



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot d$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot$$

$$\cdot n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot d \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc = \sqrt{m \cdot n \cdot d \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}} =$$

$$= \sqrt{m \cdot n \cdot d \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}}$$

Наименьшее возможное значение

при  $m \cdot n \cdot d = 1$  ( $m=1, n=1, d=1$ ).

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}} = \sqrt{(7^{32})^2 \cdot (2^{25})^2 \cdot 2} = 2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2}.$$

Ответ:  $2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$  - несократимая дробь. Будем считать, что  $a > b$ .

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a \cdot \frac{a}{b} + b \cdot \frac{a}{b}}{a^2 \cdot \frac{a}{b} - 6ab \cdot \frac{a}{b} + b^2 \cdot \frac{a}{b}} = \frac{a \left( \frac{a}{b} + 1 \right)}{a \left( \frac{a^2}{b} - 6a + \frac{a}{b} \right)} \Rightarrow$$

$$m_{\text{наиб}} = a.$$

Ответ: a.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

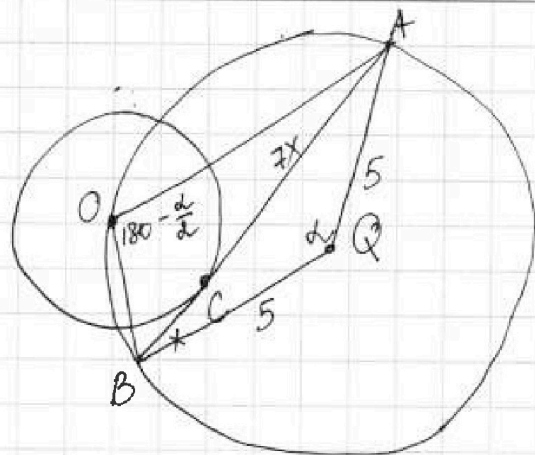
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поиск QR-кода недопустим!



$$r=1, R=5, \frac{AC}{CB}=7$$

Пусть  $AC=7x$ ,  $BC=x$ ,  
 $\angle BQA = \alpha$ , тогда  $AB=8x$ ,  
 $\angle BOA = \frac{360-\alpha}{2} = 180 - \frac{\alpha}{2}$

$\triangle BOA$  вписан в окр.  $(Q; R)$

$\triangle BOA$ : по теореме синусов:  $\frac{AB}{\sin(180-\frac{\alpha}{2})} = 2R$ , где  $AB=8x$

$$\sin(180-\frac{\alpha}{2}) = \frac{AB}{2R}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{8x}{2 \cdot 5} = \frac{4}{5}x$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}x^2} = \frac{3}{5}x$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \Rightarrow \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{9}{25}x^2 - 1 = \frac{18}{25}x^2 - 1$$

Теорема косинусов для  $\triangle BQA$ :

$$AB^2 = BQ^2 + QA^2 - 2 \cdot BQ \cdot QA \cdot \cos \alpha$$

$$64x^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \left(\frac{18}{25}x^2 - 1\right)$$

$$64x^2 = 50 - 50 \cdot \frac{18}{25}x^2 + 50$$

$$64x^2 = 100 - 36x^2$$

$$64x^2 + 36x^2 = 100$$

$$100x^2 = 100$$

$$x=1 \Rightarrow \underline{AB=8x=8}$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

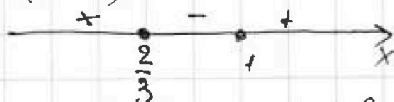
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печата QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$D3: \quad 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \Rightarrow (2x - 3)(x - 1) \geq 0$$

$2x^2 + 2x + 1$  всегда  $> 0$ , т.к.

$$D < 0$$



$$\frac{2}{3} \leq x \leq 1 \quad \frac{2}{3} > x > 1$$

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = (2 - 7x) \cdot$$

$$\cdot (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2 - 7x = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1) = 0$$

$$\left[ x = \frac{2}{7} \right] - \text{попадает в область допустимых значений. } \frac{2}{7} < \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \quad (2)$$

$$(2) \quad 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -(4x^2 - 3x + 3)$$

$$4x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 9 - 36 < 0 \Rightarrow \text{выражение } (4x^2 - 3x + 3) > 0 \Rightarrow$$

$$-(4x^2 - 3x + 3) < 0$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 0 \Rightarrow \text{уравнение (2) не}$$

имеет решений.

$$\text{Ответ: } \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

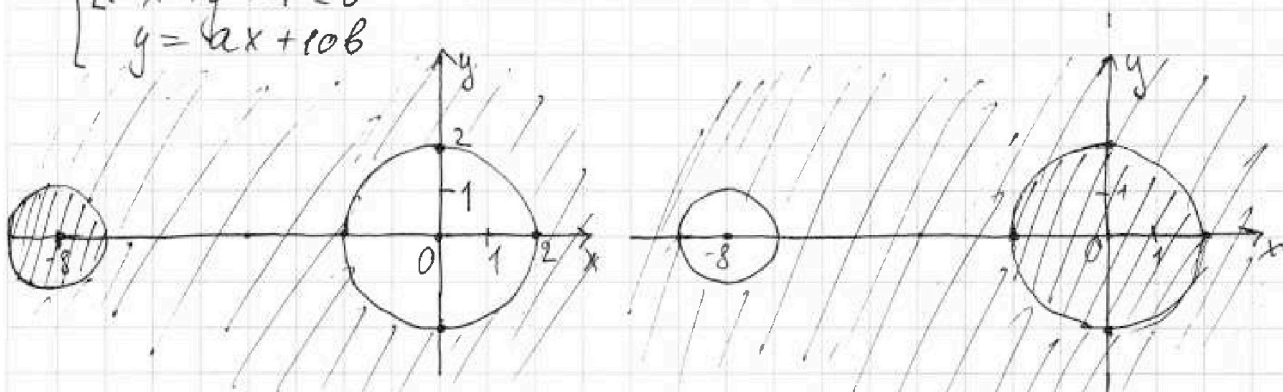
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ax + 10b, & \text{- граф. функция} \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

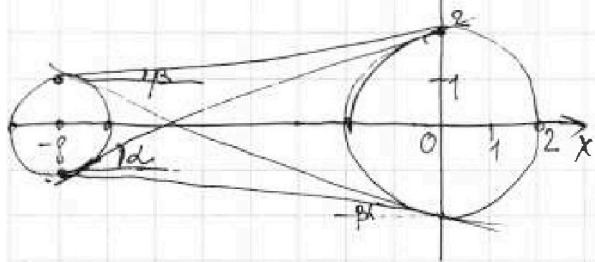
$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 & \text{- } (x+8)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \text{окр. с центром } (-8; 0), R=1. \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \text{окр. с центром } (0; 0), R=2.$$



Система будет иметь решения, только если

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 - 4 = 0.$$



Тогда график функции  $y = ax + 10b$ , должен касаться 2-ух окружностей внутренним и внешним способами, так что  $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{3}{8}$ ,

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{1}{8} \Rightarrow a = \pm \frac{3}{8}, \quad a = \pm \frac{1}{8}.$$

Ответ:  $\pm \frac{3}{8}, \pm \frac{1}{8}$ .



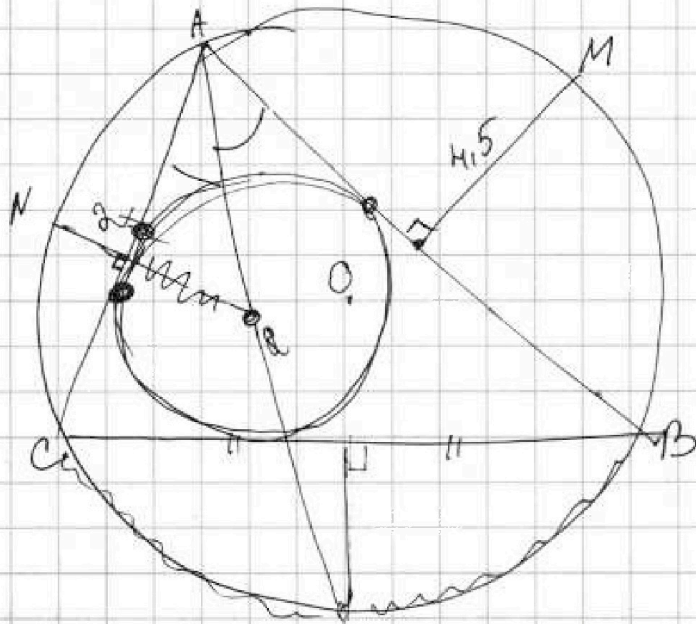
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax - y + 10b = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = ax + 10b, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{array} \right.$$

Система уравн. будет  
иметь 2 реш., при

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{и}$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Чтобы система имела 2

реш. касат. к прямой  $y = ax + 10b$

должна касаться окружностей внеш. и внутр. способами.

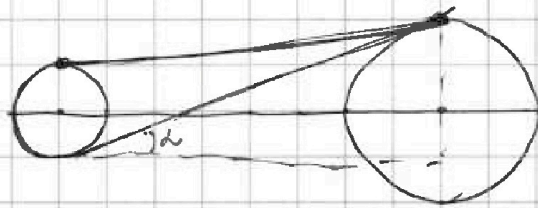
$$y = ax + 10b, \quad a = \operatorname{tg} \alpha$$

$$y = ax + 10b$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\alpha = \pm \frac{3}{8}, \quad \alpha = \pm \frac{1}{8}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{3}{8}, \quad \pm \frac{1}{8}.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$a+b : m, \quad a^2-6ab+b^2 : m$$

$$a^2-6ab+b^2 = a^2-4ab+b^2-2ab = (a-b)^2 - 2ab$$

$$\parallel$$
$$a^2+2ab+b^2-8ab = (a+b)^2 - 8ab$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} = \frac{a \cdot \frac{a}{b} + b \cdot \frac{a}{b}}{a^2 \cdot \frac{a}{b} - 8ab \cdot \frac{a}{b} + b^2 \cdot \frac{a}{b}} = \frac{\frac{a^2}{b} + a}{\frac{a^3}{b} - 8a^2 + ab}$$

$$= \frac{a \left( \frac{a}{b} + 1 \right)}{a \left( \frac{a^2}{b} - 8a + b \right)} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a^2}{b} - 8a + b}$$

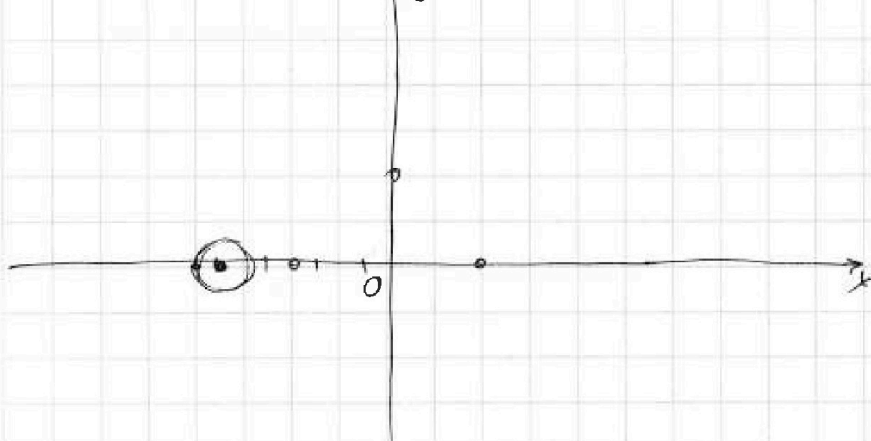
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a \cdot \frac{a}{b} + b \cdot \frac{a}{b}}{a^2 \cdot \frac{a}{b} - 6ab \cdot \frac{a}{b} + b^2 \cdot \frac{a}{b}} =$$

т.к. дробь  $\frac{a}{b}$  несократима. Будем считать, что  $a > b$ .

$$= \frac{\frac{a^2}{b} + a}{\frac{a^3}{b} - 6a^2 + ab} = \frac{a \left( \frac{a}{b} + 1 \right)}{a \left( \frac{a^2}{b} - 6a + b \right)} \quad \text{и тогда} \Rightarrow \frac{m=a}{\text{наиб}}$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+8)^2 + y^2 - 1 \\ (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\text{OP 3: } 2x^2-5x+3 > 0$$

$$2x^2-5x+3=0 = (2x-3)(x-1)$$

$$D=25-2 \cdot 4 \cdot 3 = 1$$

$$(2x-3)(x-1) > 0$$

$$x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$$



$$x \leq \frac{3}{2}, \quad x \geq 1$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1 - 2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)^2$$

$$-2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)(1-7x)$$

$$(2-7x)(1-7x) \leq 0$$

$$x = \frac{2}{7}, \quad x = \frac{1}{7}$$



$$\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{2}{7}$$

$$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^2 - 10x^3 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 =$$

$$4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^2 - 10x^3 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 =$$

$$4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 = 0$$

$$x=1: 4-6-2+1+3 = 4-4=0$$

$$4x^4 - 4x^3 - 2x^3 + 2x^2 - 4x^2 + 4x - 3x + 3 = 0$$

$$4x^3(x-1) - 2x^3(x-1) - 4x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

$$(x-1)(4x^3 - 2x^3 - 4x - 3) = 0$$

$$4x^3 - 2x^3 - 4x - 3 = 0$$

$$x=2: 32 - 8 - 8 - 3 \neq 0$$

$$x=7: 49 - 2 - 28 - 3 \neq 0$$

$$x=-1: -4 - 2 + 4 - 3 \neq 0$$

$$2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)(1-7x)$$

$$4(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = (2-7x)^2(1-7x)^2$$

$$\left( \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} \right) \left( \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \right) =$$

$$= 2-7x \left( \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \right)$$

$$\left( 2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1 \right) = 2-7x \left( \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \right)$$

$$2-7x = 2-7x \left( \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \right)$$

$$(2-7x) \left( \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \right) = 0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} - 1 = 0 \quad (2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2)  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 3x - 4x^2 - 3$$

$$-4x^2 + 3x - 3 = 0$$

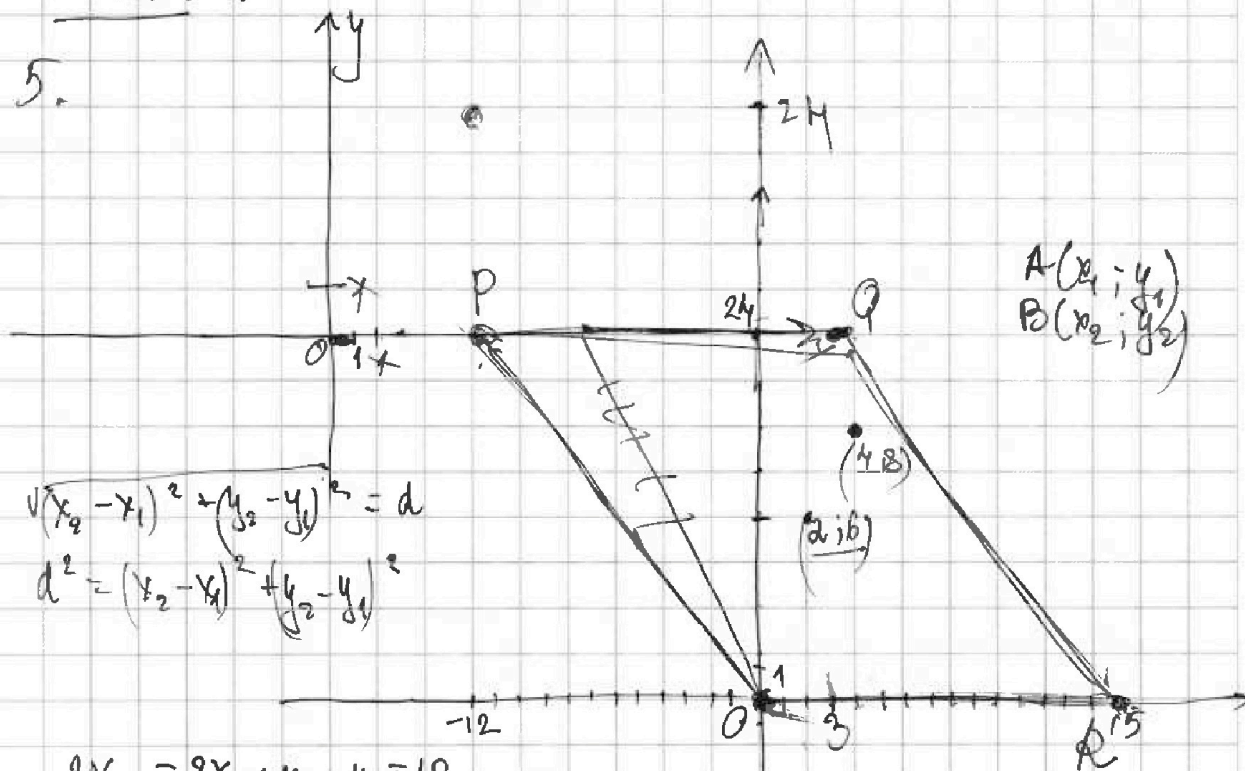
$$4x^2 - 3x + 3 = 0$$

$D = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 3 < 0 \Rightarrow$  ур.  $4x^2 - 3x + 3$  всегда  
положительно  
ур.  $-(4x^2 - 3x + 3) < 0$

$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \Rightarrow$  ур. (2)  $\emptyset$

Ответ:  $\frac{2}{7}$

5.



$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$(2, 6)$      $(4, 8)$      $2(2-4)$   
 $2(4-2) + (8-6) = 6 \neq 12$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

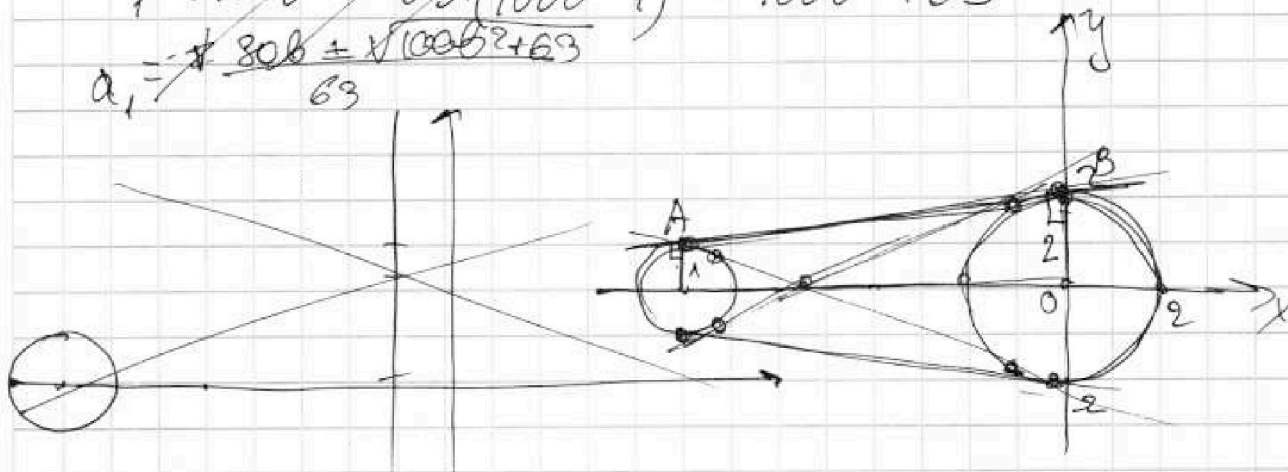


~~63~~ 100

$$63a^2 + \cancel{100}ab + 100b^2 - 1 = 0$$

$$D_1 = \cancel{6400b^2} - 63 \cdot (100b^2 - 1) = 100b^2 + 63$$

$$a_1 = \cancel{80b} \pm \sqrt{100b^2 + 63}$$



$$y = ax + 10b$$

$$2 \text{ см. } b < 0$$

$$2 \text{ см. } b > 0$$

то рас в т. А и в В:  $x = -8$

$$A: x = -8$$

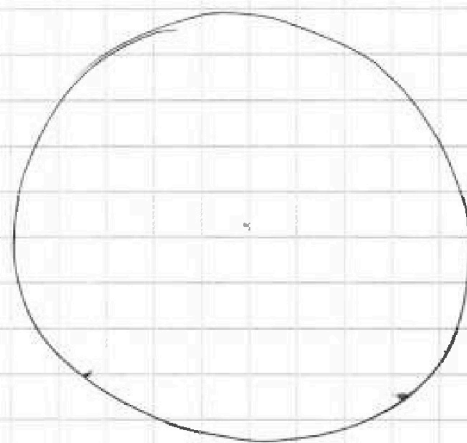
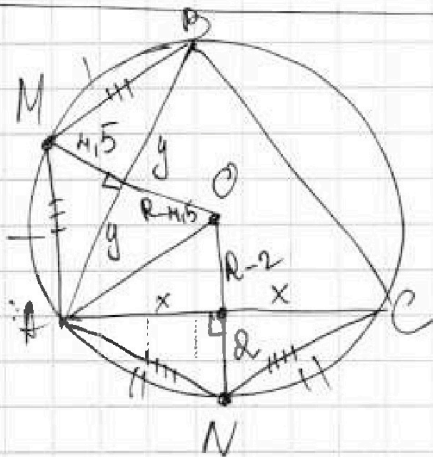
$$y = -8a + 10b$$

$$B: x = 0$$

$$y = 10b$$

$$= 8a + 10b = 10b$$

AO - ?



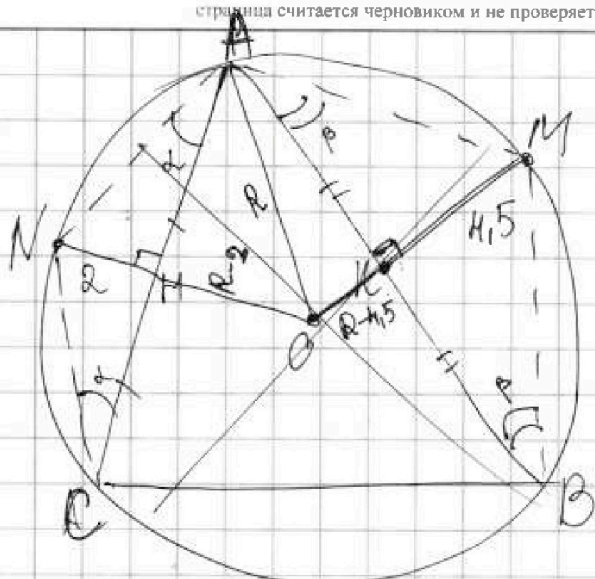
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

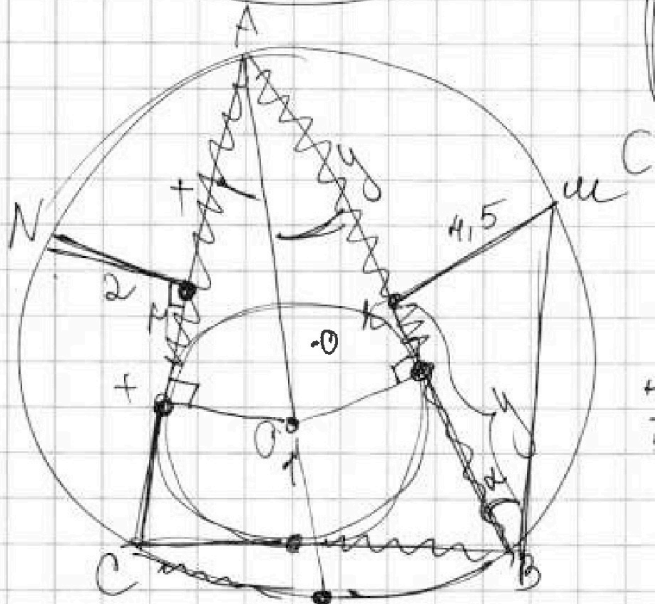
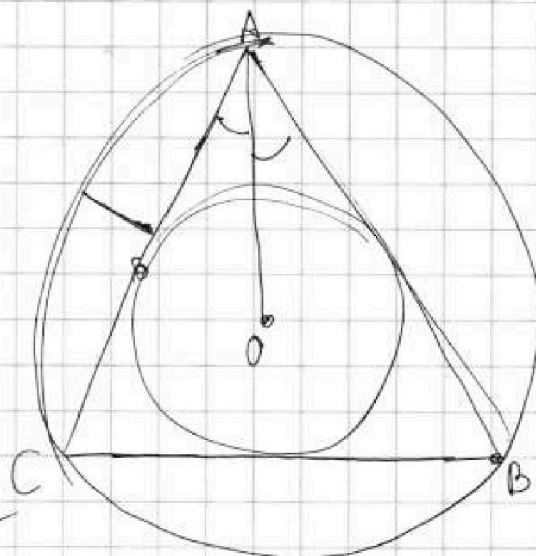
- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO = R - ?$$



$$a^2 - 6ab + b^2 = 0$$

$$D_1 = 9b^2 - b^2 = 8b^2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 34 \\ + 17 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 22 \\ + 37 \\ \hline 59 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ + 17 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$abc = ?$$

$$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = m \cdot 2^{12} \cdot 7^{12}$$

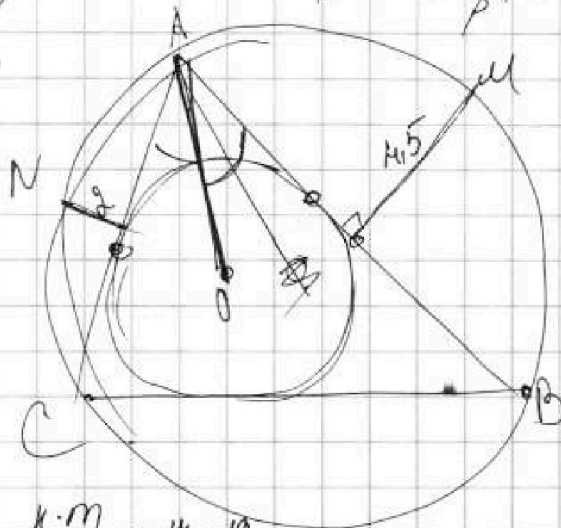
$$ac = n \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\frac{ab}{bc} = \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 7^7}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{k} \cdot 2^3 \cdot 7^7$$

$$c = \frac{m}{k} \cdot a \cdot 2^3 \cdot 7^7$$

$$b = \frac{k \cdot m \cdot 2^{17} \cdot 7^{12}}{a \cdot 2^3 \cdot 7^7} = \frac{k \cdot m}{a} \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

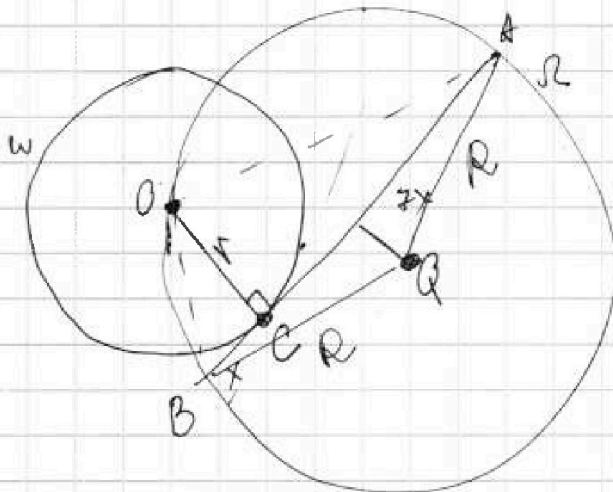
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2401x^4 - 16x^4 - 258x^3 + 24x^3 + 196x^2 + 8x^2 + 44x^2 - 4x - 84x + 8 = 0$$

3.



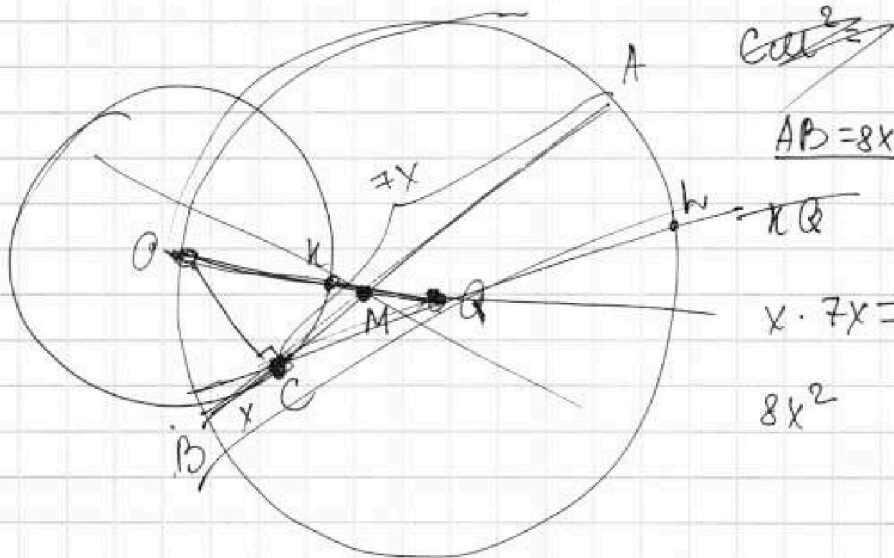
$$\frac{AO}{CO} = 7 \quad AB = ?$$

$$r = 1, R = 5.$$

$$AB = 8x$$
$$S_{BOA} = \frac{1}{2} r \cdot 8x$$

$$OQ = R$$

$$KQ = R - r = 5 - 1 = 4$$

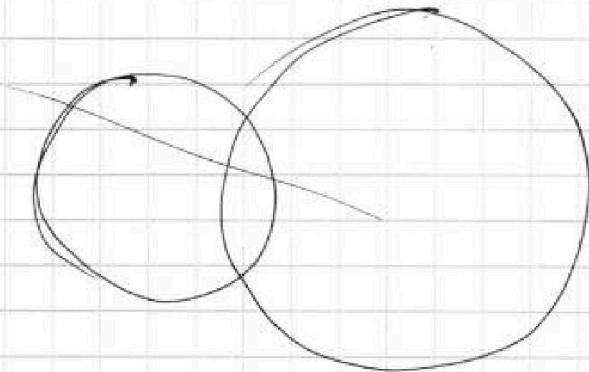


$$CO = 7$$

$$AB = 8x$$

$$x \cdot 7x = BC \cdot CK$$

$$8x^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

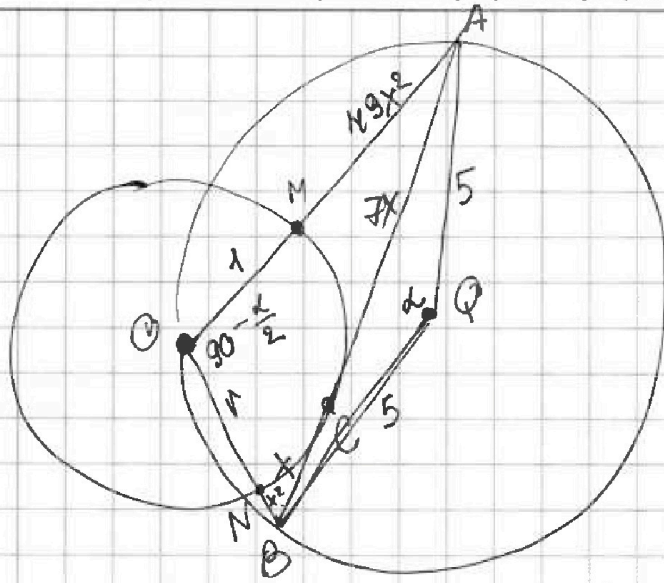
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

д.3



$$CA^2 = OM \cdot MA$$

$$49x^2 = 1 \cdot MA \Rightarrow$$

$$MA = 49x^2$$

$$PN \cdot PO = PC^2$$

$$x^2 = PN \cdot 1$$

$$PN = x^2$$

a, b, c ab : 2<sup>14</sup>

$$\sin \alpha = \frac{AB}{\sin \pi}$$

$$\frac{AB}{\sin(90 - \frac{\alpha}{2})} = 2R$$

$$\frac{8x}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 10 \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{8x}{10} = \frac{4}{5}x \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\sin(180 - \frac{\alpha}{2}) = \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5}x - 1 = \frac{8}{5}x - 1$$

$$\sin \alpha$$

$$\frac{8x}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 10$$

$$\frac{100}{8} = 11$$

$$(1) 8x^2 = 50 - 50 \left( \frac{8}{5}x - 1 \right)$$

$$\frac{150}{15} = \frac{35}{30}$$

$$8x^2 = 50 - 80x + 50 \Rightarrow 8x^2 + 80x - 100 = 0 \quad 30:5=6$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 25 \\ 150 \\ 150 \end{array}$$

$$\text{ответ: } 20\sqrt{6} - 10$$

$$4x^2 + 40x - 50 = 0$$

$$2x^2 + 20x - 25 = 0$$

$$D = 100 + 4 \cdot 2 \cdot 25 = 150 = (\sqrt{150})^2 = (5\sqrt{6})^2$$

$$x_1 = \frac{-10 - 5\sqrt{6}}{2} - \text{не год}$$

$$x_2 = \frac{-10 + 5\sqrt{6}}{2} > 0$$

$$AB = 8x = 8 \cdot \left( \frac{-10 + 5\sqrt{6}}{2} \right) =$$

$$= +4(5\sqrt{6} - 10) = 20\sqrt{6} - 40$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице.

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)^2(1 - 7x)^2$$

$$4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3) = (4 - 28x + 49x^2) \cdot (1 - 14x + 49x^2)$$

$$16x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 40x^3 - 40x^2 - 20x + 24x^2 + 2$$

$$4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = 4 - 4 \cdot 14x + 4 \cdot 49x^2 - 28x + 28x \cdot 14x - 28x \cdot 49x^2 + 49x^2 - 49x^3 \cdot 4 + 49x^2 \cdot 4$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad \text{OD } 3: 2x^2 - 5x + 3 > 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (2 - 7x)^2$$

$$-7x + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (2 - 7x)^2$$

$$-2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (2 - 7x)(2 - 7x - 1)$$

$$= (2 - 7x)(1 - 7x)$$

$$(2 - 7x)(1 - 7x) < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right)$$

$$\begin{aligned} (50-1)^2 &= \\ &= 2500 - 100 + 1 \end{aligned}$$

$$-2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 49x^2 - 7x - 14x + 2$$

$$49x^2 - 21x + 2$$

$$(50-1)(204) =$$

$$= 100 + 50 - 20 - 1 =$$

$$= 129$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{129}{2} \\ & \hline & 258 \end{aligned}$$

$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (49x^2 - 21x + 2)^2$$

$$4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3) = (49x^2 - 21x + 2)^2$$

$$4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = 49^2 x^4 - 49 \cdot 21x^3 + 2 \cdot 49x^2 -$$

$$-21 \cdot 49x^3 + 21x^2 - 21 \cdot 2x + 49 \cdot 2x^2 - 42x + 4$$

$$16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12 = 2401x^4 - 258x^3 + 196x^2 + 441x^2 - 84x + 4$$

3  
49  
x 4  
196

21<sup>2</sup>  
(20+1)<sup>2</sup>  
= 400+40+1  
= 441



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$$

$$D = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

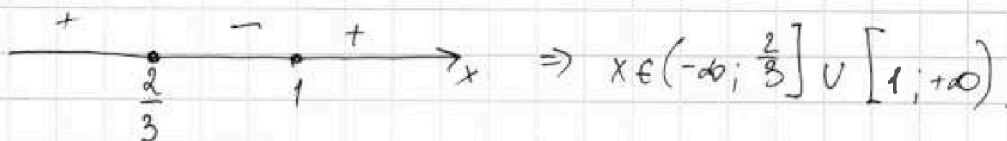
ур всегда положительная

$$x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (2x - 3)(x - 1)$$

$$\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$ODZ: (2x-3)(x-1) \geq 0$$



$$\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\left( \sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)^2 = (2 - 7x)^2$$

$$(2x-3)(x-1) - (2x^2 + 2x + 1) - 2\sqrt{(2x-3)(x-1)}(2x^2 + 2x + 1) = 4 - 28x + 49x^2$$

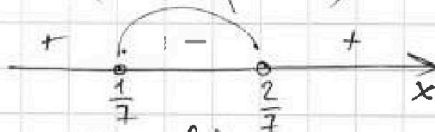
$$-7x + 2 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)}(2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)^2$$

$$-2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)}(2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)^2 - (2 - 7x)$$

$$-2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)}(2x^2 + 2x + 1) = (2 - 7x)(1 - 7x)$$

$$(2 - 7x)(1 - 7x) < 0 \Rightarrow$$

$$(7x - 2)(7x - 1) < 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода исполняется!

6. 
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

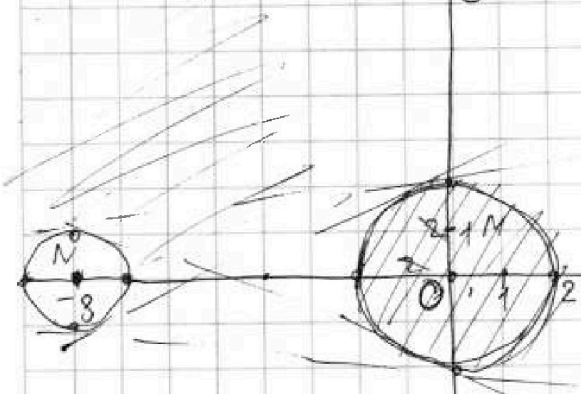
$$\begin{cases} y = ax + 10b, (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 (2) \end{cases}$$

решить  
а-?

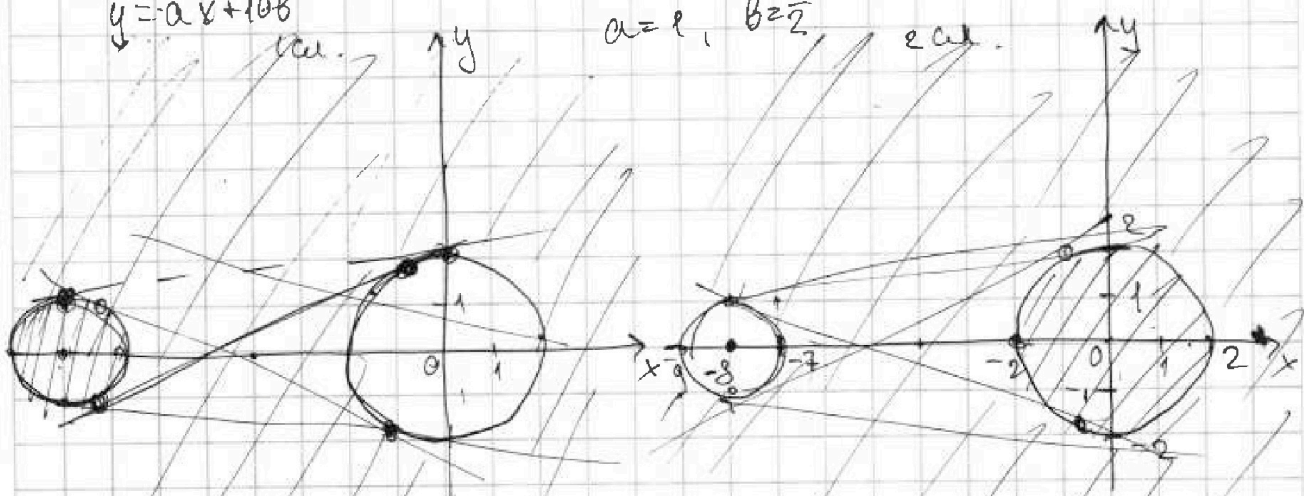
$y = ax + 10b$  (1) — прямая.

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \text{ — опр.} \\ x^2 + y^2 = 4 \text{ — опр.} \end{cases}$$

Решения  
система ур. имеет 2  
реш, если прямая  
 $y = ax + 10b$  кас.  
опр. М и N.  
Это можно сд. н-м  
сл. : 2 внутр кас, 2  
внеш. кас.



$y = ax + 10b$   
кас.  
 $ax + 10b$   
 $a = 1, b = \frac{1}{2}$



$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x+8)^2 + (ax+10b)^2 &= 1 \\ x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 1 &= 0 \\ x^2(a^2+1) + 4x(4+5ab) + 100b^2 + 63 &= 0 \\ D_1 = (a^2+1)^2 - 2^2(4+5ab)^2 - (100b^2+63)(a^2+1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4(16 + 40ab + 25a^2b^2) - 100a^2b^2 - 100b^2 - 63a^2 - 63 &= 0 \\ 64 + 160ab + 100a^2b^2 - 100a^2b^2 - 100b^2 - 63a^2 - 63 &= 0 \\ 100b^2 + 63a^2 - 160ab - 1 &= 0 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}, \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{17}, \quad ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \quad \min(abc) - ?$$

$$ab = \frac{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}, \quad bc = \frac{n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}}{n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}}, \quad ac = \frac{d \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}}{d \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}}$$

$$a = \frac{b}{c}$$

$$ac = \frac{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{b} \quad c = d \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{d \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}}{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{d}{k} \cdot 2^6 \cdot 7^{27}$$

$$\frac{d}{k} = \frac{ac \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{20} \cdot 7^{37}} \cdot \frac{2^{14} \cdot 7^{10}}{b} = \frac{c}{b}$$

$$ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}, \quad bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}, \quad ac =$$

$$\begin{cases} ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac = l \cdot 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{l \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}} \quad bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$a = \frac{m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{b} \\ b = \frac{n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}}{c}$$

$$a^2 - 6ab + b^2 \\ D = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2 \\ a_1 = \frac{3b - b\sqrt{5}}{2} \\ a_2 = \frac{3b + b\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{abc}{a+b} = \frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} =$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2$$

$$a_1 = \frac{3b - 2\sqrt{5}b}{2}$$

$$a_2 = \frac{3b + 2\sqrt{5}b}{2}$$

$$\frac{a+b}{(a - 3b + 2\sqrt{5}b)(a - 3b - 2\sqrt{5}b)}$$