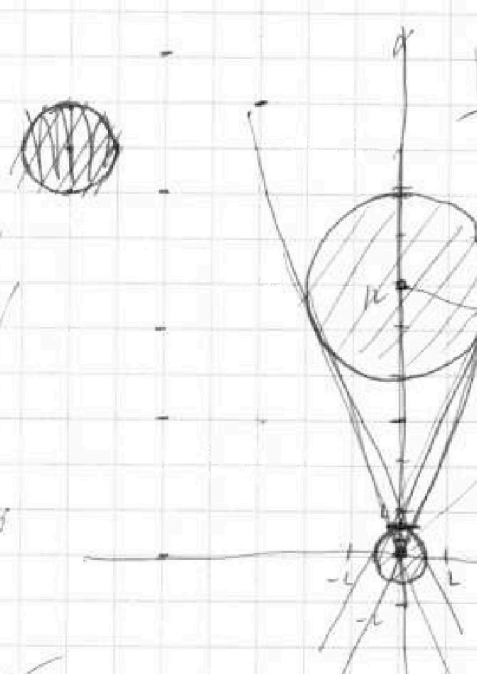
$152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$

$152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$

$152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$

$152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$   
 $152 \mid 16$

$9x^2 + 64y^2 + 24yx + 192b + 16abx + 4x^2 + 16ax + 96b^2 + 120by + 9 = 0$   
 $13x^2 + 16ax + 96b^2 + 120by + 192b + 16abx = 0$   
 $13x^2 + (16a + 16ab)x + 96b^2 + 120by + 192b = 0$   
 $13x^2 + 16a(1+b)x + 96b^2 + 120by + 192b = 0$   
 $13x^2 + 16a(1+b)x + 96b^2 + 120by + 192b = 0$



$x^2 + (-4x + 8b)^2 = 16$   
 $x^2 + 16x^2 - 64bx + 64b^2 = 16$   
 $17x^2 - 64bx + 64b^2 - 16 = 0$

$x^2 + 64b^2 - 16abx + 4x^2 = 1$   
 $x^2(4b^2 + 1) + 16abx + 64b^2 - 1 = 0$   
 $\Delta = 256a^2b^2 - (4b^2 + 1)(64b^2 - 1)$

$8ab$

$9x^2 + 64y^2 + 24yx + 192b + 16abx + 4x^2 + 16ax + 96b^2 + 120by + 9 = 0$   
 $13x^2 + 16ax + 96b^2 + 120by + 192b + 16abx = 0$   
 $13x^2 + (16a + 16ab)x + 96b^2 + 120by + 192b = 0$   
 $13x^2 + 16a(1+b)x + 96b^2 + 120by + 192b = 0$

$13x^2 + 16a(1+b)x + 96b^2 + 120by + 192b = 0$   
 $13x^2 + 16a(1+b)x + 96b^2 + 120by + 192b = 0$   
 $13x^2 + 16a(1+b)x + 96b^2 + 120by + 192b = 0$

$13x^2 + 16a(1+b)x + 96b^2 + 120by + 192b = 0$   
 $13x^2 + 16a(1+b)x + 96b^2 + 120by + 192b = 0$   
 $13x^2 + 16a(1+b)x + 96b^2 + 120by + 192b = 0$